

Politechnika Śląska

Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki

mgr inż. Magdalena Wilkołazka

Interpolacja Danych Zredukowanych na Bazie
Krzywych Wielomianowych Trzeciego Stopnia

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem:

dr hab. Ryszard Kozera, prof. SGGW

Gliwice 2024

Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi

PANU DR. HAB. RYSZARDOWI KOZERZE

za poświęcony czas, cierpliwość, cenne wskazówki,

a także mobilizację do pracy

Szczególnie dziękuję

MOIM BLISKIM

za wsparcie i wiarę we mnie

Spis treści

Spis treści	3
1 Streszczenie	7
1.1 Cele badawcze dysertacji	7
1.2 Opis rozdziałów	9
1.3 Oznaczenia i funkcje pakietu Mathematica występujące w pracy	11
2 Podstawowe pojęcia, definicje i twierdzenia	13
2.1 Zagadnienia analizy matematycznej i numerycznej oraz geometrii różniczkowej	13
2.2 Interpolacja nieparametryczna versus parametryczna	16
2.3 Krzywe parametryczne	18
2.4 Podstawowe definicje dotyczące próbkowań	23
2.5 Parametryzacja wykładnicza	28
2.6 Schematy interpolacyjne	29
2.6.1 Formuła interpolacyjna Newtona	29
2.6.2 Schemat interpolacyjny Lagrange’a	31
2.6.3 Schemat interpolacyjny Hermita	32
2.6.4 Schemat interpolacyjny dla funkcji sklepanych	33
2.7 Ocena zbieżności schematu interpolacyjnego	36
2.8 Podsumowanie	38
3 Przedziałowo-kubiczna interpolacja klasy C^0 i parametryzacja wykładnicza	39
3.1 Szacowanie trajektorii przedziałowo-kubcznym interpolantem klasy C^0 w oparciu o dane zredukowane	41
3.1.1 Rząd zbieżności w szacowaniu trajektorii γ	42
3.1.2 Ostrość asymptotyki w oszacowaniu trajektorii γ	55
3.1.3 Konieczność założenia dopuszczenia próbkowania mniej lub bardziej równomiernego w Tw. 3.4	63
3.1.4 Konieczność założenia regularności krzywej γ	67
3.1.5 Testy numeryczne	70

3.2	Szacowanie długości krzywych za pomocą przedziałowo-kubicznej interpolacji klasy C^0	73
3.2.1	Asymptotyczne warunki wystarczające dla $\psi > 0$ (parametryzacja). . .	74
3.2.2	Testy numeryczne	89
3.3	Podsumowanie	101
4	Przedziałowo-kubiczna interpolacja klasy C^1 i parametryzacja wykładnicza	105
4.1	Szacowanie trajektorii przedziałowo-kubicznym interpolantem klasy C^1 w oparciu o dane zredukowane	107
4.1.1	Rząd zbieżności w szacowaniu trajektorii γ	108
4.1.2	Ostrość asymptotyki w oszacowaniu trajektorii γ	113
4.1.3	Konieczność założenia dopuszczenia próbkowania mniej lub bardziej równomiernego w Tw. 4.2.	117
4.1.4	Konieczność założenia regularności krzywej γ	124
4.1.5	Testy numeryczne	124
4.2	Analiza możliwości szacowania długości krzywych z pomocą przedziałowo-kubicznej interpolacji klasy C^1	126
4.2.1	Asymptotyczne warunki wystarczające by $\phi^H > 0$ (parametryzacja). . .	127
4.2.2	Testy numeryczne	134
4.3	Podsumowanie	138
5	Interpolacja przedziałowo-kubiczna splajnami klasy C^2 i parametryzacja wykładnicza	141
5.1	Szacowanie γ przy użyciu przedziałowo-kubicznego zmodyfikowanego splajna zupełnego $\hat{\gamma}^{MC}$ klasy C^2	142
5.1.1	Konstrukcja zmodyfikowanego splajna zupełnego	142
5.1.2	Oszacowanie rzędu zbieżności trajektorii krzywej interpolowanej zmodyfikowanym splajnem zupełnym	143
5.1.3	Oszacowanie trajektorii zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym - testy numeryczne	147
5.1.4	Konieczność założenia mniej lub bardziej równomierności próbkowania oraz regularności krzywej - testy numeryczne	149

5.1.5	Testy numeryczne szacowania współczynnika zbieżności $d(\hat{\gamma}^{MC})$ do $d(\gamma)$	151
5.1.6	Podsumowanie	156
5.2	Szacowanie γ przy użyciu interpolacji przedziałowo-kubicznej splajna naturalnego $\hat{\gamma}_3^{NS}$	157
5.2.1	Konstrukcja splajna naturalnego	157
5.2.2	Oszacowanie rzędu zbieżności trajektorii krzywej interpolowanej przedziałowo kubicznym splajnem naturalnym - hipoteza i eksperymenty numeryczne	158
5.3	Szacowanie długości krzywych przy użyciu interpolacji przedziałowo-kubicznym splajnem naturalnym	161
5.3.1	Testy numeryczne szacowania współczynnika zbieżności $d(\hat{\gamma}^{NS})$ do $d(\gamma)$	162
5.3.2	Podsumowanie	163
5.4	Podsumowanie	163
6	Zastosowania danych zredukowanych w modelowaniu krzywych w grafice komputerowej i analizie obrazów USG	165
6.1	Analiza obrazu medycznego	165
6.2	Rekonstrukcja filmu	171
6.3	Podsumowanie	177
7	Podsumowanie i dalsze perspektywy badań	179
	Bibliografia	185
	Spis rysunków	191
	Spis tabel	195
	Skorowidz	197

1 Streszczenie

Niniejsza praca doktorska obejmuje swoją tematyką zagadnienie interpolacji wielomianami sklejonymi stopnia trzeciego dla tzw. danych zredukowanych (interpolacja nieparametryczna). W tym przypadku, gdy znane są tylko uporządkowane punkty interpolacyjne $Q_m = \{q_i\}_{i=0}^m$ bez zadanych odpowiadających im węzłów interpolacyjnych. Punkty te są śladem krzywej parametrycznej $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^n$, gdzie $\gamma(t_i) = q_i$, a \mathbb{E}^n definiuje dowolną przestrzeń Euklidesową. W szczególności praca odnosi się do zagadnienia oszacowania γ przy użyciu interpolacji nieparametrycznej oraz parametryzacji wykładniczej zastępującej nieznane węzły $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m$ przez $\hat{\mathcal{T}}_m = \{\hat{t}_i\}_{i=0}^m$.

1.1 Cele badawcze dysertacji

Dla klasycznej interpolacji parametrycznej Lagrange'a wielomianami sklejonymi stopnia 3 zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.1. *Niech $\gamma \in C^{r+1}$ będzie krzywą $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^n$ probkowaną na węzłach interpolacyjnych $\{t_i\}_{i=0}^m$. Wtedy przedziałowo-wielomianowa interpolacja Lagrange'a stopnia 3, $\tilde{\gamma}_3$ na bazie znanych $\{t_i\}_{i=0}^m$ daje następujące oszacowanie asymptotyczne dla trajektorii ([1]):*

$$\tilde{\gamma}_3^L(t) - \gamma(t) = O(\delta^4)^*.$$
 (1)

Podobnie dla interpolacji kawałkami kubicznej Hermita klasy C^1 :

Twierdzenie 1.2 (Interpolacja kawałkami kubiczna). *Mając zadane wektory prędkości funkcji γ w punktach $a = t_0, \dots, t_m = b$ tj. $\dot{\gamma}(t_0), \dots, \dot{\gamma}(t_m)$ można skonstruować interpolanta kawałkami kubicznego Hermita $\tilde{\gamma}_3(t)$ na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$. Błąd interpolacji wynosi:*

$$\tilde{\gamma}_3^H(t) - \gamma(t) = O(\delta^4)^*.$$
 (2)

Natomiast, dla splajna kubicznego klasy C^2 z [2] można przytoczyć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.3 (Interpolacja kawałkami kubiczna klasy C^2). *Dla funkcji regularnej γ klasy C^2 błąd przybliżenia krzywej γ interpolantem $\tilde{\gamma}_3^S(t)$ wynosi:*

$$\tilde{\gamma}_3^S(t) - \gamma(t) = O(\delta^4)^*. \quad (3)$$

* parametr δ opisany jest w Def. 2.13.

Podstawowym pytaniem jest czy powyższe twierdzenia (dotyczące szacowania rzędu zbieżności interpolanta do krzywej) klasycznej interpolacji parametrycznej wielomianami sklejonymi mogą zostać przeniesione na obszar danych zredukowanych i ich weryfikacja pozwoli uzyskać satysfakcjonujące rezultaty.

Głównym celem badawczym pracy jest zbadanie jakości zbieżności kawałkami kubicznego interpolanta $\hat{\gamma}$ do nieznanej krzywej γ z pomocą parametryzacji wykładniczej zastępującej nieznane węzły $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m$.

Cele szczegółowe, które podjęto w dysertacji to:

- sformułowanie twierdzeń (analogicznych do klasycznej interpolacji parametrycznej) dotyczących oszacowania rzędu zbieżności kawałkami kubicznego interpolanta $\hat{\gamma}$ do krzywej γ z pomocą wspomnianej parametryzacji wykładniczej dla trzech rodzajów interpolantów: kawałkami kubicznego Lagrange’a klasy C^0 , zmodyfikowanego sklejonego kubicznego Hermita klasy C^1 oraz zmodyfikowanego splajna zupełnego i splajna naturalnego klasy C^2 ,
- weryfikacja konieczności istnienia założeń (próbkiowanie mniej lub bardziej równomierne oraz regularności krzywej) określonych w twierdzeniach poprzez przykłady analityczne i testy numeryczne,
- weryfikacja postawionej tezy dotyczącej rzędu zbieżności interpolanta do krzywej i jego ostrości w testach numerycznych i przykładach,
- ocena przydatności sformułowanej teorii w zastosowaniu praktycznym: analizie obrazu oraz rekonstrukcji filmu,
- określenie warunków dla wspomagającej funkcji ψ lub ϕ by była reparametryzacją, co pozwoli na oszacowanie długości krzywej w interpolacji nieparametrycznej.

1.2 Opis rozdziałów

Poszczególne rozdziały tej pracy opisują, po wprowadzeniu niezbędnych definicji i uwag w Rozdziale 2, kolejno sklejając interpolację Lagrange’a (Rozdział 3), sklejając zmodyfikowaną interpolację Hermita (Rozdział 4) oraz sklejając interpolację splajnami kubicznymi (Rozdział 5). Rozdział 6 ilustruje możliwe zastosowania omawianej w niniejszej dysertacji tematyki badawczej.

Głównym problemem badawczym, który został podjęty w tej dysertacji było zbadanie jakości zbieżności trajektorii interpolanta do trajektorii nieznanej krzywej γ . Krzywa γ jest zadana jedynie w punktach interpolacyjnych $Q_m = \{q_i\}_{i=0}^m$ (w przypadku interpolacji parametrycznej znane są również węzły interpolacyjne $\mathcal{T} = \{t_i\}_{i=0}^m$).

Tematyka i wyniki z Rozdziałów 3, 4, 5 zostały opublikowane w czasopismach [3], [4], [5], [6], materiałach konferencyjnych [7], [8], [9], [10], [11] i [12] oraz zaprezentowane na konferencjach: CISIM’2015 (International Conference on Computer Information Systems and Industrial Management), ACA’2015-2017, (International Conference on Applications of Computer Algebra), ICNAAM’16 (International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics), MMA’17 (International Conference Mathematical Modelling and Analysis), ICCS’2020 (The International Conference on Computational Science), ESM’23 (The European Simulation and Modelling Conference), ACA’2023, MMA’2024.

W Rozdziale 2 jest wprowadzone pojęcie danych zredukowanych oraz został opisany schemat interpolacji nieparametrycznej oraz różnice między interpolacją parametryczną a nieparametryczną. Przedstawiono też wymagane założenia, które muszą spełniać krzywe i próbkowania oraz zacytowano niezbędne definicje z analizy matematycznej, używane podczas dowodzenia twierdzeń.

Rozdział 3 opisuje przedziałowo-kubiczną interpolację Lagrange’a $\hat{\gamma}^L$, gdzie wielomiany kubiczne $\hat{\gamma}_i^L$ w punktach łączenia $q_0, q_3, q_6, \dots, q_{m-3}$ są tylko klasy C^0 . *Głównym wynikiem tej części pracy jest Tw. 3.4 (określające prędkość zbieżności interpolanta $\hat{\gamma}^L \circ \psi^L$ do γ w oparciu o parametryzację wykładniczą) wraz z jego pełnym dowodem. Dodatkowo w Rozdziale 3 zawarty jest też dowód na ostrość powyższego oszacowania oraz konieczność dodania warunku mniej lub bardziej równomierności w próbkowaniu i regularności krzywej. Przeprowadzone*

zostały też stosowne eksperymenty numeryczne (patrz [3]). *Kolejnym wynikiem jest określenie warunków wystarczających na to, aby funkcja kubiczna $\psi_i^L : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$, spełniająca $\psi_i(t_{i+j}) = \hat{t}_{i+j}$, była reparametryzacją tj. $\psi_i > 0$.* Powyższe zagadnienia są opublikowane w [3] oraz [4].

Podobne warunki zostały wyprowadzone także w przypadku zmodyfikowanej interpolacji Hermita $\hat{\gamma}^H$, którą traktuje Rozdział 4. Na wstępie tego rozdziału przedstawiony jest schemat budowania zmodyfikowanego interpolanta Hermita jako wielomianu kawałkami trzeciego stopnia. Przymiotnik "zmodyfikowany" odnosi się tu do sposobu w jaki zastępuje się nieznanne prędkości $v_i = \dot{\gamma}(t_i)$ dla q_i . Mianowicie, korzystamy tu z kolejnych generowanych nakładkowo (kolejne czwórki punktów) wielomianów Lagrange'a $\hat{\gamma}_i^L$ i $\hat{\gamma}_{i+1}^L$ określonych odpowiednio na przedziałach $[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$ oraz $[\hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+4}]$. W standardowej interpolacji Hermita prędkości te są zadane a priori wzorem $v_i = \dot{\gamma}(t_i)$. *Głównym wynikiem tej części pracy jest Tw. 4.2, w którym określa się i dowodzi stopień zbieżności $\hat{\gamma}^H \circ \phi^H$ do γ w połączeniu z parametryzacją wykładniczą* (opublikowane w [5]). Kolejne podrozdziały Rozdziału 4 opisują w pierwszej kolejności analityczne przykłady potwierdzające ostrość oszacowań zawartych w Tw. 4.2, następnie przedstawione są przykłady weryfikujące konieczność istnienia założeń zawartych we wspomnianym twierdzeniu tj. mniej lub bardziej równomierności i regularności krzywych. W ostatnim podrozdziale zawarte są testy numeryczne potwierdzające kolejny raz ostrość Tw. 4.2, konieczność mniej lub bardziej równomierności oraz regularności krzywych. W kolejnej części pracy zostało poruszone zagadnienie interpolacji długości krzywej γ z pomocą interpolacji $\hat{\gamma}^H$. W pierwszym podrozdziale opisano tutaj warunki wystarczające aby $\phi_i^H : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ była reparametryzacją. Zostały one zobrazowane w postaci obszarów 3D, a przykładowe próbkowania oznaczone jako trójki punktów (x,y,z). W końcu rozdziału przeprowadzona została też analiza przynależności punktów próbkowań do opisanych Tw. 4.5 obszarów w kontekście przyszłych zastosowań do szacowania długości. Wyniki wskazały na istotność doboru odpowiedniego próbkowania przy szacowaniu wspomnianego parametru krzywej (zobacz także w [6]).

Rozdział 5 opisuje zagadnienie interpolacji splajnami kubicznymi w oparciu o parametryzację wykładniczą. Splajny są funkcjami klasy C^2 w punktach sklejenia i C^∞ poza

nimi. Zapewniają gładkość (trajektorii, prędkości) w punktach łączenia kolejnych krzywych $\hat{\gamma}_i^S$ interpolujących Q_m . Dodatkowo, "sklejenie" ich likwiduje podobnie jak w przypadku przedziałowej interpolacji Lagrange'a i Hermita zjawisko Rungego, a błąd interpolacji jest mały, pomimo niskiego stopnia wielomianu. Klasa C^2 zapewnia ciągłość pierwszej pochodnej czyli interpolant $\hat{\gamma}^S = \{\hat{\gamma}_i^S\}_{i=0}^m$ nie ma ostrych rogów i ciągłość drugiej pochodnej czyli przyspieszenie jest określone w każdym punkcie i jego zmiana w otoczeniu punktu sklejenia jest ciągła. W rozdziale tym *głównym wynikiem pracy jest Tw. 5.1 oraz hipoteza 5.2 - potwierdzona testami numerycznymi* (cała tematyka z dowodami zostały opublikowane w pracach [9], [10], [11] i [12] oraz zaprezentowane na konferencjach CISIM'2015, ICNAAM'2015 -2016, ESM'23 i MMA'24). Poruszane w tej sekcji zagadnienia opisują interpolację zmodyfikowanym splajnem zupełnym oraz interpolację splajnem naturalnym (w połączeniu z parametryzacją wykładniczą) w kontekście szacowania trajektorii z zastosowaniem opisanych w Rozdziale 2 próbkowań i krzywych. Opisane w tym rozdziale eksperymenty dotyczą numerycznej weryfikacji stopnia zbieżności dla obu splajnow, konieczności użycia próbkowania mniej lub bardziej równomiernego oraz stosowania krzywej regularnej (dwa ostatnie zagadnienia zostały zweryfikowane dla splajna zupełnego $\hat{\gamma}^{MC}$). Został też przeprowadzony dowód teoretyczny o rzędzie zbieżności $\hat{\gamma}^{MC} \circ \psi^{MC}$ do γ .

W Rozdziale 6 opisane zostały niektóre praktyczne zastosowania prezentowanych interpolacji do analizy obrazu medycznego i rekonstrukcji zagubionych (lub brakujących) klatek w filmie. Warto podkreślić, że dane zredukowane (zobacz np. w [13] lub [14]) tworzą ważne zagadnienie w obszarach wizji komputerowej i grafice, inżynierii, mikrobiologii, fizyce i innych zastosowaniach jak np. analiza obrazu medycznego (np. do szacowania powierzchni, długości, oszacowania długości i brzegu, planowaniu trajektorii) - patrz także w [9], [12], [15], [16], [17], [18], [19] lub [20].

Rozdział 7 podsumowuje pracę doktorską oraz omawia jej możliwe rozszerzenia.

Pracę zamyka spis bibliografii, rysunków, tabel oraz skorowidz pojęć.

1.3 Oznaczenia i funkcje pakietu Mathematica występujące w pracy

Poniżej wypunktowano wykaz oznaczeń użytych w pracy oraz krótki opis funkcji pakietu Mathematica, użytych w testach numerycznych ([21]).

Tab. 1: Oznaczenia

γ	-nieznana krzywa parametryczna
$\tilde{\gamma}$	-interpolant klasycznej interpolacji parametrycznej
$\hat{\gamma}$	-interpolant w interpolacji nieparametrycznej
$\hat{\gamma}_3^L, \hat{\gamma}^L$	-interpolant sklejanya kubiczny Lagrange'a
$\hat{\gamma}_3^H, \hat{\gamma}^H$	-interpolant sklejanya kubiczny Hermita
$\hat{\gamma}^S$	-sklejanya splajn klasy C^2
$\hat{\gamma}_3^{MC}, \hat{\gamma}^{MC}$	-sklejanya kubiczny zmodyfikowany splajn zupełny
$\hat{\gamma}_3^{NS}, \hat{\gamma}^{NS}$	-sklejanya kubiczny splajn naturalny
$\tilde{\gamma}_{3,i}^L, \tilde{\gamma}_i^L$	-interpolant kubiczny Lagrange'a, określony na przedziale $[t_i, t_{i+3}]$, z rozszerzoną dziedziną
$\tilde{\gamma}_{3,i}^H, \tilde{\gamma}_i^H$	-interpolant kubiczny Hermita, określony na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$, z rozszerzoną dziedziną
$\tilde{\gamma}_{3,i}^{MC}, \tilde{\gamma}_i^{MC}$	-kubiczny zmodyfikowany splajn zupełny, określony na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$, z rozszerzoną dziedziną
$\tilde{\gamma}_{3,i}^{NS}, \tilde{\gamma}_i^{NS}$	-kubiczny splajn naturalny, określony na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$, z rozszerzoną dziedziną
$\hat{\gamma}_{3,i}^L, \hat{\gamma}_i^L$	-interpolant kubiczny Lagrange'a, z dziedziną na przedziale $[t_i, t_{i+3}]$
$\hat{\gamma}_{3,i}^H, \hat{\gamma}_i^H$	-interpolant kubiczny Hermita, z dziedziną na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$
$\hat{\gamma}_{3,i}^S, \hat{\gamma}_i^S$	-splajn kubiczny, z dziedziną na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$
$\hat{\gamma}_{3,i}^{MC}, \hat{\gamma}_i^{MC}$	-kubiczny zmodyfikowany splajn zupełny, z dziedziną na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$
$\hat{\gamma}_{3,i}^{NS}, \hat{\gamma}_i^{NS}$	-kubiczny splajn naturalny, z dziedziną na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$
ψ, ϕ	-funkcja tego samego typu co interpolant $\hat{\gamma}$ pozwalająca uwspólnić dziedzinę
$\mathcal{T}_m = \{t_0, \dots, t_m\}$	-zbiór węzłów interpolacyjnych
$Q_m = \{q_0, \dots, q_m\}$	-dane zredukowane, zbiór wartości w węzłach interpolacyjnych
$\{\mathcal{T}_m, Q_m\}$	-zbiór par punktów interpolacyjnych w klasycznej interpolacji parametrycznej
$\{\hat{\mathcal{T}}_m, Q_m\}$	-zbiór par punktów interpolacyjnych w interpolacji nieparametrycznej
\hat{t}	-węzły interpolacyjne z parametryzacji wykładniczej

Tab. 2: Najczęściej używane funkcje programu Mathematica

MaxValue	-oblicza maksimum lokalne funkcji, podając jego wartość
Factor	-zapisuje wielomian w postaci iloczynu wielomianów niskiego stopnia
Collect	-grupuje wyrażenia, wyciągając wspólny, podany jako parametr, czynnik przed nawias
Max	-wybiera maksimum z listy wartości,
Simplify	-upraszcza wyrażenie stosując podstawowe transformacje algebraiczne
LinearModelFit	-dopasowuje prostą regresji liniowej do danych
Manipulate	-tworzy środowisko umożliwiające zmianę parametrów w projekcie
ParametricPlot	-rysuje wykres parametryczny krzywej w 2D
ParametricPlot3D	-rysuje wykres parametryczny krzywej w 3D
Series	-stosuje rozwinięcie Taylora dla funkcji w otoczeniu zadanego punktu i do dowolnego rzędu

2 Podstawowe pojęcia, definicje i twierdzenia

Niniejszy rozdział wprowadza podstawowe pojęcia, definicje i twierdzenia wykorzystane w tej pracy doktorskiej.

2.1 Zagadnienia analizy matematycznej i numerycznej oraz geometrii różniczkowej

Założmy, że:

- a) mamy krzywą zadaną parametrycznie tj. jako funkcję $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ (gdzie \mathbb{E}^n to dowolna przestrzeń Euklidesowa),
- b) dla $\{t_i\}_{i=0}^m$ (gdzie $t_i \in [a, b]$ wraz z $t_i < t_{i+1}$) znamy punkty interpolacyjne $Q_m = \{q_i\}_{i=0}^m = \{\gamma(t_i)\}_{i=0}^m$,
- c) chcemy znaleźć $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$, taką, że $\tilde{\gamma}(t_i) = \gamma(t_i) = q_i$. Określone wartości interpolanta: $\tilde{\gamma}(t_i)$ gdzie $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ mają pokrywać się w ustalonych (tj. znanych) argumentach nazywanych węzłami interpolacyjnymi - t_i , gdzie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ z $\gamma(t_i)$.

Wybór metody interpolacji powinien uwzględniać takie kwestie jak: zbieżność, złożoność obliczeń, prędkość zbieżności, dobór punktów interpolacyjnych (np. dane gęste i rzadkie) oraz gładkość interpolanta. Przytoczmy tu klasyczne twierdzenie (patrz [22], [23]):

Twierdzenie 2.1. *Zadanie interpolacyjne, polegające na znalezieniu wielomianu m -tego stopnia $p(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1) + \dots + c_m(t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_{m-1})$, który ma wartości $q_i = p(t_i)$ identyczne z daną funkcją f w $m + 1$ różnych punktach t_i ma dokładnie jedno rozwiązanie. Współczynniki c_i wyznaczone są więc jednoznacznie w terminach \mathcal{T} i Q .*

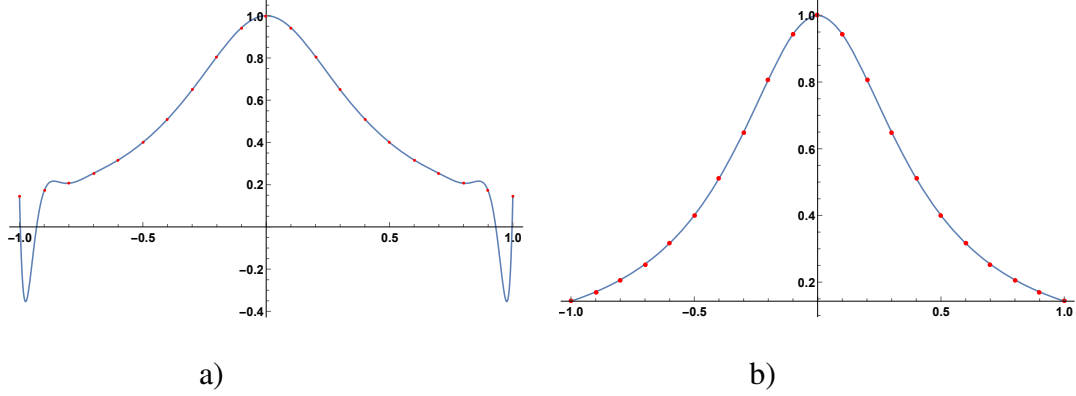
Różnica pomiędzy f i p określona jest Tw. 2.2 (patrz [22]):

Twierdzenie 2.2. *Niech f będzie funkcją o ciągłej $(m + 1)$ -szej pochodnej i niech p będzie wielomianem m -tego stopnia takim, że $p(t_i) = f(t_i)$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Wtedy:*

$$f(t) - p(t) = \frac{f^{m+1}(\xi)}{(m+1)!} (t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_m), \quad (4)$$

gdzie ξ jest pewnym punktem w najmniejszym przedziale $(t, t_0, t_1, \dots, t_m)$.

W przypadku, gdy węzły są równoodległe pojawiają się, wraz ze wzrostem stopnia wielomianu, na brzegach przedziału oscylacje zw. efektem Rungego (patrz Rys. 1a) oraz w [24]. Jest to pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej skutkujące utratą zbieżności mimo zwiększenia liczby jej węzłów i główna wada tej metody.



Rys. 1. Punkty równoodległe wygenerowane przez funkcję $f(x) = \frac{1}{\delta x^2 + 1}$ przy $m = 21$ (czerwone kropki): a) wielomian interpolacyjny stopnia 20 z efektem Rungego i b) interpolacja z zastosowaniem funkcji sklepanych stopnia 3

Dla wielomianów wyższych stopni w kształcie wykresu funkcji interpolującej $\tilde{\gamma}(t)$ pomiędzy punktami węzłowymi pojawiają się zazwyczaj niepożądane oscylacje. Chcąc ominąć wady interpolacji wielomianowej stosuje się interpolację z zastosowanie *funkcji sklepanych* [25] zbudowanych na podprzedziałach i "łączonych" w punktach interpolacyjnych (patrz Rys. 1 b)).

Definicja 2.3. Niech będą dane funkcje $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{E}^n$ i $0 \leq a_i < b_i$, dla $0 \leq i \leq k_0 - 1$. Przez funkcję sklepaną (track-sum) rodziny funkcji $\{f_i\}_{i=0}^{k_0-1}$ rozumie się funkcję $f : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{E}^n$, gdzie $\hat{T} = \sum_{i=0}^{k_0-1} (b_i - a_i)$, która spełnia:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t + a_0), & \text{gdy } t \in [0, \hat{T}_0], \hat{T}_0 = b_0 - a_0, \\ f_{k+1}(t + a_{k+1} - T_k), & \text{gdy } t \in [\hat{T}_k, \hat{T}_{k+1}], \hat{T}_{k+1} = \hat{T}_k + b_{k+1} - a_{k+1}. \end{cases} \quad (5)$$

W niniejszej pracy w dowodach wielu twierdzeń korzystamy z notacji "dużego O" potrzebnej do określania prędkości zbieżności interpolanta do γ .

Definicja 2.4. Rozważmy rodzinę $\{f_{\delta_m}, \delta_m > 0\}$ funkcji $f_{\delta_m} : I \rightarrow \mathbb{E}$. Mówimy, że f_{δ_m} jest rzędu $O(\delta_m^\alpha)$ (oznaczane jako $f_{\delta_m} = O(\delta_m^\alpha)$), jeśli istnieje stała $K > 0$ taka, że dla pewnego $\bar{\delta} > 0$

nierówność $|f_{\delta_m}(t)| < K\delta_m^\alpha$ zachodzi dla wszystkich $\delta_m \in (0, \bar{\delta})$ na I . Natomiast dla rodziny funkcji o wartościach wektorowych $F_{\delta_m} : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ oznaczamy rząd jako $F_{\delta_m} = O(\delta_m^\alpha)$ tj. $\|F_{\delta_m}\| = O(\delta_m^\alpha)$.

Poniżej zacytowano jeszcze kilka ważnych, z punktu widzenia niniejszej pracy, twierdzeń i definicji:

Lemat 2.5 (Lemat Hadamarda). Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie klasy C^l , gdzie $l \geq 1$ oraz niech $f(t_0) = \mathbf{0}$, dla pewnego $t_0 \in (a, b)$. Wtedy istnieje funkcja klasy C^{l-1} $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$, dla której $f(t) = (t - t_0)g(t)$. Dodatkowo, $g(t) = O(\frac{df}{dt})$ (patrz Def. 2.4). Jeśli funkcja $f(t)$ ma wielokrotne miejsca zerowe $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ (gdzie $f(t_i) = 0$) z $k+1 \leq l$, wtedy lemat Hadamarda stosowany $k+1$ razy daje:

$$f(t) = (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_k)h(t), \quad (6)$$

gdzie h jest klasy $C^{l-(k+1)}$ (patrz 2.8) oraz $h = O(\frac{d^{k+1}f}{dt^{k+1}})$.

W oszacowaniach rzędu zbieżności i dowodach niniejszej pracy często zostanie użyte klasyczne twierdzenie Tylora:

Twierdzenie 2.6 (Twierdzenie Tylora dla funkcji wektorowych). Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ n -razy różniczkowalnej ($n \geq 1$) w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, istnieje funkcja $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, taka, że:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{h_n(x)(x - x_0)^n}_{\text{reszta}} \quad (7)$$

gdzie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h_n(x) = 0. \quad (8)$$

Definicja 2.7 (Stopień nieregularności). Gdy dla danej krzywej γ zachodzi równość: $\dot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}(t) = \dots = \gamma^{(k)}(t) = 0$ to k jest stopniem nieregularności krzywej w punkcie t .

Definicja 2.8. Funkcję f określoną na przedziale (a, b) nazywa się funkcją klasy C^n , gdzie $n = 1, 2, \dots$, jeżeli w przedziale (a, b) ma ona n ciągłych pochodnych. Funkcje klasy C^0 to funkcje ciągłe. Klasę C^∞ nazywa się klasą funkcji gładkich (tj. nieskończenie różniczkowalnych w sposób ciągły).

2.2 Interpolacja nieparametryczna versus parametryczna

Klasyczna *interpolacja parametryczna* wykorzystuje do budowania schematu interpolacyjnego *niezredukowane dane*. Te ostatnie definiuje para węzłów i punktów interpolacyjnych (\mathcal{T}_m, Q_m) , gdzie $Q_m = \{q_i\}_{i=0}^m$, $q_i \in \mathbb{E}^n$ (\mathbb{E}^n - przestrzeń Euklidesowa), a $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m$ to węzły interpolacyjne ($t_i < t_{i+1}$) tak by $\tilde{\gamma}(t_i) = \gamma(t_i)$. Zagadnienia podjęte dla interpolacji danych niezredukowanych (\mathcal{T}_m, Q_m) to:

- wybór schematu interpolacyjnego $\tilde{\gamma}$,
- analiza czy dla wybranego schematu $\tilde{\gamma}$, interpolant $\tilde{\gamma}$ aproksymuje γ (lub długość krzywej $d(\tilde{\gamma}) \approx d(\gamma)$ (patrz (59)) wraz z $m \rightarrow \infty$,
- w przypadku pozytywnej odpowiedzi na powyższe pytanie powstaje kwestia określenia asymptotyki zbieżności $\tilde{\gamma}$ do γ (tj. prędkości zbieżności $\tilde{\gamma}$ do γ) krzywej $\tilde{\gamma}$ (patrz Def. 2.4),
- Określenie ostrości oszacowania asymptotyki zbieżności. Ostrości dowodzimy pokazując, że istnieje przynajmniej jedna krzywa i próbkowanie, dla którego osiągnięty zostaje podany w twierdzeniu rząd zbieżności (patrz Def. 2.23).

Interpolacja nieparametryczna odnosi się do **danych zredukowanych** tj. do znanych wyłącznie punktów interpolacji Q_m . W pierwszym kroku należy najpierw zaproponować substytutę \mathcal{T} tj. $\hat{\mathcal{T}} = \{\hat{t}_i\}_{i=1}^m$. Następnie przy zadanych Q_m i wybranych $\hat{\mathcal{T}}_m$ wybieramy schemat interpolacyjny $\hat{\gamma} : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ gdzie $\hat{\gamma}(\hat{t}_i) = \gamma(t_i) = q_i$, bez wykorzystania informacji o węzłach $\mathcal{T} = \{t_i\}_{i=0}^m$. Tak więc w odróżnieniu od interpolacji parametrycznej procedurę interpolacyjną w oparciu o dane zredukowane Q_m trzeba uzupełnić o:

- zastąpienie nieznanymi węzłami \mathcal{T} węzłami $\hat{\mathcal{T}}$ (najlepiej w oparciu o rozrzut geometryczny Q_m) tak, by nie tylko zachować zbieżność $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$ ale i by najlepiej również uzyskać tę samą prędkość zbieżności tak jak dla $\tilde{\gamma} \rightarrow \gamma$ (int. parametryczna), przy użyciu tego samego schematu interpolacyjnego. W niniejszej pracy doktorskiej takim wyborem $\hat{\mathcal{T}}$ jest *parametryzacja wykładnicza* (patrz (30)), która to zależy od $\lambda \in [0, 1]$,

- Kolejną różnicę, którą należy zauważyć dla interpolacji nieparametrycznej jest fakt, że tworzony interpolant $\hat{\gamma}: [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ różni się dziedziną od funkcji interpolowanej $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^n$ i aby móc dokonać analizy porównawczej między $\hat{\gamma}$ i γ tj. zbadać zachowanie $\|\gamma(t) - \hat{\gamma}(\hat{t})\|$ należy "uwspólnić" ich dziedziny tj. $[0, T]$ oraz $[0, \hat{T}]$. W tym celu należy zaproponować funkcję $\psi: [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$ (w tej pracy przyjęto, że funkcja ψ jest interpolantem $\psi(t_i) = \hat{t}_i$ tego samego typu, co wybrany interpolant $\hat{\gamma}$). W dalszej części pracy w celu określenia rzędu zbieżności będziemy porównywać krzywe $\hat{\gamma} \circ \psi$ z γ . W przypadku szacowania długości lub unikania lokalnych pętelek konieczne jest, aby funkcja ψ była reparametryzacją (tj. $\psi' > 0$ na podprzedziałach, bo ψ jest też funkcją sklejaną).

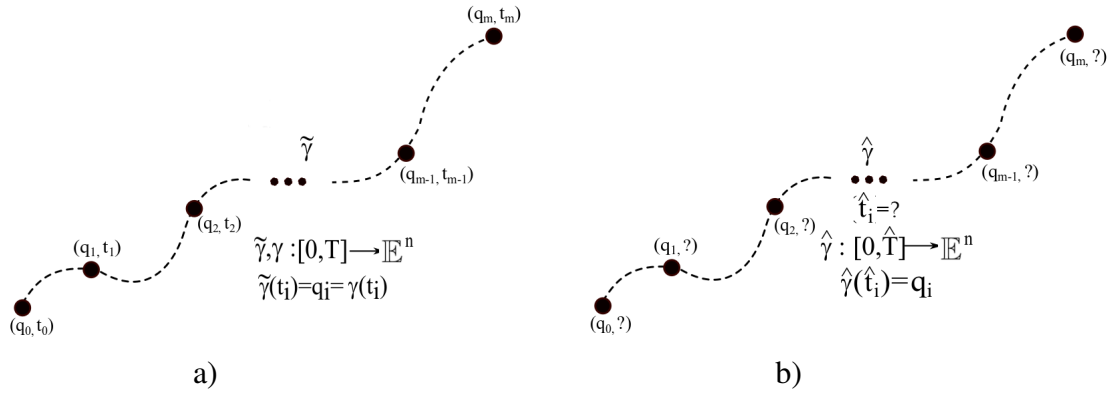
Definicja 2.9 (Reparametryzacja [26]). *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie krzywą parametryczną klasy C^k i niech $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ będzie krzywą klasy C^k (tu $k \geq 1$). Niech $\phi'(\tau) > 0$ dla wszystkich $\tau \in [\alpha, \beta]$. Wtedy $f \circ \phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{E}^n$ jest krzywą parametryczną. Krzywą $f \circ \phi$ określono jako krzywą reparametryzującą f przez ϕ .*

Dalszymi krokami dla interpolacji nieparametrycznej będą:

- sprawdzenie czy krzywe $\hat{\gamma} \circ \psi \approx \gamma$ (ew. ich długości $d(\hat{\gamma}) \approx d(\gamma)$) (przy $m \rightarrow \infty$),
- zbadanie asymptotyki zbieżności krzywej $\hat{\gamma} \circ \psi$ (lub jej długości) do γ ($d(\gamma)$) tj. $\hat{\gamma} \circ \psi - \gamma = O(\delta^\lambda)$,
- odnalezienie schematu $\hat{\gamma}$ (w oparciu o $\hat{\mathcal{F}}$), dla którego da się uzyskać te same asymptotyki zbieżności $\hat{\gamma} \circ \psi - \gamma$, co w $\tilde{\gamma} - \gamma$. Poprzednie wyniki dla parametryzacji długością cięciwy (tj. $\lambda = 1$) pokazują twierdzącą odpowiedź na to zagadnienie (patrz [1] oraz [27]).

Różnica między tymi dwoma typami interpolacji została przedstawiona na Rys. 2.

W następnej podsekcji wprowadzimy podstawowe krzywe potrzebne do testowania opisanej teorii.



Rys. 2. Interpolacja a) parametryczna vs b) nieparametryczna.

2.3 Krzywe parametryczne

Na potrzeby niniejszej pracy, w przytoczonych eksperymentach, zostały wybrane krzywe parametryczne (patrz [15]) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ i $\gamma_i(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$, dla $n = 2, 3$ określone zgodnie z definicją:

Definicja 2.10. *Jeśli x i y są ciągłymi funkcjami argumentu t na przedziale I , wtedy równania $x = x(t)$ i $y = y(t)$ (oraz $z = z(t)$ w 3D) są nazywane równaniem parametrycznym a t jest określone jako parametr. Wykres równania parametrycznego, gdzie t zmienia się na przedziale I nazywamy krzywą parametryczną w 2D (oraz 3D).*

- Będziemy też wymagać (do odpowiednich tw.) aby γ była krzywą odpowiedniej klasy C^k tj. by miała wszystkie pochodne cząstkowe ciągłe do rzędu k . Własność ta wymagana jest przy dowodach niektórych twierdzeń, które korzystają z rozwinięcia Taylora dla γ (patrz [28]) do odpowiednich rzędów,
- Ważnym też będzie założenie iż γ jest krzywą regularną (patrz [29]):

Definicja 2.11. *Krzywa parametryczna $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest regularna wtedy i tylko wtedy jeśli jest przynajmniej klasy C^1 i spełnione jest $\gamma'(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in [a, b]$.*

Regularność krzywej (tj. $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$) jest niezbędna w dowodach, gdyż zakładamy, że istnieje reparametryzacja naturalna $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ dla γ (patrz [36]).

Uwaga: Założenie regularności γ jest niezbędne do uzyskania wyników przedstawionych w niniejszej pracy. Brak spełnienia tego założenia jak pokazują eksperymenty, spowalnia

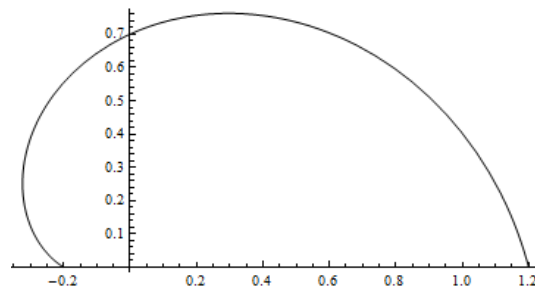
zbieżność $\check{\gamma}$ do γ dla $m \rightarrow \infty$ (lub ją eliminuje). Możliwym remedium, aby rozszerzyć zagadnienia na krzywe nieregularne jest wprowadzenie pojęcia stopnia nieregularności (patrz Def. 2.7) i uogólnienie podstawowych dowodów - zagadnienia te znajdują się poza zakresem tej pracy,

Uwzględniając potrzebę wizualizacji zaprezentowanych przykładów większość krzywych użytych w przykładach będzie krzywymi w \mathbb{E}^2 (płaszczyzna) lub w \mathbb{E}^3 (przestrzeń trzywymiarowa). Opisana teoria i schematy odnoszą się jednak do dowolnych krzywych w \mathbb{E}^n . W ostatnim rozdziale dysertacji pokażemy konkretne zastosowania dla $n = 2, 3$ oraz dla $n > 3$ (film), gdzie każda klatka filmu to punkt $q_i \in \mathbb{E}^n$ o wymiarze n - ilość pikseli.

Na potrzeby weryfikacji twierdzeń, będących częścią osiągnięć tego doktoratu, wprowadzamy następujące krzywe parametryczne regularne:

A) Spirala $\gamma_{sp} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$:

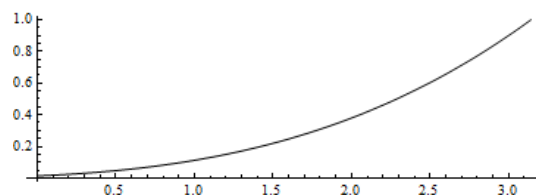
$$\gamma_{sp}(t) = ((0.2 + t) \cos(\pi(1 - t)), (0.2 + t) \sin(\pi(1 - t))). \quad (9)$$



Rys. 3. Wykres spirali γ_{sp} na płaszczyźnie, zdefiniowanej w (9).

B) Krzywa kubiczna na płaszczyźnie $\gamma_c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$:

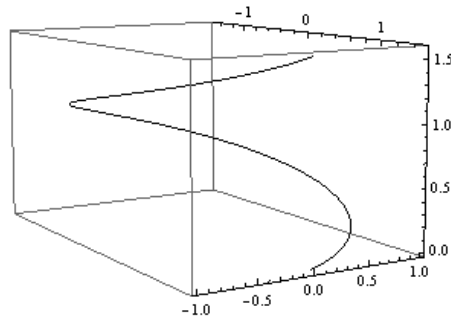
$$\gamma_c(t) = (\pi t, (\pi t + 1)^3 (\pi + 1)^{-3}). \quad (10)$$



Rys. 4. Wykres krzywej kubicznej γ_c na płaszczyźnie, zdefiniowanej w (10).

C) Helikoida kwadratowa $\gamma_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$:

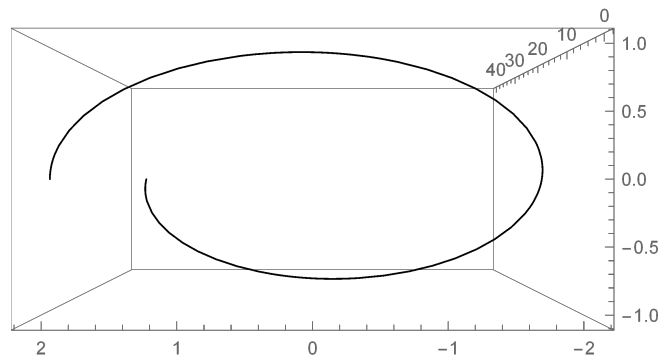
$$\gamma_h(t) = (1.5 \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 2\pi t/4). \quad (11)$$



Rys. 5. Wykres helikoidy γ_h w 3D, danej wzorem (11).

D) Kwadratowa helikoida eliptyczna $\gamma_{qh} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$:

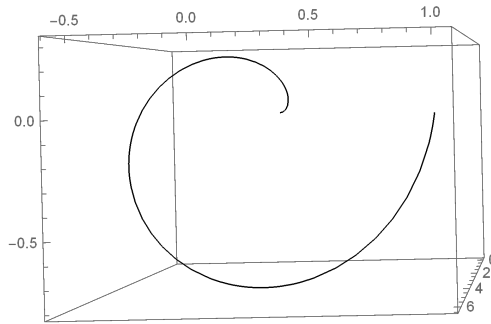
$$\gamma_{qh}(t) = (2 \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 4\pi^2 t^2). \quad (12)$$



Rys. 6. Wykres helikoidy eliptycznej γ_{qh} w 3D, zadanej wzorem (12).

E) Helikoida stożkowa $\gamma_{ch} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$:

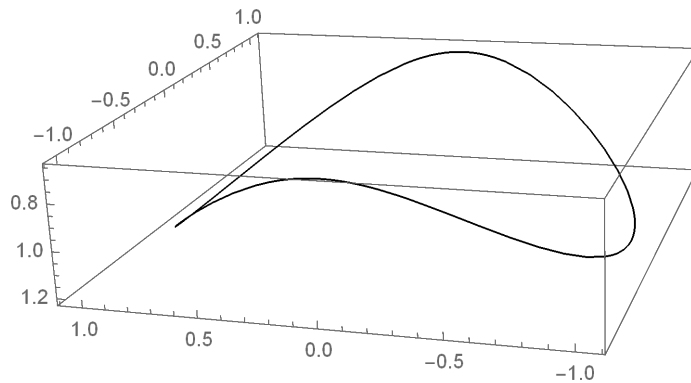
$$\gamma_{ch}(t) = (t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), 2\pi t). \quad (13)$$



Rys. 7. Wykres helikoidy stożkowej γ_{ch} w przestrzeni 3D o wzorze (13).

F) Krzywa Steinmetza $\gamma_{St} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$:

$$\gamma_{St}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \sqrt{1.2^2 - 1.0^2 \sin^2(2\pi t)}). \quad (14)$$

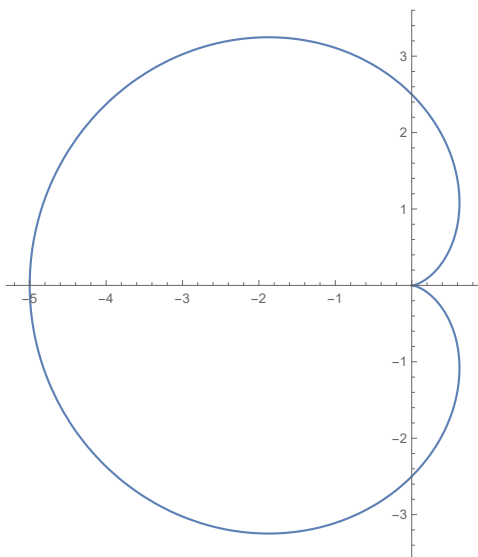


Rys. 8. Krzywa Steinmetza γ_{St} w przestrzeni 3D o wzorze (14).

W każdym z rozdziałów badamy też wpływ nieregularności krzywej na oszacowanie zbieżności trajektorii skonstruowanego interpolanta do krzywej. W tych przykładach korzystamy z następujących nieregularnych parametrycznych krzywych:

G) Cardioida $\gamma_{cd} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ wyrażona wzorem:

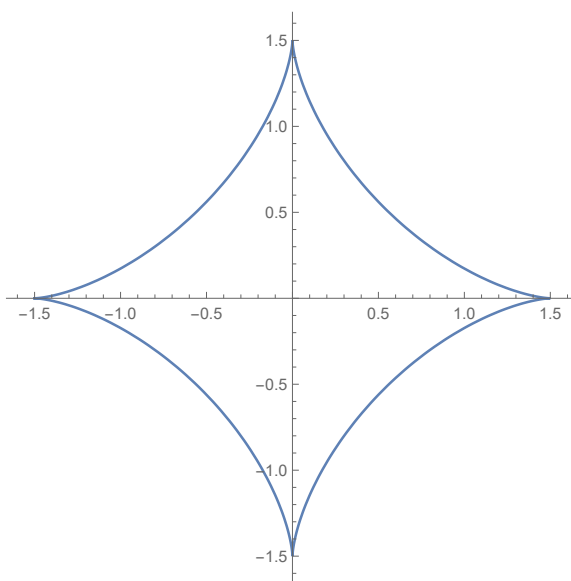
$$\gamma_{cd} = (2,5 \cos(2\pi t)(1 - \cos(2\pi t)), 2,5 \sin(2\pi t)(1 - \cos(2\pi t))) \quad (15)$$



Rys. 9. Cardioida γ_{cd} w przestrzeni 2D o wzorze (15).

H) Asteroida $\gamma_{as} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ wyrażona wzorem:

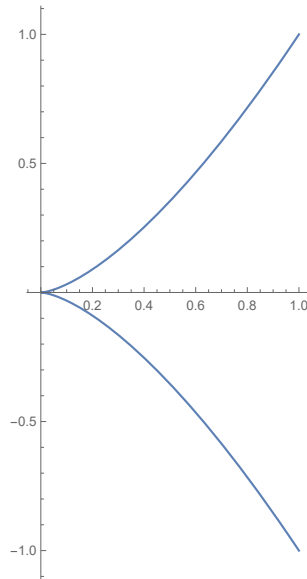
$$\gamma_{as} = (1,5(\cos(\pi t))^3, 1,5(\sin(\pi t))^3) \quad (16)$$



Rys. 10. Asteroida γ_{as} w przestrzeni 2D o wzorze (16).

I) krzywa $\gamma_{nr_1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ wyrażona wzorem:

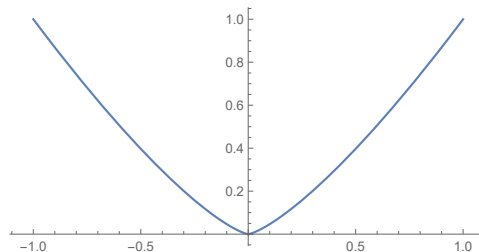
$$\gamma_{nr_1}(t) = (t^2, t^3) \quad (17)$$



Rys. 11. Krzywa nieregularna γ_{nr1} w przestrzeni 2D o wzorze (17).

J) krzywa $\gamma_{nr2} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ wyrażona wzorem:

$$\gamma_{nr2}(t) = (t^3, t^4) \quad (18)$$



Rys. 12. Krzywa nieregularna γ_{nr2} w przestrzeni 2D o wzorze (18).

2.4 Podstawowe definicje dotyczące próbkowań

W niniejszym podrozdziale wprowadzone są podstawowe definicje dotyczące próbkowania:

Definicja 2.12. Dane zredukowane Q_m to uporządkowany ciąg $m + 1$ punktów $Q_m = \{q_i\}_{i=0}^m$ z $q_i \in \mathbb{E}^n$ oraz $q_{i+1} \neq q_i^*$. Punkty Q_m otrzymywane są przez próbkowanie regularnej parametrycznej krzywej (Def. 2.10) dostatecznie gładkiej $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^n$ gdzie $\gamma(t_i) = q_i$ (gdzie $0 \leq i \leq m$) w przestrzeni Euklidesowej \mathbb{E}^n . Zakłada się brak znajomości odpowiadającego im rosnącego ciągu parametrów \mathcal{T}_m węzłów interpolacyjnych, dla których: $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m \in [0, T]^{m+1}$, $t_0 = 0$ i $t_m = T$, $\gamma(t_i) = q_i$ oraz $t_i < t_{i+1}$.

*Uwaga: Techniczne założenie iż $q_i \neq q_{i+1}$ będzie ważne potem do odgadnięcia węzłów \hat{t} tak by $\hat{t}_i < \hat{t}_{i+1}$. Rozrzut węzłów t_i nie jest dowolny nawet dla danych niezredukowanych z punktu osiągnięcia celu jakim jest zbieżność $\hat{\gamma}(t) \approx \gamma(t)$ dla $m \rightarrow \infty$. I tak na przykład jeśli żaden z węzłów nie leży w przedziale $(0, \frac{T}{2})$ zadanie interpolacyjne czyli znalezienie funkcji interpolującej dopasowanej do punktów jest możliwe, ale nie daje szans na zbieżność do γ . Formuły interpolacyjne na $\hat{\gamma}$ zależą od q_i oraz \hat{t}_i . Oznacza to, że wybór \hat{t}_i będzie miał wpływ na $\hat{\gamma}$ i jej trajektorię. Powstaje zasadnicze pytanie jak dobrać \hat{t}_i by w normie $\|\cdot\|$ z $m \rightarrow \infty$ $\hat{\gamma}(\hat{t})$ (gdzie $\hat{t} \in [0, \hat{T}]$) przybliżało $\gamma(t)$ i by zbieżność $\hat{\gamma}(t) \rightarrow \gamma(t)$ była jak "najszybsza" (precyzyjne definicje zostaną podane niżej).

W tym celu musimy wprowadzić podstawowe pojęcia dające możliwość nie tylko uzyskania zbieżności, ale także określenia jej prędkości:

Definicja 2.13. *Próbkowanie $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m$ jest dopuszczalne, gdy uporządkowana rodzina węzłów interpolacyjnych $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = T$, spełnia następujący warunek:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m \rightarrow 0^+, \text{ gdzie } \delta_m = \max_{1 \leq i \leq m} \{t_i - t_{i-1} : i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (19)$$

W niniejszej pracy doktorskiej rozważana jest również podrodzina próbkowań dopuszczalnych o tzw. rozkładzie węzłów \mathcal{T}_m *mniej lub bardziej równomiernym* oraz jej podrodzina próbkowań *równomiernych* i podrodzina o rozkładzie tzw. β_0 -*mniej lub bardziej równomiernym* (patrz także [30]):

Definicja 2.14. *Próbkowanie $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m$ jest mniej lub bardziej równomierne, jeśli dla pewnych stałych $0 < K_l \leq K_u$ (niezależnych od m) i wystarczająco dużych m (tj. $\exists m_0 \forall m \geq m_0$) zachodzi następująca nierówność:*

$$\frac{K_l}{m} \leq t_i - t_{i-1} \leq \frac{K_u}{m} \quad (20)$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, m$. W przypadku, gdy $K_l = K_u$ to takie próbkowanie nazywa się *równomiernym*.

Zauważmy, że można zdefiniować równoważnie próbkowanie *mniej lub bardziej równomierne*:

Definicja 2.15. *Próbkowanie jest mniej lub bardziej równomierne jeśli istnieje stała $0 < \beta \leq 1$ spełniająca $\beta \delta_m \leq t_i - t_{i-1} \leq \delta_m$, dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, m$.*

Warto tutaj przytoczyć ważną konsekwencję tego zapisu, wielokrotnie używaną w dowodach twierdzeń:

$$\beta^\rho \delta_m^\rho \geq (t_i - t_{i-1})^\rho \geq \delta_m^\rho, \text{ gdzie } \rho < 0 \implies (t_i - t_{i-1})^\rho = O(\delta_m^\rho) \quad (21)$$

Do badania warunków na istnienie parametryzacji wprowadzamy podrodzinę \mathcal{T}_{β_0} próbkowania mniej lub bardziej równomiernego.

Definicja 2.16. *Jest to zbiór próbkowań β_0 -mniej lub bardziej równomiernych, jeśli dla każdego reprezentanta jest ustalone $0 < \beta_0 \leq 1$ spełniające $\beta_0 \leq \beta \leq 1$ oraz*

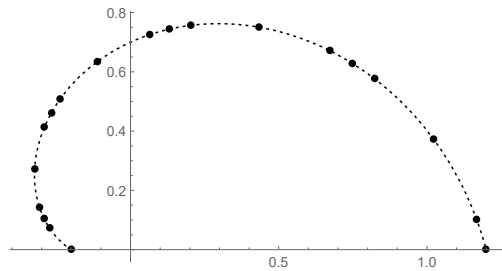
$$\frac{\beta_0}{m} \leq t_i - t_{i-1} \leq \frac{\beta}{m}, \quad (22)$$

W eksperymentach opisanych w tej pracy zostały użyte, do wygenerowania danych zredukowanych Q_m , następujący reprezentanci mniej lub bardziej równomiernych próbkowań:

- Pierwszą rodziną $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m$ jest próbkowanie - patrz Rys. 13:

$$t_i = \begin{cases} \frac{i}{m} + \frac{1}{2m}, & \text{dla } i = 4k + 1, \\ \frac{i}{m} - \frac{1}{2m}, & \text{dla } i = 4k + 3, \\ \frac{i}{m}, & \text{dla } i = 2k, \end{cases} \quad (23)$$

z $K_l = \frac{1}{2}$, $K_u = \frac{3}{2}$ i $\beta = \frac{1}{3}$ (patrz Def. 2.14).

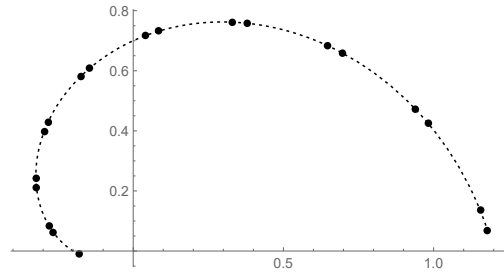


Rys. 13. Rozkład $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania (23) na przykładowej krzywej spiralnej γ_{sp} dla $m = 18$.

- Drugie próbkowanie (patrz Rys. 14) jest definiowane jako:

$$t_i = \frac{i}{m} + \frac{(-1)^{i+1}}{3m}, \quad (24)$$

gdzie $K_l = \frac{1}{3}$, $K_u = \frac{5}{3}$ i $\beta = \frac{1}{5}$.

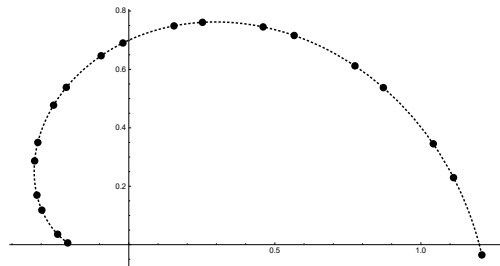


Rys. 14. Rozkład punktów $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania (24) na krzywej spiralnej γ_{sp} dla $m = 18$.

- Trzeci reprezentant - szczególny przypadek poprzedniego próbkowania - (patrz Rys. 15):

$$t_i = \frac{i}{m} + \frac{(-1)^i}{6m}, \quad (25)$$

dla którego $K_l = \frac{2}{3}$, $K_u = \frac{4}{3}$ i $\beta = \frac{1}{2}$.

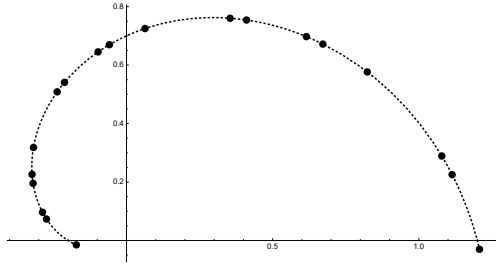


Rys. 15. Rozkład punktów interpolacyjnych dla próbkowania (25) na krzywej spiralnej γ_{sp} dla $m = 18$.

- Kolejne próbkowanie (patrz Rys. 16) to:

$$t_i = \begin{cases} \frac{i}{m} + \frac{1}{2m}, & \text{dla } i = 5k + 1; \\ \frac{i}{m} - \frac{1}{7m}, & \text{dla } i = 5k + 2; \\ \frac{i}{m} + \frac{1}{7m}, & \text{dla } i = 5k + 3; \\ \frac{i}{m} - \frac{1}{2m}, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \quad (26)$$

gdzie $K_l = \frac{5}{14}$, $K_u = 2$ i $\beta = \frac{5}{28} \approx 0,179$.

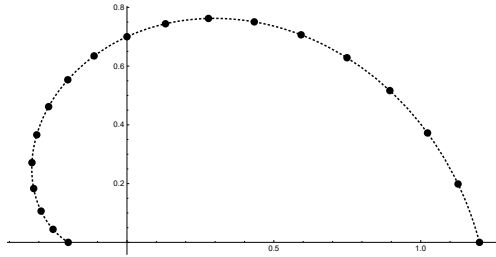


Rys. 16. Rozkład $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania (26) na krzywej spiralnej γ_{sp} dla $m = 18$.

- Ostatnie próbkowanie to równomierne odcinki na przedziale $[0, 1]$:

$$t_i = \frac{i}{m}, \quad (27)$$

w którym $K_l = K_u = 1, \beta = 1$.



Rys. 17. Rozkład punktów $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania (27) na krzywej spiralnej γ_{sp} dla $m = 18$.

Do przeprowadzenia weryfikacji tezy o konieczności stosowania próbkowania mniej lub bardziej równomiernego dla utrzymania przewidywanych rzędów zbieżności wprowadzono dwa rodzaje próbkowań nie mniej lub bardziej równomiernych (tj. nie spełniających warunku z Def. 2.14)

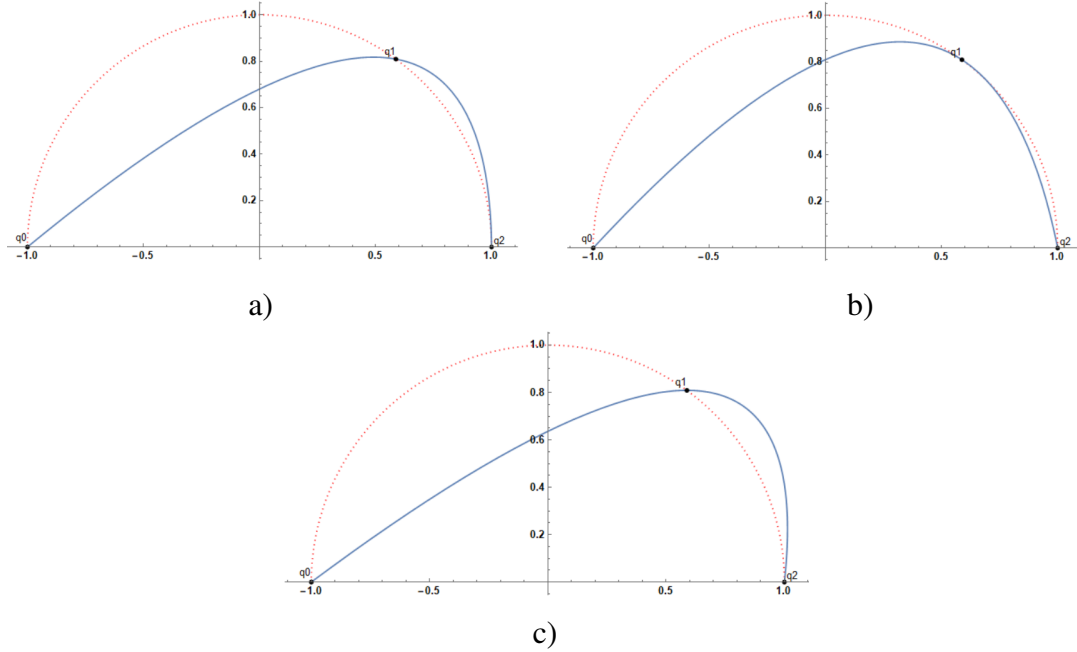
$$t_m = \begin{cases} 0, & \text{dla } i=0, \\ \frac{(i-1)(\sqrt{m}-1)}{(m-1)\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}}, & \text{dla pozostałych } i. \end{cases} \quad (28)$$

oraz

$$t_m = \begin{cases} \frac{i}{m}, & \text{dla } i=2k, \\ \frac{i-1}{m} + \frac{1}{m^2}, & \text{dla pozostałych } i. \end{cases} \quad (29)$$

2.5 Parametryzacja wykładnicza

W przypadku nieznajomości \mathcal{T}_m wybór $\hat{\mathcal{T}}_m = \{\hat{t}_i\}_{i=1}^m$ ma wpływ na trajektorię $\hat{\gamma}(\hat{t})$. Rys. 18 ilustruje jak wybór węzłów wpływa na dopasowanie interpolanta $\hat{\gamma}$ do krzywej γ . W przypadku interpolacji nieparametrycznej nieznane węzły \mathcal{T}_m należy zastąpić $\hat{\mathcal{T}}_m$ tak, by



Rys. 18. Półokrąg $\gamma_o(t) = \{\cos(\pi(1-t)), \sin(\pi(1-t))\}$ wraz z $Q_2 = \{(-1;0), (0,588;0,809), (1;0)\}$ próbkowany węzłami a) $\hat{t} = \{0; 1,189; 2,161\}$ i $\lambda = 0,3$, b) $\hat{t} = \{0; 1,682; 2,599\}$ i $\lambda = 0,9$, c) $\hat{t} = \{0; 1; 2\}$ i $\lambda = 0$ dopasowany przez interpolanta kwadratowego Lagrange'a zbudowanego na węzłach \hat{t} .

wykorzystać geometrię rozrzutu Q_m (wykorzystując w ten sposób informację zakodowaną w zredukowanych danych Q_m). Jednym z możliwych takich wyborów (patrz [18]) jest parametryzacja wykładnicza, której szczególnym przypadkiem jest parametryzacja długością cięciwy ($\lambda = 1$). Parametryzacja wykładnicza jest zdefiniowana następująco:

Definicja 2.17. Dla danych zredukowanych Q_m węzły interpolacyjne $\hat{\mathcal{T}}_m^\lambda = \{\hat{t}_i^\lambda\}_{i=0}^m$ generowane są zgodnie z tzw. parametryzacją wykładniczą, gdy (patrz także [18]):

$$\hat{t}_0^\lambda = 0 \quad \text{oraz} \quad \hat{t}_i^\lambda = \hat{t}_{i-1}^\lambda + \|q_i - q_{i-1}\|^\lambda, \quad (30)$$

$i = 1, 2, \dots, m$ oraz $\lambda \in [0, 1]$. Wprowadźmy też oznaczenie $\hat{T} = \sum_{i=0}^{m-1} \|q_{i+1} - q_i\|^\lambda$.

W parametryzacji (30) można wyróżnić trzy szczególne przypadki:

- dla $\lambda = 0$ wzór (30) reprezentuje rozkład równomierny węzłów $\hat{t}_i^0 = i$,

- dla $\lambda = 1$ wzór (30) generuje parametryzację skumulowanej długości cięciwy (patrz [18] lub [31]):

$$\hat{t}_i^1 = \hat{t}_{i-1}^1 + \|q_i - q_{i-1}\|, \quad (31)$$

- dla $\lambda = \frac{1}{2}$ wzór (30) generuje tzw. parametryzację dośrodkową:

$$\hat{t}_i^{\frac{1}{2}} = \hat{t}_{i-1}^{\frac{1}{2}} + \|q_i - q_{i-1}\|^{\frac{1}{2}}. \quad (32)$$

Zauważmy, iż przy parametryzacji wykładniczej wykorzystuje się założenie $q_i \neq q_{i+1}$ by zapewnić $\hat{t}_i < \hat{t}_{i+1}$.

2.6 Schematy interpolacyjne

W oparciu o punkty interpolacyjne Q_m (i/lub węzły interpolacyjne \mathcal{T}_m) oraz korzystając ewentualnie z dodatkowych informacji (np. zadane pochodne $\dot{\gamma}(t_i)$ w \mathcal{T}_m lub np. znajomość brzegowych prędkości $\dot{\gamma}(t_0)$ i $\dot{\gamma}(t_m)$ lub brzegowych przyśpieszeń $\ddot{\gamma}(t_0)$ i $\ddot{\gamma}(t_m)$) można zdefiniować różne schematy interpolacyjne. Będą one pokrótce omówione w następnych podsekcjach.

2.6.1 Formuła interpolacyjna Newtona

Ogólny wzór Newtona pozwala skonstruować interpolacyjne wzory na $\tilde{\gamma}$ (lub na $\hat{\gamma}$) korzystając z zadanych \mathcal{T}_m (lub $\hat{\mathcal{T}}_m$) oraz punktów Q_m . Formuła Newtona zdefiniowana jest w terminach różnic dzielonych kolejnych rzędów (patrz [24]). Przypomnijmy dwie definicje pomocnicze o zgodności i różnicach dzielonych funkcji:

Definicja 2.18. Niech $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_1^m$ będzie sekwencją węzłów niekoniecznie różnych. Funkcja f jest zgodna z funkcją g w \mathcal{T}_m jeśli dla każdego węzła ζ , który pojawia się m razy w sekwencji t_1, \dots, t_m obie f i g zgadzają się m -krotnie w ζ , tj.

$$f^{(i-1)}(\zeta) = g^{(i-1)}(\zeta) \text{ dla } i = 1, \dots, m, \quad (33)$$

Definicja 2.19. Wybieramy dwa węzły t_w i t_s w sekwencji t_i, \dots, t_{i+k} . Gdy te dwa węzły się pokrywają i jeśli $g \in C^{(k)}$ wtedy istnieje punkt t_j w najmniejszym przedziale zawierającym t_i, \dots, t_{i+k} taki, że różnica dzielona rzędu k funkcji g jest równa:

$$g[t_w, \dots, t_s] = \frac{g^{(k)}(t_j)}{k!}, \text{ gdy } t_w = t_s \quad (34)$$

W przypadku gdy istnieją jakieś dwa różne węzły t_w i t_s w sekwencji t_i, \dots, t_{i+k} wtedy różnicę dzieloną zapiszemy:

$$g[t_i, \dots, t_{i+k}] = \frac{g[t_i, \dots, t_{w-1}, t_{w+1}, \dots, t_{i+k}] - g[t_i, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_{i+k}]}{t_s - t_w}, \text{ jeśli } t_w \neq t_s. \quad (35)$$

oraz $g[t_i] = g(t_i)$

Definicja 2.20. Postać Newtona wielomianu $\tilde{\gamma}_m$ stopnia m zgodnego z γ w punktach t_1, \dots, t_m

$$\tilde{\gamma}_m(t) = \gamma(t_1) + (t - t_1)\gamma[t_1, t_2] + (t - t_1)(t - t_2)\gamma[t_1, t_2, t_3] + \dots + (t - t_1) \dots (t - t_{m-1})\gamma[t_1, \dots, t_m] \quad (36)$$

Wzór Newtona pozwala nam generować różne interpolanty, w tym sklejące.

Przykład 1. Wzór Newtona - wielomian kwadratowy $\tilde{\gamma}_2 : [t_i, t_{i+2}] \rightarrow \mathbb{E}^n$

Interpolacyjny wzór Newtona na wielomian kwadratowy $\tilde{\gamma}_2 : [t_i, t_{i+2}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ zbudowany w oparciu o różne węzły $\{t_i, t_{i+1}, t_{i+2}\}$ i znane $\tilde{\gamma}_2(t_k) = q_k$ z $k = i, i+1, i+2$ zapiszemy jako:

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2[t_i] + \tilde{\gamma}_2[t_i, t_{i+1}](t - t_i) + \tilde{\gamma}_2[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t - t_i)(t - t_{i+1}). \quad (37)$$

Przykład 2. Wzór Newtona - wielomian kubiczny $\tilde{\gamma}_3 : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ Interpolacyjny wzór Newtona na wielomian kubiczny $\tilde{\gamma}_3 : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ zbudowany na różnych węzłach $\{t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}\}$ i wartościach funkcji $\tilde{\gamma}_3(t_k) = q_k$ (gdzie $k = i, i+1, i+2, i+3$) w tych węzłach można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_3(t) = & q_i + \tilde{\gamma}_3[t_i, t_{i+1}](t - t_i) + \tilde{\gamma}_3[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t - t_i)(t - t_{i+1}) \\ & + \tilde{\gamma}_3[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}](t - t_i)(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}). \end{aligned} \quad (38)$$

Przykład 3. Wzór Newtona - przypadek, gdy znamy prędkość. Szczególnym przypadkiem wzoru Newtona jest sytuacja, kiedy dla dwóch węzłów t_i i t_{i+1} mamy dane nie tylko wartości funkcji $\tilde{\gamma}_3(t_i) = q_i$ i $\tilde{\gamma}_3(t_{i+1}) = q_{i+1}$, ale też wartości pierwszej pochodnej. W przełożeniu

na rzeczywistą sytuację możliwe jest interpolowanie innej pozycji obiektu bazując na jego pozycjach wejściowych: $\tilde{\gamma}_3(t_i) = q_i$ i $\tilde{\gamma}_3(t_{i+1}) = q_{i+1}$, prędkości: $\dot{\tilde{\gamma}}_3(t_i) = v_i$ i $\dot{\tilde{\gamma}}_3(t_{i+1}) = v_{i+1}$, w konkretnych węzłach t_i i t_{i+1} .

Wzór poniższy jest wyprowadzany na podstawie wzorów z Def. 2.19.

$$\tilde{\gamma}_3(t) = q_i + \tilde{\gamma}_3[t_i, t_i](t - t_i) + \tilde{\gamma}_3[t_i, t_i, t_{i+1}](t - t_i)^2 + \tilde{\gamma}_3[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t - t_i)^2(t - t_{i+1}) \quad (39)$$

i dalej wstawiając nasze dane do wzorów na odpowiednie różnice dzielone :

$$\tilde{\gamma}_3(t) = q_i + v_i(t - t_i) + \frac{\tilde{\gamma}_3[t_i, t_{i+1}] - v_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i)^2 + \frac{v_{i+1} - 2\tilde{\gamma}_3[t_i, t_{i+1}] + v_i}{(t_{i+1} - t_i)^2}(t - t_i)^2(t - t_{i+1}). \quad (40)$$

Ogólny wzór Newtona można w wyniku uproszczeń algebraicznych sprowadzić do wzoru Lagrange'a.

2.6.2 Schemat interpolacyjny Lagrange'a

Wzór interpolacyjny Lagrange'a dla wielomianu stopnia m jest zdefiniowany następująco (patrz [2]):

Definicja 2.21. Wzór interpolacyjny Lagrange'a Niech $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_0^m$ będą sekwencją $m+1$ różnych węzłów ($t_i, t_i < t_{i+1}$) oraz niech

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m \frac{t - t_j}{t_i - t_j}. \quad (41)$$

wtedy istnieje dokładnie jeden wielomian $\tilde{\gamma}_m \in \Pi_{< m}^1$, dla którego mamy dane punkty interpolacyjne $\tilde{\gamma}_m(t_i) = q_i, i = 0, \dots, m$, a który może być wyrażony wzorem Lagrange'a:

$$p(t) = \sum_{i=0}^m \tilde{\gamma}_m(t_i) l_i(t). \quad (42)$$

Wzór ten jest inną reprezentacją wzoru Newtona:

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t_0) + \tilde{\gamma}[t_0, t_1](t - t_0) + \dots + \tilde{\gamma}[t_0, t_1, \dots, t_m](t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_m).$$

W niniejszej pracy doktorskiej skupimy się na wielomianach stopnia $r = 2, 3$, a więc zbudowanych na wybranych (tj. określony numer przedziału np. $i = 0$) kolejnych węzłach

¹ $\Pi_{< m}$ to przestrzeń wielomianów stopnia m

$[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]$ dla $r = 2$ lub $[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]$ dla $r = 3$. Dla szczególnego przypadku $r = 2$, wielomian $\tilde{\gamma}_2(t)$ ze wzoru (42) jest zdefiniowany jak poniżej:

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(t_i)l_i(t) + \tilde{\gamma}_2(t_{i+1})l_{i+1}(t) + \tilde{\gamma}_2(t_{i+2})l_{i+2}(t), \quad (43)$$

gdzie poszczególne $l_k(t)$ (gdzie $k = i, i + 1, i + 2$):

$$l_i(t) = \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} \frac{t - t_{i+2}}{t_i - t_{i+2}}, \quad l_{i+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \frac{t - t_{i+2}}{t_{i+1} - t_{i+2}}, \quad l_{i+2}(t) = \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}} \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i}. \quad (44)$$

Dla $r = 3$ wzór (42) jest następujący:

$$\tilde{\gamma}_3(t) = \tilde{\gamma}_3(t_i)l_i(t) + \tilde{\gamma}_3(t_{i+1})l_{i+1}(t) + \tilde{\gamma}_3(t_{i+2})l_{i+2}(t) + \tilde{\gamma}_3(t_{i+3})l_{i+3}(t), \quad (45)$$

gdzie poszczególne $l_k(t)$ (gdzie $k = i, i + 1, i + 2, i + 3$): zdefiniowane są jako:

$$l_i(t) = \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} \frac{t - t_{i+2}}{t_i - t_{i+2}} \frac{t - t_{i+3}}{t_i - t_{i+3}}, \quad l_{i+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \frac{t - t_{i+2}}{t_{i+1} - t_{i+2}} \frac{t - t_{i+3}}{t_{i+1} - t_{i+3}}$$

$$l_{i+2}(t) = \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}} \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i} \frac{t - t_{i+3}}{t_{i+2} - t_{i+3}}, \quad l_{i+3}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+3} - t_i} \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+3} - t_{i+1}} \frac{t - t_{i+2}}{t_{i+3} - t_{i+2}}.$$

Wielomian (45) jest tożsamy z wielomianem kubicznym zapisanym wzorem Newtona (38).

Wzory (37) i (43) (oraz (38) i (45)) wyrażają te same interpolanty kwadratowe (kubiczne).

W przypadku danych $(\hat{\mathcal{T}}_m, Q_m)$ (tj. interpolacji nieparametrycznej) konstrukcja wielomianu $\hat{\gamma}(\hat{t})$ jest analogiczna jak dla $\tilde{\gamma}(t)$.

2.6.3 Schemat interpolacyjny Hermita

Interpolacja Hermite'a, zwana również interpolacją z węzłami wielokrotnymi, polega na poszukiwaniu wielomianu p możliwie najniższego stopnia r , w naszej pracy jest to $r = 3$, który w parami różnych węzłach $[t_k, t_{k+1}]$ ze zbioru $\mathcal{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m$ ma dane nie tylko wartości pewnej funkcji q_k , ale i wartości jej pochodnych: v_k . W prostym wariancie takiej interpolacji dla wielomianu kubicznego uwzględnia się wartości funkcji $\{p(t_k) = q_k, p(t_{k+1}) = q_{k+1}\}$ i wartości jej pierwszej pochodnej $\{v_k, v_{k+1}\}$ w dwóch punktach $\{t_k, t_{k+1}\}$. Przy takich założeniach można zapisać wielomian $\tilde{\gamma}_3(t)$ jako:

$$\tilde{\gamma}_3(t) = \tilde{\gamma}_3(t_k) + (t - t_k)\tilde{\gamma}_3[t_k, t_k] + (t - t_k)^2\tilde{\gamma}_3[t_k, t_k, t_{k+1}] + (t - t_k)^2(t - t_{k+1})\tilde{\gamma}_3[t_k, t_k, t_{k+1}, t_{k+1}], \quad (46)$$

Pierwsza i druga pochodna funkcji $\tilde{\gamma}_3(t)$ wyrażają się wzorem:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\gamma}}_3(t) &= \tilde{\gamma}_3[t_k, t_k] + 2(t - t_k)\tilde{\gamma}_3[t_k, t_k, t_{k+1}] + [2(t - t_k)(t - t_{k+1}) + (t - t_k)^2]\tilde{\gamma}_3[t_k, t_k, t_{k+1}, t_{k+1}], \\ \ddot{\tilde{\gamma}}_3(t) &= 2\tilde{\gamma}_3[t_k, t_k, t_{k+1}] + [2(t - t_{k+1}) + 2(t - t_k) + 2(t - t_k)]\tilde{\gamma}_3[t_k, t_k, t_{k+1}, t_{k+1}].\end{aligned}\tag{47}$$

Jeśli zaś rozpatrzmy postać ogólną wielomianu kubicznego Hermita tj. $\tilde{\gamma}_3(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ przechodzącego przez punkty $\{t_k, t_{k+1}\}$ dla $k = 0, \dots, m - 1$ to jego współczynniki opisane są wzorami:

$$\begin{aligned}a &= -\frac{-t_k v_k + t_{k+1} v_k - t_k v_{k+1} + t_{k+1} v_{k+1} + 2q_k - 2q_{k+1}}{(t_k - t_{k+1})^3}, \\ b &= -\frac{t_k^2 v_k + 2t_k^2 v_{k+1} + t_{k+1} t_k v_k - t_{k+1} t_k v_{k+1} - 2t_{k+1}^2 v_k - t_{k+1}^2 v_{k+1} - 3q_k t_k + 3q_{k+1} t_k - 3q_k t_{k+1} + 3q_{k+1} t_{k+1}}{(t_k - t_{k+1})^3}, \\ c &= -\frac{-v_{k+1} t_k^3 - 2t_{k+1} t_k^2 v_k - t_{k+1} t_k^2 v_{k+1} + t_{k+1}^2 t_k v_k + 2t_{k+1}^2 t_k v_{k+1} + t_{k+1}^3 v_k + 6q_k t_{k+1} t_k - 6q_{k+1} t_{k+1} t_k}{(t_k - t_{k+1})^3}, \\ d &= -\frac{t_{k+1} t_k^3 v_{k+1} + t_{k+1}^2 t_k^2 v_k - t_{k+1}^2 t_k^2 v_{k+1} - t_{k+1}^3 t_k v_k - q_{k+1} t_k^3 + 3q_{k+1} t_{k+1} t_k^2 - 3q_k t_{k+1}^2 t_k + q_k t_{k+1}^3}{(t_k - t_{k+1})^3}.\end{aligned}\tag{48}$$

2.6.4 Schemat interpolacyjny dla funkcji sklepanych

W przeciwieństwie do metod interpolacyjnych opisanych wcześniej, gdzie istnieje jeden globalny wielomian dla całego przedziału interpolacji, tutaj opisane są funkcje zdefiniowane jako wielomiany niskiego stopnia osobno dla każdego odcinka pomiędzy sąsiednimi węzłami interpolacyjnymi i następnie sklepane jako jedna funkcja na przedziale $[t_0, t_m]$. Te lokalne wielomiany są tak dobrane, aby – oprócz warunków interpolacji – spełniać warunki sklejenia w taki sposób, aby funkcja interpolacyjna definiowała funkcję o odpowiedniej regularności.

Kubiczne funkcje sklepane Lagrange'a Mając dane punkty interpolacyjne $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$ razem z $a = t_0, t_1, \dots, t_m = b$ można skonstruować kawałkami kubiczny interpolant $\tilde{\gamma}_{3,i}$, który na każdym przedziale $[t_i, t_{i+3}]$ jest zgodny (patrz Def. 2.18) z funkcją $\gamma(t)$ i spełnia warunki:

$$\tilde{\gamma}_{3,i}(t_i) = \gamma(t_i), \quad \tilde{\gamma}_{3,i}(t_{i+1}) = \gamma(t_{i+1}), \quad \tilde{\gamma}_{3,i}(t_{i+2}) = \gamma(t_{i+2}), \quad \tilde{\gamma}_{3,i}(t_{i+3}) = \gamma(t_{i+3}), \quad \text{gdzie } i = 0, \dots, \frac{m}{3}.\tag{49}$$

Dany interpolant w punktach sklejania t_i i t_{i+3} jest tylko klasy C^0 a jego wzór na każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+3}]$ zapisujemy zgodnie z (38). Interpolant określony na całym przedziale $[t_0, t_m]$ na podstawie (2.3) to $\tilde{\gamma}_3(t) = \sum_{i=0}^{m/3} \tilde{\gamma}_{3,i}(t)$

Kubiczne funkcje sklepane Hermita Mając dane $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$ razem z $a = t_0, t_1, \dots, t_m = b$ można skonstruować kawałkami kubiczny interpolant $\tilde{\gamma}_{3,i}$, który na każdym przedziale $[t_i, t_{i+1}]$ jest zgodny (patrz Def. 2.18) z funkcją $\gamma(t)$ i spełnia warunki:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{3,i}(t_i) &= \gamma(t_i), & \tilde{\gamma}_{3,i}(t_{i+1}) &= \gamma(t_{i+1}), \\ \dot{\tilde{\gamma}}_{3,i}(t_i) &= v_i, & \dot{\tilde{\gamma}}_{3,i}(t_{i+1}) &= v_{i+1}, \text{ gdzie } i = 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (50)$$

Interpolant $\tilde{\gamma}$ jest klasy $C^1([a, b])$ w węzłach t_i (C^∞ poza tym) czyli jest ciągły i ma ciągłą pierwszą pochodną na $[a, b]$ bez względu na wybór prędkości $\{v_i\}_{i=1}^m$. Alternatywny do (46) wzór Newtona dla $\tilde{\gamma}_i(t)$ można wyrazić jako:

$$\tilde{\gamma}_i(t) = c_{1,i} + c_{2,i}(t - t_i) + c_{3,i}(t - t_i)^2 + c_{4,i}(t - t_i)^3 \quad (51)$$

gdzie współczynniki $c_{1,i}, c_{2,i}, c_{3,i}, c_{4,i}$ wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} c_{1,i} &= q_i, & c_{2,i} &= v_i, \\ c_{3,i} &= \frac{q_{i+1} - q_i - v_i \Delta t_i}{\Delta t_i} - c_{4,i} \Delta t_i, & c_{4,i} &= \frac{v_i + v_{i+1} - 2 \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i}}{(\Delta t_i)^2}, \text{ gdzie } \Delta t_i = t_{i+1} - t_i \end{aligned} \quad (52)$$

Interpolant ten na całym przedziale $[t_0, t_m]$ można zapisać na podstawie (2.3) jako $\tilde{\gamma}_3(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{\gamma}_{3,i}(t)$

Kubiczne funkcje sklepane klasy C^2 - Splajny Przejdziemy teraz do splajnow klasy C^2 tj. tych, które są dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły w punktach sklejania.

Definicja 2.22. *Rozważmy układ m punktów interpolacyjnych $\{(t_0, q_0), (t_1, q_1), \dots, (t_{m-1}, q_{m-1})\}$, gdzie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} = b$. Splajnem kubicznym ([32]) $\gamma^S = \gamma^S(t)$ nazywamy funkcje określoną na przedziale $[a, b]$ i taką, że:*

1. $\gamma^S(t) \in C^2([a, b])$, tj. jest ona ciągła wraz z pierwszą i drugą pochodną na $[a, b]$,
2. $\gamma_k^S(t) := \gamma^S(t)|_{[t_k, t_{k+1}]} = a_{k,3}t^3 + a_{k,2}t^2 + a_{k,1}t + a_{k,0}$, $k = 0, \dots, m-2$, tj. wewnątrz każdego

podprzedziału funkcja ta jest pewnym wielomianem 3-ego stopnia (alternatywny wzór stosowany w tej pracy podano poniżej),

3. Dla każdego węzła funkcja $\gamma^S(t)$ spełnia warunki interpolacji tj. $\gamma^S(t_k)=q_k$, gdzie $k=0, \dots, m-1$.

Dodatkowo splajn spełnia warunki sklejania zapewniające jego założoną regularność:

$$\begin{cases} \gamma_{k-1}^S(t_k) = \gamma_k^S(t_k) \\ \dot{\gamma}_{k-1}^S(t_k) = \dot{\gamma}_k^S(t_k) \\ \ddot{\gamma}_{k-1}^S(t_k) = \ddot{\gamma}_k^S(t_k), \text{ tj. w węzłach wewnętrznych, gdy } k = 1, \dots, m-2. \end{cases} \quad (53)$$

Wolne parametry v_2, \dots, v_{m-2} są obliczane z warunku ciągłości drugiej pochodnej interpolanta tj.: $\ddot{\gamma}_{i-1}^S(t_i) = \ddot{\gamma}_i^S(t_i)$. Po uproszczeniu prowadzi to do układu równań i możliwości wyznaczenia tych parametrów, a mianowicie:

$$v_{i-1}\Delta t_i + 2v_i(\Delta t_{i-1} + \Delta t_i) + v_{i+1}\Delta t_{i-1} = b_i, \quad (54)$$

gdzie $b_i = 3(\Delta t_i \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta t_{i-1}} + \Delta t_{i-1} \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i})$. Warunek zapewnia gładkość w miejscach połączeń funkcji sklejanych. W zależności jak zostaną wybrane wartości początkowe: v_1 i v_m można wyróżnić opisane w tej pracy: splajn zupełny (gdy $v_1 = \dot{\gamma}(t_1)$ i $v_m = \dot{\gamma}(t_m)$) oraz splajn naturalny (gdy $\dot{\gamma}^S(t_1) = \dot{\gamma}^S(t_m)=0$). Ogólny wzór na splajna kubicznego $\gamma_{3,i}^S: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ podany jest we wzorze (51), a jego pochodne spełniają:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{3,i}^S(t) &= c_{2,i} + 2c_{3,i}(t - t_i) + 3c_{4,i}(t - t_i)^2, \\ \ddot{\gamma}_{3,i}^S(t) &= 2c_{3,i} + 6c_{4,i}(t - t_i), \\ \dddot{\gamma}_{3,i}^S(t) &= 6c_{4,i}. \end{aligned} \quad (55)$$

Współczynniki splajna $c_{k,i}$ (z $k = 1, 2, 3, 4$) (z $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$) zostały podane we wzorze (52).

W związku z tym, wzory na pochodne zależne od v_i to:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{3,i}^S(t) &= v_i + 2\left[3\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i} - 2v_i - v_{i+1}\right]\frac{t - t_i}{\Delta t_i} + 3[\vec{v}_i + \vec{v}_{i+1} - 2\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i}]\left(\frac{t - t_i}{\Delta t_i}\right)^2, \\ \ddot{\gamma}_{3,i}^S(t) &= \frac{6\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i} - 4v_i - 2v_{i+1}}{\Delta t_i} + 6\frac{v_i + v_{i+1} - 2\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i}}{\Delta t_i}\frac{t - t_i}{\Delta t_i}, \\ \dddot{\gamma}_{3,i}^S(t) &= 6\frac{v_i + v_{i+1} - 2\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i}}{(\Delta t_i)^2}. \end{aligned} \quad (56)$$

2.7 Ocena zbieżności schematu interpolacyjnego

W przypadku każdego ze schematów interpolacyjnych o jego dokładności decyduje błąd (patrz Def. 2.23) oszacowania pomiędzy zadaną krzywą a jej interpolantem. W szczególności interesuje nas czy ten błąd zbiega do 0 dla $m \rightarrow \infty$. Ponadto ważny jest też rząd zbieżności określający "szybkość" zbieżności.

Wprowadzamy teraz formalne definicje potrzebne do precyzyjnej odpowiedzi na powyższe pytanie. Niech $(V, \|\cdot\|)$ oznacza dowolną unormowaną przestrzeń i $V^\infty = \prod_{m=1}^\infty V_m$ reprezentuje produkt prosty (reprezentujący przestrzeń liniową), wtedy dla każdego odwzorowania $G: \mathcal{S}_0 \rightarrow V^\infty$ ze zbioru dopuszczalnych próbkowań (patrz Def. 2.13) na V^∞ jest $G(\mathcal{S}) = (c_1, c_2, \dots, c_m, \dots) = \{c_m\}_{m=1}^\infty \in V^\infty$. Następująca definicja zbieżności dla schematu interpolacji nieparametrycznej i parametrycznej określa prędkość zbieżności interpolanta do nieznannej krzywej (patrz [24], [30] lub [33]):

Definicja 2.23. Ciąg $\{c_m\}_{m=1}^\infty$ jest określony jako rzędu $O(\delta_m^\alpha)$ (zobacz (19)), gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ (oznaczone jako $c_m = O(\delta_m^\alpha)$), jeśli istnieje stała $K > 0$ taka, że dla pewnego $\bar{\delta} > 0$ i wszystkich $\delta_m \in (0, \bar{\delta})$ zachodzi następująca nierówność $\|c_m\|_\infty < K\delta_m^\alpha$. W szczególności dla (19) i dla $\alpha > 0$ w $c_m = O(\delta_m^\alpha)$ mamy $\lim_{m \rightarrow \infty} \|c_m\|_\infty = 0$ (i stąd także $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \vec{0} \in V$). Jeśli dodatkowo $\alpha > 0$ jest maksymalną taką liczbą, że $\|c_m\|_\infty < K\delta_m^\alpha$ to $\alpha = \alpha_s$ jest określony jako ostry rząd zbieżności w $\lim_{m \rightarrow \infty} \|c_m\|_\infty = 0$ (i zatem także w $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \vec{0}$).

Obliczenie stopnia zbieżności jest możliwe po wyznaczeniu błędu interpolacyjnego. Dla interpolacji parametrycznej błąd różnicy pomiędzy krzywą interpolowaną γ a interpolantem $\tilde{\gamma}$ na przedziale $[a, b]$ można zapisać z pomocą normy euklidesowej jako:

$$\mathcal{E}_t = \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\|_{2^+}. \quad (57)$$

⁺ Uwaga: będziemy pomijać indeks 2, gdy norma będzie normą Euklidesową.

Analogicznie dla interpolacji nieparametrycznej błąd różnicy między interpolantem $\hat{\gamma}$ a krzywą γ jest postaci:

$$\mathcal{E}_t = \sup_{t \in [0, T]} (\|\gamma(t) - \hat{\gamma}(t)\|) \stackrel{*}{=} \max_{t \in [0, T]} (\|\gamma(t) - \hat{\gamma}(t)\|) \quad (58)$$

i dla długości danej wzorem $d(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ i $d(\hat{\gamma}) = \int_0^T \|\dot{\hat{\gamma}}(\hat{t})\| dt$ jako:

$$\mathcal{E}_d = |d(\gamma) - d(\hat{\gamma})|. \quad (59)$$

***Uwaga:** Jeżeli węzły są nieznane to należy określić ψ , żeby "uwszpólnić" dziedziny, wybór ψ jest konieczny dla badania odległości między krzywymi i wpływa istotnie na asymptotykę długości krzywej (wtedy gdy ψ nie jest parametryzacją. Przejście z supremum do maksimum w (58) jest tutaj uzasadnione faktem, iż dziedzina $[0, T]$ jest zwarta (tj. domknięta i ograniczona), więc z Tw. Weierstrassa osiąga kresy [28]. Algorytm wyznaczania stopnia zbieżności w przypadku szacowania trajektorii polega na wyznaczeniu na każdym segmencie interpolacyjnym $t \in [t_i, t_{i+k}]$ maksymalnego błędu różnicy złożenia przedziałowego interpolanta $\check{\gamma}_i$ z ψ i krzywej γ :

$$\mathcal{E}_m^i = \sup_{t \in [t_i, t_{i+k}]} (\|\gamma(t) - (\check{\gamma}_i \circ \psi)(t)\|) \stackrel{*}{=} \max_{t \in [t_i, t_{i+k}]} (\|\gamma(t) - (\check{\gamma}_i \circ \psi)(t)\|) \quad (60)$$

W obliczeniach numerycznych do tego celu zastosowano funkcję *MaxValue* pakietu Mathematica. Następnie dla danego m wyznaczamy dzięki funkcji *Max* największy błąd \mathcal{E}_m na przedziale $[0, T]$. W przypadku obliczania błędu oszacowania długości interpolanta $d(\hat{\gamma} \circ \psi)$ z $d(\gamma)$ dodatkowo należy sumować cząstkowe błędy długości. Do określenia skali zbieżności α wykorzystano regresję liniową $lm = \text{Normal}[\text{LinearModelFit}[\text{dataacz}, \text{xx}, \text{xx}]$ do pary punktów $\{(\log(m), -\log(\mathcal{E}_m))\}_{m_{\min}^{m_{\max}}}$. Współczynnik regresji odczytany z prostej regresji lm pokazuje wartość prędkości zbieżności interpolanta $\hat{\gamma} \circ \psi$ do krzywej γ , gdy zwiększamy ilość punktów interpolacyjnych. Warto tu zwrócić uwagę, że program Mathematica krzywą regresji rysuje na podstawie rozrzutu punktów jako funkcję liniową najlepiej dopasowaną do zbioru. Nie zawsze współczynnik α odczytany z krzywej regresji wskazuje na faktyczną zbieżność. Pokażą to w niektórych przykładach rysunki rozmieszczenia punktów $\{(\log(m), -\log(\mathcal{E}_m))\}_{m_{\min}^{m_{\max}}}$ i uzyskane współczynniki regresji. Do testów numerycznych wykorzystano pakiet Mathematica kolejno w wersjach 8.0, 10.0 i 12.0.

Duża część obliczeń została wsparta przez zasoby obliczeniowe klastra obliczeniowego ACK Cyfronet AGH oraz platformy PLGrid.

Programy do testów numerycznych zostały podlinkowane w bibliografii na pozycji [49].

2.8 Podsumowanie

W następnym rozdziale przeanalizujemy przedziałowo-kubiczną interpolację klasy C^0 tj. interpolację, która na łączeniu kolejnych funkcji kubicznych spełnia tylko warunek ciągłości.

Przypomnimy najpierw klasyczne wyniki dotyczące rzędu zbieżności dla interpolacji parametrycznej a następnie rozszerzymy te wyniki na interpolację nieparametryczną w kontekście wyboru dla \hat{t}_i parametryzacji wykładniczej w oparciu o Q_m oraz wielomiany kubiczne.

3 Przedziałowo-kubiczna interpolacja klasy C^0 i parametryzacja wykładnicza

W poniższym rozdziale została przeanalizowana nieparametryczna interpolacja przedziałowo-kubiczna klasy C^0 na bazie wielomianu Lagrange'a stopnia 3 przy zastosowaniu parametryzacji wykładniczej z $\lambda \in [0, 1]$. *Wyniki pracy doktorskiej z tego rozdziału zostały opublikowane w [3], [4] i [7] oraz przedstawione także na konferencjach m.in. ICCS 2020, MMA'19. Stanowią one rozwinięcie i kontynuację rezultatów z [24], [34] odnoszących się do przedziałowo-kwadratowej interpolacji Lagrange'a i parametryzacji wykładniczej.*

W przypadku interpolacji parametrycznej w oparciu o (\mathcal{T}_m, Q_m) ma miejsce następujące, cytowane już wcześniej, klasyczne twierdzenie:

Twierdzenie 3.1. *Niech $\gamma \in C^{r+1}$ będzie krzywą regularną $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^n$. Załóżmy, że węzły $\{t_i\}_{i=0}^m \in V_G^m$ (gdzie V_G^m to rodzina próbkowań dopuszczalnych) są zadane a priori. Wtedy kawałkami sklepany wielomian Lagrange'a stopnia r , $\tilde{\gamma}_r$ skonstruowany na bazie \mathcal{T}_m i Q_m daje ostre oszacowanie [1]:*

$$\tilde{\gamma}_r = \gamma + O(\delta_m^{r+1}). \quad (61)$$

W szczególności dla $r=2$ funkcja $\tilde{\gamma}_2$ (tj. kawałkami kwadratowy wielomian) a dla $r=3$ $\tilde{\gamma}_3$ (tj. kawałkami kubiczny wielomian) we wzorze (61) daje odpowiednio ostry trzeci i czwarty rząd zbieżności.

Powstaje pytanie czy podobne wyniki można uzyskać dla przypadku interpolacji nieparametrycznej $\hat{\gamma}_r$ oraz parametryzacji wykładniczej. Odpowiedź na to pytanie dla $r = 2, 3, 4$ i $\lambda = 1$ oraz dla $\lambda \in [0, 1)$ i $r = 2$ została udzielona w pracy [1]. Przypadek interpolacji nieparametrycznej i wielomianu Lagrange stopnia 2 oraz jej reparametryzacji został opisany m.in. w pracy [34], [30]. Pierwsze z twierdzeń, które udowodniono i potwierdzono tam eksperymentalnie to:

Twierdzenie 3.2. *Niech γ będzie krzywą regularną klasy $C^k([0, T])$ w \mathbb{E}^n , gdzie $k \geq r + 1$ i $r = 2, 3$, próbkowaną dopuszczalnie (19). Niech $\hat{\gamma}_r: [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie interpolantem kawałkami sklepanym stopnia r zdefiniowanym na Q_m z węzłami \hat{t}_i określonymi przez parametryzację*

długością cięciwy (31). Wtedy istnieje reparametryzacja ψ kawałkami klasy C^r i taka, że $\psi: [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$, która spełnia:

$$\hat{\gamma}_r \circ \psi = \gamma + O(\delta_m^{r+1}). \quad (62)$$

Oszacowania w (62) są ostre.

Zatem rzędy zbieżności trajektorii $\hat{\gamma}$ do γ odpowiadają tym dla przypadku danych niezredukowanych.

W powyższym twierdzeniu funkcja $\psi: [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$ jest kawałkami sklejaną funkcją kwadratową (kubiczną) Lagrange'a taką, że dla $[t_i, t_{i+2}]$, ($[t_i, t_{i+3}]$) $\psi(t_k) = \hat{t}_k$, $k = i, i+1, i+2$, ($k = i, i+1, i+2, i+3$). Porównując (61) z (62) dla $r = 2, 3$ wprowadzona parametryzacja skumulowaną długością cięciwy daje te same rzędy zbieżności oszacowania trajektorii, co standardowe interpolacje kwadratowe i kubiczne. Warto tu również zauważyć, że dla $r = 4$ (sklejane wielomiany rzędu 4) i $\lambda = 1$ (patrz (31)) nie ma przyspieszenia do rzędu 5 tak jak jest to w przypadku $\tilde{\gamma}_5$ (patrz [35]).

Kolejne twierdzenie z [30] dotyczy próbkowania mniej lub bardziej równomiernego, interpolacji kawałkami kwadratowej oraz $\lambda = [0, 1)$ z parametryzacją wykładniczą (30).

Twierdzenie 3.3. *Przypuśćmy, że γ jest krzywą regularną $C^3([0, T])$ w \mathbb{E}^n próbkowaną mniej lub bardziej równomiernie (patrz Def. 2.14). Dla Q_m i nieznanymi $\{t_i\}_{i=0}^m$ rozważmy nowe węzły $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^m$ określone według formuły (30) dla $\lambda \in [0, 1]$. Wtedy istnieje funkcja kwadratowa $\psi_i: \underbrace{[t_i, t_{i+2}]}_{I_i} \rightarrow \underbrace{[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+2}]}_{\hat{I}_i}$ taka, że dla każdej $\lambda \in [0, 1)$:*

$$\check{\gamma}_{2,i}^* \circ \psi_i = \gamma + O(\delta_m) \quad (63)$$

Dodatkowo dla przypadków próbkowania równomiernego $\{t_i\}_{i=0}^m$ i $\lambda \in [0, 1)$ lub $\lambda = 1$ z $\{t_i\}_{i=0}^m$ spełniających warunek dopuszczalności (19), gdy ψ_i jest reparametryzacją to na każdym $[t_i, t_{i+2}]$ otrzymujemy:

$$\hat{\gamma}_{2,i} \circ \psi_i = \gamma + O(\delta^3) \quad (64)$$

*Uwaga: $\check{\gamma}_{2,i}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\hat{\gamma}_{2,i} = \check{\gamma}_{2,i}|_{[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+2}]}$, $\check{\gamma}$ jest wielomianem rozszerzonym na dziedzinę liczb rzeczywistych a $\hat{\gamma}_{2,i}$ jest obcięciem $\check{\gamma}_i$ do przedziału $[t_i, t_{i+2}]$. Zabieg taki jest podejmowany

w testach numerycznych i dowodach twierdzeń ze względu na to, iż funkcja ψ_i może nie być iniekcją² i poza tym może zachodzić $[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+2}] \subset \psi_i([t_i, t_{i+2}])$ (funkcja ψ_i może odwzorować $[t_i, t_{i+k}]$ w większy zbiór niż $[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+k}]$ wtedy $\hat{\gamma}$ też musi tam istnieć). Ostatnia zależność powoduje trudności w obliczeniu $\hat{\gamma}_{2,i} \circ \psi_i$ (ale nie $\check{\gamma}_{2,i} \circ \psi_i$). Jeśli udowodnimy asymptotykę dla $\check{\gamma}_{2,i}$, to na węższej dziedzinie też jest to prawdziwe czyli prawdziwe dla $\hat{\gamma}_{2,i}$. Należy przypomnieć, że gdy $\lambda = 0$ to $\{\hat{t}_i\}$ są równoodległe, więc nie uwzględnia się geometrii rozrzutu Q_m , a dla $\lambda = 1$ jest ona uwzględniana. Zaskakujące jest to, że współczynnik zbieżności $\alpha(0) = 1$ i $\alpha(1) = 3$ (patrz Def. 2.23), ale $\alpha(\lambda)$ nie zmienia się w sposób ciągły od 1 do 3 przy $\lambda \in [0, 1]$. Dla $r = 2$ i $\lambda \in [0, 1)$ mamy stałą asymptotykę $\alpha(\lambda) = 1$, która skokowo przechodzi w $\alpha(\lambda = 1) = 3$. Pojawia się pytanie czy taka zależność przenosi się na przypadek $r = 3$.

Analogiczne zależności po wstępnych eksperymentach zostały zaobserwowane dla wielomianów sklejaných kubicznych Lagrange'a klasy C^0 . Poniżej przedstawiony został algorytm, twierdzenie i dowód dla przypadku nieparametrycznej interpolacji kawałkami kubicznej opartej na wielomianie Lagrange'a. **Jest to pierwszy główny wynik napisanej pracy doktorskiej** - patrz [3], [4] i [7].

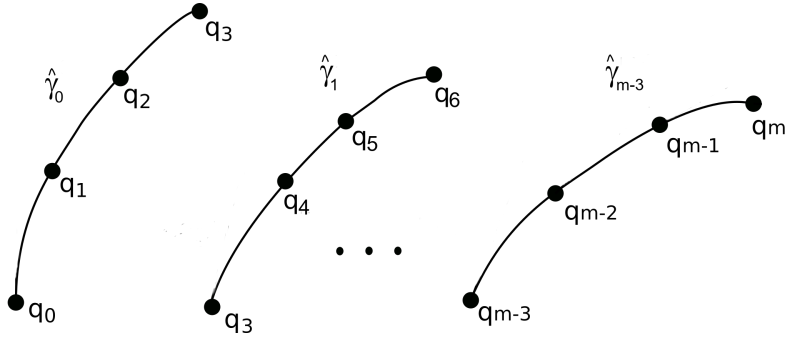
3.1 Szacowanie trajektorii przedziałowo-kubicznym interpolantem klasy C^0 w oparciu o dane zredukowane

Schemat interpolacyjny Lagrange'a dla przedziałowo-kubicznej interpolacji klasy C^0 zakłada następujące kroki:

- Dla wartości $\{q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}\}$ interpolant $\hat{\gamma}_{3,i} : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ spełnia $\hat{\gamma}_{3,i}(\hat{t}_{i+j}) = q_{i+j}$, dla $j = 0, 1, 2, 3$ (gdzie \hat{t}_{i+j} definiuje się zgodnie z (30) dla $\lambda \in [0, 1)$)
- Zgodnie ze wzorem (5) $\hat{\gamma}_{3,i}$ tworzy kawałkami-kubicznego interpolanta $\hat{\gamma}_3 : [\hat{t}_0=0, \hat{t}_m] \rightarrow \mathbb{E}^n$ opartego o dane zredukowane Q_m oraz $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^m$ (patrz Rys. 19)

Dodatkowo do przeprowadzenia dowodów postawionych twierdzeń potrzeba podjąć następujące kroki:

²Iniekcja - funkcja, której każdy element przeciwdziedziny przyjmowany jest co najwyżej raz, inaczej różnowartościowa.



Rys. 19. Konstrukcja interpolanta kawałkami sklejanego $\hat{\gamma}_{3,i}^L$ na kolejnych przedziałach $[t_i, t_{i+3}]$ zbudowanego w oparciu o dane zredukowane $\{q_x\}_{x=i}^{i+3}$.

- Rozszerzmy dziedzinę każdej funkcji $\hat{\gamma}_{3,i}$ z $\hat{I}_i = [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$ do \mathbb{R} definiując zmodyfikowane interpolanty kubiczne $\check{\gamma}_{3,i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, które spełniają warunki $\check{\gamma}_{3,i}(\hat{t}_{i+j}) = q_{i+j}$ oraz³ $\check{\gamma}_{3,i}|_{[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]} = \hat{\gamma}_{3,i}$.
- Wprowadźmy funkcję $\psi_{3,i} : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$, która jest podobnej postaci co $\hat{\gamma}_{3,i}$ i spełnia warunki interpolacyjne na węzłach tj.:

$$\psi_{3,i}(t_{i+j}) = \hat{t}_{i+j}$$

dla $j = 0, 1, 2, 3$. Jeśli funkcja $\psi_{3,i}$ odwzorowuje $I_i = [t_i, t_{i+3}]$ na $\hat{I}_i = [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$ wtedy $\check{\gamma}_{3,i} \circ \psi_{3,i} = \hat{\gamma}_{3,i} \circ \psi_{3,i}$. To ostatnie jest prawdą jeśli np. $\psi_{3,i} > 0$ czyli, gdy $\psi_{3,i}$ definiuje reparametryzację I_i na \hat{I}_i .

3.1.1 Rząd zbieżności w szacowaniu trajektorii γ

Konstrukcja interpolanta pozwala dalej oszacować prędkość zbieżności $\hat{\gamma} \circ \psi$ do krzywej γ . W niniejszym rozdziale rozszerzamy istniejące wyniki dla $r = 2$ i $\lambda \in [0, 1)$ oraz dla $r = 3$ i $\lambda = 1$ z pracy [1].

Pierwszym głównym rezultatem niniejszej pracy doktorskiej (patrz [3]) jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.4. Niech $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie krzywą regularną klasy $C^4([0, T])$ (patrz Def. 2.8) zadaną w przestrzeni Euklidesowej \mathbb{E}^n próbkowaną mniej lub bardziej równomiernie (patrz Def. 2.14). Załóżmy, że Q_m określa dane zredukowane z nieznanymi węzłami $\mathcal{T} = \{t_i\}_{i=0}^m$

³Definicja odcięcia została opisana w uwadze do Tw. 3.3

skompensowanymi przez parametryzację wykładniczą (wzór (30)) (gdzie $\lambda \in [0, 1)$). Zachodzi wtedy następująca zależność (na przedziale $[0, T]$):

$$\check{\gamma}_{3,i} \circ \psi_{3,i} - \gamma = O(\delta_m), \quad \text{dla } \lambda \in [0, 1). \quad (65)$$

Stąd $\alpha(\lambda) = 1$ dla $\lambda \in [0, 1)$.

Dodatkowo w przypadku, gdy $\mathcal{T}_u = \{\frac{it}{m}\}_{i=0}^m$ jest próbkowaniem równomiernym (lub $\lambda = 1$ daje skumulowaną długość cięciwy - zobacz też [33]) mamy przyspieszenie rzędu zbieżności w (65) (gdzie również asymptotycznie $\check{\psi}_{3,i} > 0$ oraz $\check{\gamma}_{3,i} = \hat{\gamma}_{3,i}$) z liniowej na czwartego rzędu i zachodzi:

$$\hat{\gamma}_{3,i} \circ \psi_{3,i} - \gamma = O(\delta_m^4). \quad (66)$$

Dowód. Dla $[t_i, t_{i+3}]$ definiujemy funkcję błędu: $f_i(t) = (\check{\gamma}_i \circ \psi_i)(t) - \gamma(t)^d$. Uwzględniając, że $f_i(t_{i+j}) = 0$ (dla $j = 0, 1, 2, 3$) zgodnie z Lematem Hadamarda (Lem. 2.5) mamy na podprzedziale $[t_i, t_{i+3}]$:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= (t - t_i)(t - t_{i+1})(t - t_{i+2})(t - t_{i+3})O[(\check{\gamma}_i \circ \psi_i)^{(4)}(t) - \gamma^{(4)}(t)] \\ &= O(\delta_m^4) \cdot O((\check{\gamma}_i \circ \psi_i)^{(4)}(t) - \gamma^{(4)}(t)), \end{aligned} \quad (67)$$

bo $|t - t_i| \leq 3\delta_m$.

Korzystając ze wzorów na różniczkowanie funkcji złożonej otrzymujemy:

$$(\check{\gamma}_i \circ \psi_i)^{(4)}(t) = 6\check{\gamma}_i'''(\hat{t})\check{\psi}_i^2(t)\check{\psi}_i(t) + 3\check{\gamma}_i''(\hat{t})\check{\psi}_i^2(t) + 4\check{\gamma}_i'(\hat{t})\check{\psi}_i(t)\check{\psi}_i''(t), \quad (68)$$

z pochodnymi zależnymi od t lub $\hat{t} = \psi_i(t)$ wyrażonymi odpowiednio przez notację z kropką lub z apostrofem. Łącząc ostatnie równanie z (67) i faktem, iż $\gamma \in C^4$ zdefiniowane jest nad zbiorem zwartym $[0, T]$ (tj. z tw. Weierstrassa mamy ograniczoność $\gamma^{(4)}(t)$ funkcji ciągłej na $[0, T]$) otrzymujemy:

$$f_i(t) = O(\delta_m^4)[O(\check{\gamma}_i'''(\hat{t})\check{\psi}_i^2(t)\check{\psi}_i(t)) + O(\check{\gamma}_i''(\hat{t})\check{\psi}_i^2(t)) + O(\check{\gamma}_i'(\hat{t})\check{\psi}_i(t)\check{\psi}_i''(t)) + O(1)]. \quad (69)$$

W następnych krokach określimy asymptotykę poszczególnych komponentów ze wzoru (69). W tym celu najpierw oszacujemy odpowiednie pochodne funkcji ψ_i i $\check{\gamma}_i$.

^dZostało użyte skrócone oznaczenie dla obu funkcji kubicznych $\psi_{3,i} = \psi_i$ and $\check{\gamma}_{3,i} = \check{\gamma}_i$

A) **Oszacowanie asymptotyczne pochodnych funkcji ψ_i .**

W celu określenia asymptotyki pochodnych ψ_i zostanie użyty interpolacyjny wzór Newtona - (Def. 2.20) definiujący ψ_i w oparciu o różnice dzielone. Zgodnie z nim dla $t \in [t_i, t_{i+3}] = I_i$ mamy:

$$\begin{aligned} \psi_i(t) = & \psi_i[t_i] + \psi_i[t_i, t_{i+1}](t - t_i) + \psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t - t_i)(t - t_{i+1}) \\ & + \psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}](t - t_i)(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}). \end{aligned} \quad (70)$$

Obliczając pochodne $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$ i $\dddot{\psi}$ mamy:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i(t) = & \psi_i[t_i, t_{i+1}] + (2t - t_i - t_{i+1})\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] + [(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}) \\ & + (t - t_i)(t - t_{i+1}) + (t - t_i)(t - t_{i+2})]\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}], \end{aligned} \quad (71)$$

a w konsekwencji:

$$\ddot{\psi}_i(t) = 2\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] + 2(3t - t_{i+2} - t_{i+1} - t_i)\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] \quad (72)$$

oraz:

$$\dddot{\psi}_i(t) = 6\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]. \quad (73)$$

Z wzorów (71), (72) i (73) wynika, iż oszacowanie asymptotyczne dla pochodnych $\dot{\psi}_i$, $\ddot{\psi}_i$, $\ddot{\psi}_i$ na każdym I_i wymaga oszacowania asymptotyki poszczególnych różnic dzielonych: $\psi_i[t_i, t_{i+1}]$, $\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]$ oraz $\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]$. Ponieważ $\psi(t_i) = \hat{t}_i$, a te ostatnie wartości zależą od $q_i = \gamma(t_i)$ więc w tym celu zastosujemy dla γ rozwinięcie Taylora (korzystając z faktu iż $\ddot{\gamma}$ jako funkcja ciągła na $[0, T]$ jest funkcją ograniczoną):

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = (t_{i+1} - t_i)[\dot{\gamma}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2}\ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^2)], \quad (74)$$

bo $\frac{\ddot{\gamma}(\xi)}{3!} = O(1)$ dla $\xi \in [0, T]$. Formuła (74) w połączeniu z (30) oraz $\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ to kanoniczny iloczyn skalarny w \mathbb{E}^n (patrz także [30], gdzie została przeanalizowana funkcja kwadratowa $\psi_{2,i}$) prowadzą do:

$$\begin{aligned}
\psi_i[t_i, t_{i+1}] &= \frac{\Psi_i(t_{i+1}) - \Psi_i(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i}{t_{i+1} - t_i} \stackrel{(30)}{=} \frac{\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|^\lambda}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\langle (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) | (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) \rangle^{\frac{\lambda}{2}}}{t_{i+1} - t_i} \\
&\stackrel{(74)}{=} \frac{(t_{i+1} - t_i)^{\frac{\lambda}{2}} \langle \overbrace{(\dot{\gamma}(t_i))}^a + \overbrace{\frac{t_{i+1} - t_i}{2} \ddot{\gamma}(t_i)}^b + \overbrace{O((t_{i+1} - t_i)^2)}^c \rangle | (\dot{\gamma}(t_i) + \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^2)) \rangle^{\frac{\lambda}{2}}}{t_{i+1} - t_i}.
\end{aligned} \tag{75}$$

Teraz zgodnie ze wzorem na kanoniczny iloczyn skalarny mamy:

$$\langle (a+b+c) | (a+b+c) \rangle = \langle a | a \rangle + \langle a | b \rangle + \langle a | c \rangle + \langle b | a \rangle + \langle b | b \rangle + \langle b | c \rangle + \langle c | a \rangle + \langle c | b \rangle + \langle c | c \rangle \tag{76}$$

Takie krzywe są reparametryzowane przez długość łuku i stąd $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ i dalej $\langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle = 1$ (dla każdego $t \in [0, T]$) - patrz [31], [36]. Z iloczynu skalarnego wynika $\langle \dot{\gamma}(t) | \ddot{\gamma}(t) \rangle \equiv 0$ (patrz przypis ^e), więc odrzuca się niektóre wyrażenia z rozwinięcia Taylora dla $\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$. Dodatkowo wiemy, że $\ddot{\gamma} = O(1)$ więc $\langle \dot{\gamma} | \ddot{\gamma} \rangle = O(1)$. Biorąc powyższe warunki pod uwagę i fakt regularności krzywej: γ tj. $\langle a | a \rangle = \langle \dot{\gamma} | \dot{\gamma} \rangle = 1$, wzór (75) można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
\psi_i[t_i, t_{i+1}] &= \frac{(t_{i+1} - t_i)^\lambda \left[\overbrace{\langle \dot{\gamma}(t_i) | \dot{\gamma}(t_i) \rangle}^{=1} + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{4} \overbrace{\langle \dot{\gamma}(t_i) | \ddot{\gamma}(t_i) \rangle}^{=O(1)} + O((t_{i+1} - t_i)^2) + O((t_{i+1} - t_i)^3) \right]^{\frac{\lambda}{2}}}{t_{i+1} - t_i} \\
&= \frac{(t_{i+1} - t_i)^\lambda [1 + O((t_{i+1} - t_i)^2)]^{\frac{\lambda}{2}}}{t_{i+1} - t_i}
\end{aligned} \tag{77}$$

Ze wzoru Taylora dla funkcji $f(y) = (1 + y)^{\frac{\lambda}{2}}$ w $y = 0$ i faktu, że $f'(y) = \frac{\lambda}{2}(1 + y)^{\frac{\lambda}{2} - 1}$ otrzymujemy rozwinięcie:

$$f(y) = 1 + \frac{\lambda}{2}(1 + \zeta)^{\frac{\lambda}{2} - 1}y, \text{ dla } \zeta \in [0, y), \text{ lub } (y, 0] \tag{78}$$

Oczywiście dla $0 \leq \zeta \leq y$ lub $y \leq \zeta \leq 0$ to $\frac{\lambda}{2}(1 + \zeta)^{\frac{\lambda}{2} - 1} = O(1)$. Podstawiając za $y = O((t_{i+1} - t_i)^2)$, możemy przekształcić wyrażenie z (77) na:

$$\psi_i[t_i, t_{i+1}] = (t_{i+1} - t_i)^{\lambda - 1} [1 + O((t_{i+1} - t_i)^2)] = (t_{i+1} - t_i)^{\lambda - 1} + O((t_{i+1} - t_i)^{\lambda + 1}) \tag{79}$$

^e $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 1 \rightarrow \langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle = 1$. Stąd różniczkując obustronnie mamy $(\langle \dot{\gamma} | \dot{\gamma} \rangle)' = 1' \rightarrow \langle \dot{\gamma} | \ddot{\gamma} \rangle + \langle \ddot{\gamma} | \dot{\gamma} \rangle = 0$. Ostatecznie ponieważ iloczyn skalarny jest przemienny (nad ciałem rzeczywistym) to $2\langle \dot{\gamma} | \ddot{\gamma} \rangle = 0$.

Zauważmy iż ostatni krok w (79) wykorzystuje mniej lub bardziej równomierność i fakt, że $\lambda - 1 < 0$:

$$\begin{aligned}\beta \delta_m &\leq t_{i+1} - t_i \leq \delta_m, \\ \beta^{\lambda-1} \delta_m^{\lambda-1} &\geq (t_{i+1} - t_i)^{\lambda-1} \geq \delta_m^{\lambda-1}, \\ (t_{i+1} - t_i)^{\lambda-1} &= O(\delta_m^{\lambda-1}).\end{aligned}\tag{80}$$

Analogicznie jak w (75) można pokazać dla $\psi_i[t_{i+j+1}, t_{i+j+2}]$ gdzie $j = 0, 1$ iż:

$$\psi_i[t_{i+j+1}, t_{i+j+2}] = (t_{i+j+2} - t_{i+j+1})^{\lambda-1} + O((t_{i+j+2} - t_{i+j+1})^{\lambda+1}) = O(\delta_m^{\lambda-1}).\tag{81}$$

Wzór na $\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] = \frac{\psi[t_{i+1}, t_{i+2}] - \psi[t_i, t_{i+1}]}{t_{i+2} - t_i}$ uwzględniając $0 < (t_{i+j+1} - t_{i+j})(t_{i+2} - t_i)^{-1} < 1$ (dla $j = 0, 1$) oraz (75) i (81) prowadzi do:

$$\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] = \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^{\lambda-1} - (t_{i+1} - t_i)^{\lambda-1}}{t_{i+2} - t_i} + O((t_{i+2} - t_{i+1})^\lambda) + O((t_{i+1} - t_i)^\lambda) = O(\delta_m^{\lambda-2}).\tag{82}$$

Analogicznie uzyskujemy:

$$\psi_i[t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] = \frac{(t_{i+3} - t_{i+2})^{\lambda-1} - (t_{i+2} - t_{i+1})^{\lambda-1}}{t_{i+3} - t_{i+1}} + O((t_{i+3} - t_{i+2})^\lambda) + O((t_{i+2} - t_{i+1})^\lambda) = O(\delta_m^{\lambda-2}).\tag{83}$$

Łącząc dalej wzory (82) i (83) trzecia różnica dzielona redukuje się do:

$$\begin{aligned}\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] &= \frac{(t_{i+3} - t_{i+2})^{\lambda-1} - (t_{i+2} - t_{i+1})^{\lambda-1}}{(t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_i)} - \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^{\lambda-1} - (t_{i+1} - t_i)^{\lambda-1}}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+3} - t_i)} \\ &+ \frac{O((t_{i+3} - t_{i+2})^{\lambda+1}) + O((t_{i+2} - t_{i+1})^{\lambda+1})}{(t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_i)} + \frac{O((t_{i+2} - t_{i+1})^{\lambda+1}) + O((t_{i+1} - t_i)^{\lambda+1})}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+3} - t_i)}.\end{aligned}\tag{84}$$

Szacując, że $0 < (t_{i+j+2} - t_{i+j+1})^2 ((t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_i))^{-1} < 1$ i $0 < (t_{i+j+1} - t_{i+j})^2 ((t_{i+2} - t_i)(t_{i+3} - t_i))^{-1} < 1$ (dla $j = 0, 1$) oraz uwzględniając wyrażenie $|t - t_k| \leq t_{i+3} - t_i = (t_{i+1} - t_i) + (t_{i+2} - t_{i+1}) + (t_{i+3} - t_{i+2}) \leq 3\delta_m$, zachodzące dla każdego $t, t_k \in [t_i, t_{i+3}]$ (z $k = 0, 1, 2$) formuła (84) użyta razem z warunkiem mniej lub bardziej równomierności (patrz Def. 2.14) prowadzi do (dla $\lambda \in [0, 1)$):

$$\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] = O(\delta_m^{\lambda-3}) + O(\delta_m^{\lambda-1}) = O(\delta_m^{\lambda-3}).\tag{85}$$

Łącząc razem wzory (71), (75), (82) i (85) pierwsza pochodna ψ_i szacuje się jako:

$$\boxed{\psi_i(t) = O(\delta_m^{\lambda-1}) + O(\delta_m) \cdot O(\delta_m^{\lambda-2}) + O(\delta_m^2) \cdot O(\delta_m^{\lambda-3}) = O(\delta_m^{\lambda-1})}.\tag{86}$$

Podobnie korzystając z (72) i (75) oraz (82) i (85), dla wyższych pochodnych $\check{\psi}$ oraz $\check{\check{\psi}}$ zachodzą następujące asymptotyczne oszacowania:

$$\boxed{\check{\psi}_i(t) = O(\delta_m^{\lambda-2}) + O(\delta_m) \cdot O(\delta_m^{\lambda-3}) = O(\delta_m^{\lambda-2}) \text{ oraz } \check{\check{\psi}}_i(t) = O(\delta_m^{\lambda-3}).} \quad (87)$$

B) Oszacowanie asymptotyczne pochodnych $\check{\gamma}_i$

W tej części dowodu oszacujemy pochodne funkcji $\check{\gamma}_i : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ określone w (68). Wzór interpolacyjny Newtona zostanie zastosowany ponownie do $\check{\gamma}_i$ dając (dla każdego $\hat{t} \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \check{\gamma}_i(\hat{t}) &= \check{\gamma}_i[\hat{t}_i] + \check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}](\hat{t} - \hat{t}_i) + \check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}](\hat{t} - \hat{t}_i)(\hat{t} - \hat{t}_{i+1}) \\ &\quad + \check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}](\hat{t} - \hat{t}_i)(\hat{t} - \hat{t}_{i+1})(\hat{t} - \hat{t}_{i+2}). \end{aligned} \quad (88)$$

Stąd dalej:

$$\check{\gamma}_i''(\hat{t}) = 2\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}] + 2(3\hat{t} - \hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}], \quad (89)$$

$$\check{\gamma}_i'''(\hat{t}) = 6\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}]. \quad (90)$$

Podobnie jak dla ψ_i , najpierw zostaną obliczone rzędy oszacowania dla różnic dzielonych: $\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$, $\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}]$ i $\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}]$. Korzystając z (30) mamy:

$$\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}] = \frac{\check{\gamma}_i(\hat{t}_{i+1}) - \check{\gamma}_i(\hat{t}_i)}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} = \frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|^\lambda}. \quad (91)$$

Rozwinięcie Taylora zastosowane do $\gamma(t) = \gamma(t_i) + \dot{\gamma}(t_i)(t - t_i) + \frac{\ddot{\gamma}(t_i)}{2}(t - t_i)^2 + O((t - t_i)^3)$, uwzględniając $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ (wraz z $\langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$ - patrz przypis e) oraz wzór (76) prowadzą do:

$$\begin{aligned} \hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i &= \|(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))\|^\lambda = \langle (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) | (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) \rangle^{\frac{\lambda}{2}} \quad (74) \\ &= (t_{i+1} - t_i)^{\frac{\lambda}{2}} \langle \dot{\gamma}(t_i) + \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^2) | \dot{\gamma}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2} \ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^2) \rangle^{\frac{\lambda}{2}} \quad (76) \\ &= (t_{i+1} - t_i)^\lambda \left(\overbrace{\langle \dot{\gamma}(t_i) | \dot{\gamma}(t_i) \rangle}^{=1} + \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2} \overbrace{2 \langle \dot{\gamma}(t_i) | \ddot{\gamma}(t_i) \rangle}^{=0} + \langle \dot{\gamma}(t_i) | O((t_{i+1} - t_i)^2) \rangle \right) + \\ &\quad + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{4} \overbrace{\langle \ddot{\gamma}(t_i) | \ddot{\gamma}(t_i) \rangle}^{=O(1)} + \langle \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \ddot{\gamma}(t_i) | O((t_{i+1} - t_i)^2) \rangle + O((t_{i+1} - t_i)^4) \rangle^{\frac{\lambda}{2}} = \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned}
&= (t_{i+1} - t_i)^\lambda (1 + O((t_{i+1} - t_i)^2) + O((t_{i+1} - t_i)^3)) + O((t_{i+1} - t_i)^4))^{\frac{\lambda}{2}} = \\
&= (t_{i+1} - t_i)^\lambda [1 + O((t_{i+1} - t_i)^2)]^{\frac{\lambda}{2}} = (t_{i+1} - t_i)^\lambda [1 + O((t_{i+1} - t_i)^2)].
\end{aligned}$$

W ostatnim kroku wykorzystujemy zależność z Tw. Taylora dla $(1+x)^{\frac{\lambda}{2}}$ wyprowadzoną wcześniej dla ψ pod wzorem (77). Stąd z (74), (91) i (92) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}] &= \frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} = \frac{\dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} \ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^3)}{\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|^\lambda} = \\
&= \frac{(t_{i+1} - t_i)[\dot{\gamma}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2} \ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^2)]}{(t_{i+1} - t_i)^\lambda [1 + O((t_{i+1} - t_i)^2)]},
\end{aligned}$$

i dalej z twierdzenia Taylora $(1 + O(x))^{-1} = 1 + O(x)$ (dla x oddzielnego od -1) można zapisać:

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}] &= (t_{i+1} - t_i)^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2} \ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^2)] [1 + O((t_{i+1} - t_i)^2)] = \\
&= (t_{i+1} - t_i)^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2} \ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^2) + \underbrace{\dot{\gamma}(t_i)}_{=O(1)} O((t_{i+1} - t_i)^2) + \\
&\quad + \ddot{\gamma}(t_i) O((t_{i+1} - t_i)^3) + O((t_{i+1} - t_i)^4)] \\
&= (t_{i+1} - t_i)^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2} \ddot{\gamma}(t_i) + O((t_{i+1} - t_i)^2)].
\end{aligned} \tag{93}$$

Analogicznie:

$$\check{\gamma}_i[\hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}] = (t_{i+2} - t_{i+1})^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_{i+1}) + \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+1}) + O((t_{i+2} - t_{i+1})^2)]. \tag{94}$$

Z formuł (93), (94) oraz $\hat{t}_{i+k+2} - \hat{t}_{i+k} = (\hat{t}_{i+k+2} - \hat{t}_{i+k+1}) + (\hat{t}_{i+k+1} - \hat{t}_{i+k})$ (dla $k = 0, 1$)

uzyskujemy asymptotyczne oszacowanie dla różnicy dzielonej drugiego stopnia:

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_i[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}] &= \frac{(t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_{i+k+1}) + \frac{t_{i+k+2} - t_{i+k+1}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k+1})]}{(\hat{t}_{i+k+2} - \hat{t}_{i+k+1}) + (\hat{t}_{i+k+1} - \hat{t}_{i+k})} \\
&\quad - \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_{i+k}) + \frac{t_{i+k+1} - t_{i+k}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k})]}{(\hat{t}_{i+k+2} - \hat{t}_{i+k+1}) + (\hat{t}_{i+k+1} - \hat{t}_{i+k})} \\
&\quad + \frac{O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)}{(\hat{t}_{i+k+2} - \hat{t}_{i+k+1}) + (\hat{t}_{i+k+1} - \hat{t}_{i+k})}.
\end{aligned} \tag{95}$$

Korzystając z (92) wyrażenie 1/mianownik z (95) szacuje się następująco:

$$0 \leq \frac{1}{(t_{i+k+1} - t_{i+k})^\lambda [1 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)] + (t_{i+k+1} - t_{i+k})^\lambda [1 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)]} \leq \frac{1}{(t_{i+k+1} - t_{i+k})^\lambda [1 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)]}, \quad (96)$$

i ostatecznie korzystając z rozwinięcia Taylora dla $y = \frac{1}{1+x} = 1 + x + O(x^2) = 1 + O(x)$, gdzie za x podstawiamy $O(t_{i+k+1} - t_{i+k})$ otrzymujemy dla (96):

$$\frac{1}{(t_{i+k+1} - t_{i+k})^\lambda [1 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)]} = (t_{i+k+1} - t_{i+k})^{-\lambda} [1 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)]. \quad (97)$$

Wstawiając (97) do (95) oraz korzystając z $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \|\check{\gamma}[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}]\| &\leq \frac{(t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{1-2\lambda} \|\dot{\gamma}(t_{i+k+1}) + \frac{t_{i+k+2} - t_{i+k+1}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k+1})\|}{1 + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2)} \\ &+ \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})^{1-2\lambda} \|\dot{\gamma}(t_{i+k}) + \frac{t_{i+k+1} - t_{i+k}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k})\|}{1 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)} \\ &+ \frac{\|O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{2-\lambda})\|}{1 + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2)} + \frac{\|O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^{2-\lambda})\|}{1 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)} = \\ &= O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{1-2\lambda}) + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{2-\lambda}) + \\ &+ O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^{1-2\lambda}) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^{2-\lambda}) = \\ &= O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{g_{min}(\lambda)}) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^{g_{min}(\lambda)}), \quad (98) \end{aligned}$$

gdzie $g_{min}(\lambda) = \min(2-\lambda, 1-2\lambda)$. Ale $1-2\lambda < 2-\lambda$ (dla $\lambda \in [0, 1)$) i $f(x) = (1+x)^{-1} \stackrel{(74)}{=} f(0) + \frac{f'(\xi)}{1!}x$. Pochodna $f' = \frac{-1}{(1+x)^2}$ i $0 \leq \xi \leq x$ lub $x \leq \xi \leq 0$. Ponieważ $x = O(x)$ i jest oddzielone od -1 więc $(1+x)^{-1} = 1 + O(x)$. Mniej lub bardziej równomierność $\{t_i\}_{i=0}^m$ (wymagana kiedy $1-2\lambda < 0$) połączona z $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle \equiv 1$ prowadzi do:

$$\|\check{\gamma}[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}]\| = O(\delta_m^{1-2\lambda}) + O(\delta_m^{2-\lambda}) = O(\delta_m^{1-2\lambda}),$$

co zgodnie z Def. 2.23 oznacza iż:

$$\check{\gamma}[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}] = O(\delta_m^{1-2\lambda}). \quad (99)$$

W celu zbadania asymptotyki $\check{\gamma}[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]$ uwzględniamy wzór (95) oraz zależność

$0 < \hat{t}_{i+3} - \hat{t}_i = (\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_{i+2}) + (\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1}) + (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)$. Zatem, jak poprzednio, dla parametryzacji wykładniczej (30) zachodzi $(\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_i)^{-1} \leq (\hat{t}_{i+l+1} - \hat{t}_{i+l})^{-1}$ (dla $l = 0, 1, 2$). Stąd z (95) trzecia różnica dzielona $\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}]$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\check{\gamma}_i[\hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}] - \check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}]}{\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_i} = \frac{1}{\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_i} \left(\frac{(t_{i+3} - t_{i+2})^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_{i+2}) + \frac{t_{i+3} - t_{i+2}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+2})]}{(\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_{i+2}) + (\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1})} \right. \\
&\quad - \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_{i+1}) + \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+1})]}{(\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_{i+2}) + (\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1})} + \frac{O((t_{i+3} - t_{i+2})^2)}{(\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_{i+2}) + (\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1})} + \frac{O((t_{i+2} - t_{i+1})^2)}{(\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_{i+2}) + (\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1})} \\
&\quad - \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_{i+1}) + \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+1})]}{(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1}) + (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)} + \frac{(t_{i+1} - t_i)^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_i) + \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \ddot{\gamma}(t_i)]}{(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1}) + (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)} \\
&\quad \left. + \frac{O((t_{i+2} - t_{i+1})^2)}{(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1}) + (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)} + \frac{O((t_{i+1} - t_i)^2)}{(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+1}) + (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)} \right). \quad (100)
\end{aligned}$$

Podobnie jak dla (98):

$$\begin{aligned}
\|\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}]\| &\leq \frac{(t_{i+3} - t_{i+2})^{1-3\lambda} \|\dot{\gamma}(t_{i+2}) + \frac{t_{i+3} - t_{i+2}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+2})\|}{1 + O((t_{i+3} - t_{i+2})^2)} \\
&+ 2 \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^{1-3\lambda} \|\dot{\gamma}(t_{i+1}) + \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+1})\|}{1 + O((t_{i+2} - t_{i+1})^2)} + \frac{\|O((t_{i+3} - t_{i+2})^{2-2\lambda})\|}{1 + O((t_{i+3} - t_{i+2})^2)} + \frac{\|O((t_{i+2} - t_{i+1})^{2-2\lambda})\|}{1 + O((t_{i+2} - t_{i+1})^2)}.
\end{aligned}$$

Uwzględniając (92) oraz korzystając z (100) i $1 - 3\lambda < 2 - 2\lambda$ (dla $\lambda \in [0, 1]$) zachodzi:

$$\check{\gamma}_i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}] = O(\delta_m^{1-3\lambda}). \quad (101)$$

Łącząc (101) z (90) uzyskujemy:

$$\boxed{\check{\gamma}_i'''(\hat{t}) = O(\delta_m^{1-3\lambda})}. \quad (102)$$

Podobnie korzystając z (89), (90) oraz (99) (dla $\hat{t} \in \psi_i([t_i, t_{i+3}])$) otrzymujemy:

$$\check{\gamma}_i''(\hat{t}) = O(\delta_m^{1-2\lambda}) + 2[(\hat{t} - \hat{t}_{i+2}) + (\hat{t} - \hat{t}_{i+1}) + (\hat{t} - \hat{t}_i)] \cdot O(\delta_m^{1-3\lambda}). \quad (103)$$

Korzystając z (86) oraz z Tw. Lagrange'a dla dowolnego $\hat{t} = \psi_i(t) \in \psi_i([t_i, t_{i+3}])$ (dla $j = 0, 1, 2$ i $t \in [t_i, t_{i+3}]$) istnieje $\xi \in [t_i, t_{i+3}]$ takie, że:

$$\hat{t} - \hat{t}_{i+j} = \frac{\psi_i(t) - \psi_i(t_{i+j})}{t - t_{i+j}} (t - t_{i+j}) = \psi_i'(\xi)(t - t_{i+j}) = O(\delta_m^{\lambda-1})O(\delta_m) = O(\delta_m^\lambda). \quad (104)$$

Podstawiając (104) do (103) otrzymujemy:

$$\boxed{\check{\gamma}_i''(\hat{t}) = O(\delta_m^{1-2\lambda})}. \quad (105)$$

C) **Oszacowanie różnicy** $f_i = \check{\gamma}_i \circ \psi_i - \gamma$.

W ostatnim kroku wykorzystamy uzyskane asymptotyki do oszacowania $f_i = \check{\gamma}_i \circ \psi_i - \gamma$ (na każdym I_i) i dla dowolnego $\lambda \in [0, 1)$ (patrz (69)). Łącząc (86), (87), (102) i (105) w (69) otrzymano:

1. $O(\check{\gamma}'''(\hat{t})\check{\psi}(t)^2\check{\psi}(t)) = O(\delta_m^{1-3\lambda})(O(\delta_m^{-1+\lambda}))^2O(\delta_m^{-2+\lambda}) = O(\delta_m^{1-3\lambda-2+2\lambda-2+\lambda}) = O(\delta_m^{-3})$,
2. $O(\check{\gamma}''(\hat{t})\check{\psi}(t)^2) = O(\delta_m^{1-2\lambda})(O(\delta_m^{-2+\lambda}))^2 = O(\delta_m^{1-2\lambda-4+2\lambda}) = O(\delta_m^{-3})$,
3. $O(\check{\gamma}''(\hat{t})\check{\psi}(t)\check{\psi}(t)) = O(\delta_m^{1-2\lambda})O(\delta_m^{-1+\lambda})O(\delta_m^{-3+\lambda}) = O(\delta_m^{1-2\lambda-1+\lambda-3+\lambda}) = O(\delta_m^{-3})$

Wstawiając powyższe formuły do (67) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} f_i(t) = & O(\delta_m^4) \cdot [O(\delta_m^{1-3\lambda}) \cdot O(\delta_m^{2\lambda-2}) \cdot O(\delta_m^{\lambda-2}) + O(\delta_m^{1-2\lambda}) \cdot O(\delta_m^{2\lambda-4}) \\ & + O(\delta_m^{1-2\lambda}) \cdot O(\delta_m^{\lambda-1}) \cdot O(\delta_m^{\lambda-3}) + O(1)], \end{aligned}$$

co ostatecznie dowodzi (65) z Tw. 3.4 (dla $\lambda \in [0, 1)$):

$$\boxed{f_i(t) = O(\delta_m^4) \cdot [O(\delta_m^{-3}) + O(\delta_m^{-3}) + O(\delta_m^{-3}) + O(1)] = O(\delta_m)}.$$

D) Rozważymy teraz jeszcze dwa szczególne przypadki:

D1) \mathcal{T}_m równomierne,

D2) $\lambda = 1$.

D1) *Obliczenia dla przypadku próbkowania równomiernego* $\mathcal{T}_u = \{\frac{iT}{m}\}_{i=0}^m$ *do policzenia asymptotyki (66) z Tw. 3.4*

Dla *specjalnego przypadku próbkowania równomiernego (27)* (gdzie $\beta = 1$ - patrz Def. 2.14) wzory (75), (82) i (84) (dla $\lambda \in [0, 1)$) przy warunku $t_{i+3} - t_{i+2} = t_{i+2} - t_{i+1} = t_{i+1} - t_i = \delta_m$ upraszczają się do:

$$\psi_i[t_{i+l}, t_{i+l+1}] = (t_{i+l+1} - t_{i+l})^{-1+\lambda} + O((t_{i+l+1} - t_{i+l})^{1+\lambda}), \text{ gdy } l = 0, 1, 2$$

oraz

$$\begin{aligned}\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] &= \frac{(\cancel{t_{i+2}-t_{i+1}})^{-1+\lambda} - (\cancel{t_{i+1}-t_i})^{-1+\lambda}}{t_{i+2}-t_i} + \frac{O((t_{i+1}-t_i)^{1+\lambda})}{t_{i+2}-t_i} = O(\delta_m^\lambda) \quad (106) \\ \psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] &= \frac{(\cancel{t_{i+3}-t_{i+2}})^{-1+\lambda} - (\cancel{t_{i+2}-t_{i+1}})^{-1+\lambda}}{t_{i+3}-t_{i+1}} - \frac{(\cancel{t_{i+2}-t_{i+1}})^{-1+\lambda} - (\cancel{t_{i+1}-t_i})^{-1+\lambda}}{t_{i+2}-t_i} + \\ &+ \frac{t_{i+3}-t_i}{O((t_{i+2}-t_{i+1})^{1+\lambda}) + O((t_{i+3}-t_{i+2})^{1+\lambda})} + \frac{O((t_{i+1}-t_i)^{1+\lambda}) + O((t_{i+2}-t_{i+1})^{1+\lambda})}{t_{i+2}-t_i} \\ &\leq \frac{O((t_{i+1+k}-t_{i+k})^{1+\lambda})}{(t_{i+1+k}-t_{i+k})^2} = O(\delta_m^{\lambda-1}),\end{aligned}$$

gdzie $k = 0, 1, 2$.

Podobnie w przypadku pochodnych ψ wzory (86) i (87) upraszczają się także do:

$$\boxed{\psi_i(t) = \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}), \quad \dot{\psi}_i(t) = O(\delta_m^\lambda) \quad \text{oraz} \quad \ddot{\psi}_i(t) = O(\delta_m^{\lambda-1}).} \quad (107)$$

Widać też z (107), że w tym przypadku $\dot{\psi}_i > 0$ asymptotycznie. Zatem dla próbkowania równomiernego $\{\frac{iT}{m}\}_{i=0}^m$, odwzorowanie ψ_i definiuje reparametryzację I_i na \hat{I}_i , dla dostatecznie dużych m , a więc można tutaj określać interpolanta $\hat{\gamma}(\hat{t})$ zamiast $\dot{\gamma}(\hat{t})$.

Oszacowanie $\hat{\gamma}(\hat{t})$ dla (27): Druga różnica dzielona (34) dla $k = 0, 1$ spełnia zależność:

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathcal{Y}}[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}]\| &= \left\| (t_{i+k+1} - t_{i+k})^{1-\lambda} \left[\dot{\gamma}(t_{i+k}) + \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k}) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2) \right] \right\| \\ &\leq \left\| (t_{i+k+1} - t_{i+k})^{1-\lambda} \right\| \left(\|\dot{\gamma}(t_{i+k})\| + \left\| \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k}) \right\| + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2) \right) \\ &= O(\delta_m^{1-\lambda}).\end{aligned}$$

Po uwzględnieniu obu zależności $t_{i+k+2} - t_{i+k+1} = t_{i+k+1} - t_{i+k} = \delta_m$ i $\dot{\gamma}(t_{i+k+1}) = \dot{\gamma}(t_{i+k}) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k}))$ uzyskujemy w tym wypadku "przyspieszenie" asymptotyki trzeciej różnicy dzielonej (korzystając też z (108)):

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathcal{Y}}[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}]\| &= \left\| \frac{\hat{\mathcal{Y}}[\hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}] - \hat{\mathcal{Y}}[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}]}{\hat{t}_{i+k+2} - \hat{t}_{i+k}} \right\| = \\ &= \left\| \frac{(t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{1-\lambda} \left[\dot{\gamma}(t_{i+k+1}) + \frac{(t_{i+k+2} - t_{i+k+1})}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k+1}) \right] + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2)}{(t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^\lambda [1 + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2)]} + (t_{i+k+1} - t_{i+k})^\lambda [1 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})^{1-\lambda} \left[\dot{\gamma}(t_{i+k}) + \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k}) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2) \right]}{(t_{i+k+1} - t_{i+k})^\lambda [2 + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)]} \right\|.\end{aligned} \quad (108)$$

We wzorze poniżej został wykorzystany wzór Taylora dla pierwszej pochodnej:

$$\dot{\gamma}(t_{i+k+1}) - \dot{\gamma}(t_{i+k}) = (t_{i+k+1} - t_{i+k})\ddot{\gamma}(t_{i+k}) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2) \quad (109)$$

i można oszacować ($\Delta = t_{i+k+l+1} - t_{i+k+l}$ dla $l = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned} \|\hat{\gamma}_i[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}]\| &\leq (t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{1-2\lambda} \left\| \frac{[\dot{\gamma}(t_{i+k+1}) - \dot{\gamma}(t_{i+k}) + \frac{\Delta}{2}(\ddot{\gamma}(t_{i+k+1}) - \ddot{\gamma}(t_{i+k}))] + O(\Delta^2)}{2 + O((t_{i+k+l+1} - t_{i+k+l})^2)} \right\| \\ &= (t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{1-2\lambda} \left\| (\ddot{\gamma}(t_{i+k+1}) + \ddot{\gamma}(t_{i+k})) \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})}{2} + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2) \right\| [2 + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2)] \\ &= (t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{2-2\lambda} [1 + O(t_{i+k+1} - t_{i+k})] [1 + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2)] = O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{2-2\lambda}) \\ &= O(\delta_m^{2-2\lambda}) \end{aligned}$$

I ponownie w czwartej różnicy dzielonej ($k = 0$):

$$\begin{aligned} \|\hat{\gamma}_i[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}, \hat{t}_{i+k+3}]\| &= \left\| \frac{\hat{\gamma}_i[\hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}, \hat{t}_{i+k+3}] - \hat{\gamma}_i[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}]}{\hat{t}_{i+k+3} - \hat{t}_{i+k}} \right\| = \\ &= \left\| \frac{(t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_{i+k+2}) + \frac{(t_{i+k+3} - t_{i+k+2})}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k+2}) + O((t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^2)]}{(t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^{2\lambda} [3 + O((t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^2)]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{1-\lambda} [\dot{\gamma}(t_{i+k+1}) + \frac{(t_{i+k+2} - t_{i+k+1})}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k+1}) + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2)]}{2(t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^{2\lambda} [3 + O((t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^2)]} \right\| \leq \\ &\leq (t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^{2-3\lambda} \frac{1}{2} \|(\ddot{\gamma}(t_{i+k+2}) + \ddot{\gamma}(t_{i+k+1}))\| + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2) [1 + O((t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^2)]^2 + \\ &\quad + (t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^{2-3\lambda} \frac{1}{2} \|(\ddot{\gamma}(t_{i+k+1}) + \ddot{\gamma}(t_{i+k}))\| + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2) [3 + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})^2)]^2 = \\ &= (t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^{2-3\lambda} (1 + O((t_{i+k+2} - t_{i+k+1})) [3 + O((t_{i+k+3} - t_{i+k+2})^2)]^2 = O(\delta_m^{2-3\lambda}). \end{aligned} \quad (110)$$

Stąd druga i trzecia pochodna γ mają asymptotykę:

$$\boxed{\hat{\gamma}_i''(t) = O(\delta_m^{2-2\lambda}) + O(\delta_m^{2-3\lambda})O(\delta_m^1) = O(\delta_m^{2-2\lambda})} \quad (111)$$

oraz

$$\boxed{\hat{\gamma}_i'''(t) = O(\delta_m^{2-3\lambda})}. \quad (112)$$

Podstawiając (107) oraz (111) i (112) do (69) otrzymujemy oszacowanie poszczególnych

wyrażeń dla próbkowania równomiernego:

1. $O(\hat{\gamma}_i'''(\hat{t})\psi_i(t)^2\ddot{\psi}_i(t)) = O(\delta_m^{2-3\lambda})O(\delta_m^{-1+\lambda})^2O(\delta_m^\lambda) = O(\delta_m^{2-3\lambda-2+2\lambda+\lambda}) = O(1),$
2. $O(\hat{\gamma}_i''(\hat{t})\dot{\psi}_i(t)^2) = O(\delta_m^{2-2\lambda})O(\delta_m^{2\lambda}) = O(\delta_m^2),$
3. $O(\hat{\gamma}_i'(\hat{t})\dot{\psi}_i(t)\ddot{\psi}_i(t)) = O(\delta_m^{2-2\lambda})O(\delta_m^{\lambda-1})O(\delta_m^{-1+\lambda}) = O(\delta_m^{2-2\lambda+\lambda-1-1+\lambda}) = O(1),$

i w konsekwencji:

$$\boxed{f_i(t) = O(\delta_m^4)(O(1) + O(1) + O(\delta_m^2) + O(1)) = O(\delta_m^4) + O(\delta_m^6) = O(\delta_m^4)}. \quad (113)$$

D2) Oszacowanie dla przypadku $\lambda = 1$

Poniższe wyniki zostały zacytowane z [1] dla potrzeby uwzględnienia wszystkich przypadków szczególnych w tej pracy.

Różnice dzielone ψ , gdy $k = 0, 1, 2$:

$$\Psi_i[t_{i+k}, t_{i+k+1}] = \|\dot{\gamma}(t_{i+k}) + \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})}{2} \ddot{\gamma}(t_{i+k}) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)\| = 1 + O(\delta_m^2),$$

$$\Psi_i[t_{i+k}, t_{i+k+1}, t_{i+k+2}] = \frac{(t_{i+k+2} - t_{i+k+1})(1 + O(\Delta))}{t_{i+k+2} - t_{i+k}} = O(\delta_m),$$

gdy $k = 0, 1$ oraz

$$\Psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] = O(1).$$

Stąd oszacowanie pochodnych funkcji ψ : $\dot{\psi}_i(t) = 1 + O(\delta^2)$, $\ddot{\psi}_i(t) = O(\delta)$ i $\ddot{\psi}_i(t) = O(1)$.

Widać, że $\dot{\psi} > 0$ asymptotycznie stąd w dalszym zapisie możemy stosować oznaczenie $\hat{\gamma}$ zamiast $\check{\gamma}$.

Oszacowania różnic dzielonych dla $\hat{\gamma}(\hat{t})$: $\hat{\gamma}_i[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}] = \hat{\gamma}(t_{i+k}) + \frac{(t_{i+k+1} - t_{i+k})}{2} \dot{\gamma}(t_{i+k}) + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^2)$, gdy $(k = 0, 1, 2)$ oraz: $\|\hat{\gamma}_i[\hat{t}_{i+k}, \hat{t}_{i+k+1}, \hat{t}_{i+k+2}]\| = O(1)$, gdy $(k = 0, 1)$ oraz $\|\hat{\gamma}_{3,i}[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}]\| = O(1)$.

Pochodne potrzebne do oszacowania: $\hat{\gamma}_i''(t) = O(1) + O(1)O(\delta_m) = O(1)$ i $\hat{\gamma}_i'''(t) = O(1)$.

Wyrażenia z (69) są równe:

$$O(\hat{\gamma}_i'''(\hat{t})(\dot{\psi}_i(t))^2\ddot{\psi}_i(t)) = O(1)(1 + O(\delta_m^2))^2O(\delta_m) = O(\delta_m) + O(\delta_m^3) + O(\delta_m^5) = O(\delta_m), \quad (114)$$

$$O(\hat{\gamma}_i''(\hat{t})\dot{\psi}_i(t)^2) = O(1)O(\delta_m^2) = O(\delta_m^2), \quad (115)$$

$$O(\hat{\gamma}_i'(\hat{t})\dot{\psi}_i(t)\ddot{\psi}_i(t)) = O(1)(1 + O(\delta_m^2))O(1) = O(1). \quad (116)$$

Podstawiając (114), (115) oraz (116) do (69) oszacowanie funkcji $f_i(t)$ dla $\lambda = 1$ wynosi:

$$\begin{aligned}
f_i(t) &= O(\delta_m^4)[O(\hat{\gamma}_i'''(\hat{t})(\hat{\psi}_i(t))^2\hat{\psi}_i(t) + \hat{\gamma}_i''(\hat{t})(\hat{\psi}_i(t))^2 + \hat{\gamma}_i'(\hat{t})\hat{\psi}_i(t)\hat{\psi}_i'(t)) + O(1)] = \\
&= O(\delta_m^4)\underbrace{[O(\hat{\gamma}_i'''(\hat{t})(\hat{\psi}_i(t))^2\hat{\psi}_i(t))]}_{(114)} + \underbrace{[O(\hat{\gamma}_i''(\hat{t})(\hat{\psi}_i(t))^2)]}_{(115)} + \underbrace{[O(\hat{\gamma}_i'(\hat{t})\hat{\psi}_i(t)\hat{\psi}_i'(t))]}_{(116)} + O(1) = \\
&= O(\delta_m^4)(O(\delta_m) + O(\delta_m^2) + O(1) + O(1)) = O(\delta_m^4) + O(\delta_m^5) + O(\delta_m^6) = O(\delta_m^4).
\end{aligned} \tag{117}$$

Dowód Tw. 3.4 jest więc zakończony. \square

3.1.2 Ostrość asymptotyki w oszacowaniu trajektorii γ

W tym podrozdziale został umieszczony **drugi wynik pracy doktorskiej**, opublikowany w [7]. W Lematach 3.5, 3.6 oraz 3.7 zostanie udowodniona ostrość (patrz Def. 2.23) wyników z Tw. 3.4 a mianowicie dla następujących przypadków:

- próbkowania mniej lub bardziej równomiernego, krzywej $\gamma_l = (t, 0)$ i $\lambda \in [0, 1)$,
- próbkowania mniej lub bardziej równomiernego, krzywej $\gamma_q = (t^4 + t, 0)$ i $\lambda = 1$,
- próbkowania równomiernego i dowolnego λ

Ostrość oszacowania zbieżności dla Tw. 3.4, próbkowania mniej lub bardziej równomiernego oraz $\lambda \in [0, 1)$.

Lemat 3.5. *Załóżmy, że prosta $\gamma_l(t) = (t, 0) \in \mathbb{E}^2$ jest próbkowana mniej lub bardziej równomiernie (na kolejnych przedziałach I_i) według schematu:*

$$t_i = \frac{i}{m}, \quad t_{i+1} = \frac{i+1}{m}, \quad t_{i+2} = \frac{i+2}{m} \quad \text{i} \quad t_{i+3} = \frac{i+4}{m}. \tag{118}$$

Tu $\delta_m = \frac{2}{m}$ i $\beta = \frac{1}{2}$ - patrz Def. 2.14. Dane zredukowane $q_i = \gamma_l(t_i)$ są uzupełnione przez $\hat{\mathcal{T}}$ zastępujące \mathcal{T} określone jako parametryzacja wykładnicza (patrz (30)). Pokażemy iż:

$$\boxed{f_i^l = \check{\gamma}_i \circ \psi_i - \gamma_l = \vec{K}\delta_m + O(\delta_m^\eta),}$$

asymptotycznie dla pewnych $\eta > 1$ i pewnego $\vec{K} \neq 0$ (niezależne od m).

Dowód. Aby udowodnić ostrość Tw. 3.4 dla $\lambda \in [0, 1)$ wystarczy pokazać powyższą równość dla dowolnego $\bar{t} \in I_i = [t_i, t_{i+3}]$. Stała \bar{K} i wyrażenie $O(\delta^\eta)$ są niezależne od m .

Dla $\bar{\delta} = \frac{\delta_m}{2}$ próbkowanie (118) można zapisać:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \bar{\delta}, \quad t_2 = 2\bar{\delta} \quad \text{oraz} \quad t_3 = 4\bar{\delta}, \quad (119)$$

a parametryzację wykładniczą (30) dla $\{\gamma(t_i)\}_{i=0}^3$ jako:

$$\hat{t}_0 = 0, \quad \hat{t}_1 = \bar{\delta}^\lambda, \quad \hat{t}_2 = 2\bar{\delta}^\lambda \quad \text{oraz} \quad \hat{t}_3 = (2 + 2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda. \quad (120)$$

Kolejne różnice dzielone dla funkcji $\psi_0 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ (określonej wzorem (72)) są następujące:

$$\psi_0[0] = 0, \quad \psi_0[0, \bar{\delta}] = \psi_0[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}] = \bar{\delta}^{\lambda-1} \quad \text{oraz} \quad \psi_0[0, \bar{\delta}, 2\bar{\delta}] = 0. \quad (121)$$

Łącząc $\psi_0[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}] = (1/3)(2^{\lambda-1} - 1)\bar{\delta}^{\lambda-2}$ z (121) otrzymujemy:

$$\psi_0[0, \bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}] = \frac{1}{12}(2^{\lambda-1} - 1)\bar{\delta}^{\lambda-3}. \quad (122)$$

Uwzględniając (72), (119), (121) i (122) można zapisać:

$$\psi_0(t) = \bar{\delta}^{\lambda-1}t + \frac{1}{12}(2^{\lambda-1} - 1)\bar{\delta}^{\lambda-3}t(t - \bar{\delta})(t - 2\bar{\delta}), \quad (123)$$

dla $t \in [0, 4\bar{\delta}] = I_0$. Podstawiając $\bar{t} = 3\bar{\delta} \in I_0$ do (123) daje:

$$\psi_0(3\bar{\delta}) = \left(\frac{5}{2} + 2^{\lambda-2}\right)\bar{\delta}^\lambda. \quad (124)$$

Podobnie, korzystając z (120) i dla γ otrzymujemy:

$$\check{\gamma}_0(0) = \vec{0}, \quad \check{\gamma}_0(\bar{\delta}^\lambda) = (\bar{\delta}, 0), \quad \check{\gamma}_0(2\bar{\delta}^\lambda) = (2\bar{\delta}, 0), \quad \check{\gamma}_0((2^\lambda + 2)\bar{\delta}^\lambda) = (4\bar{\delta}, 0).$$

W konsekwencji kolejne różnice dzielone $\check{\gamma}$ są następujące:

$$\check{\gamma}_0[0] = \vec{0}, \quad \check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda] = \check{\gamma}_0[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda] = (\bar{\delta}^{1-\lambda}, 0) \quad \text{oraz} \quad \check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda] = \vec{0}. \quad (125)$$

Dodatkowo, jeśli $\check{\gamma}_0[2\bar{\delta}^\lambda, (2 + 2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] = (2^{1-\lambda}\bar{\delta}^{1-\lambda}, 0)$ to:

$$\check{\gamma}_0[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2 + 2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{2^{1-\lambda} - 1}{2^\lambda + 1}\bar{\delta}^{1-2\lambda}, 0\right). \quad (126)$$

Stąd po uwzględnieniu (125) i (126):

$$\check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{2^{1-\lambda} - 1}{(2^\lambda + 1)(2 + 2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-3\lambda}, 0 \right). \quad (127)$$

Ponownie łącząc (120), (125) i (127) uzyskano dla $\hat{t} = \psi_0(t)$ (z $t \in [0, 4\bar{\delta}]$), następujące wyrażenie:

$$\check{\gamma}_0(\hat{t}) = \left(\bar{\delta}^{1-\lambda} \hat{t} + \frac{2^{1-\lambda} - 1}{(2^\lambda + 1)(2 + 2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-3\lambda} \hat{t}(\hat{t} - \bar{\delta}^\lambda)(\hat{t} - 2\bar{\delta}^\lambda), 0 \right). \quad (128)$$

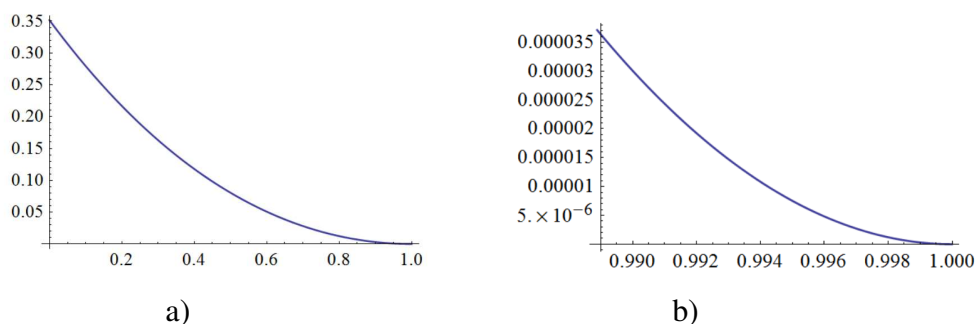
Łącząc (124) z (128) oraz upraszczając i grupując pewne wyrażenia we wzorze uzyskany "błąd różnicy" dla $t = 3\bar{\delta}$ wynosi:

$$f_0^l(3\bar{\delta}) = \check{\gamma}_0(\psi_0(3\bar{\delta})) - \gamma(3\bar{\delta}) = ((1/2)\rho(\lambda)\delta_m, 0),$$

gdzie dla $\lambda \in [0, 1)$ funkcja $\rho(\lambda)$ wynosi:

$$\rho(\lambda) = \left(\frac{5}{2} + 2^{\lambda-2} \right) \left(1 + \left(\frac{1}{2} + 2^{\lambda-2} \right) \left(\frac{3}{2} + 2^{\lambda-2} \right) \frac{2^{1-\lambda} - 1}{(2^\lambda + 1)(2 + 2^\lambda)} \right) - 3. \quad (129)$$

Rys. 20 przedstawia funkcję ρ na przedziale $[0, 1)$ razem z jej powiększeniem na przedziale $[0.899, 1)$. Współczynnik $\rho(\lambda)$ stojący przy δ nie zanika więc funkcja $f_0^l(3\bar{\delta}) = O(\delta)$ dla $\lambda \in [0, 1)$. Tymczasem dla przypadku gdy $\lambda = 1$ współczynnik $\rho(1) = 0$ i $f_0^l(3\bar{\delta}) = 0$, co prowadzi do wniosku, że nie można udowodnić ostrości w tym konkretnym przypadku dla $\lambda = 1$. Omawiając szerzej ten przypadek warto zauważyć, że obie funkcje γ i $\check{\gamma}$ pokrywają się ($t_i = \hat{t}_i$) dając w wyniku $f^l \equiv 0$ na $[0, T]$. W konsekwencji ostrość oszacowania z Tw. 3.4 została udowodniona (patrz Def. 2.23). \square



Rys. 20. Wykres $\rho(\lambda) > 0$ z (129) na a) $[0, 1)$ i b) $[0, 899, 1)$.

W poprzednim lemacie pokazaliśmy ostrość dla próbkowania mniej lub bardziej równomiernego dla prostej i $\lambda \in [0, 1)$. Dla $\lambda = 1$ ostrość pokażemy dla krzywej $\gamma_q = (t^4 + t, 0)$.

Ostrość zbieżności dla próbkowania mniej lub bardziej równomiernego, krzywej $\gamma_q = (t^4 + t, 0)$ i $\lambda = 1$.

Lemat 3.6. Załóżmy, że krzywa $\gamma_q = (t^4 + t, 0) \in \mathbb{E}^2$ jest próbkowana mniej lub bardziej równomiernie (na kolejnych przedziałach I_i) według schematu (118). Dane zredukowane $q_i = \gamma_q(t_i) = \{0, \delta + \delta^4, 2\delta + 16\delta^4, 4\delta + 256\delta^4\}$ są uzupełnione przez $\hat{\mathcal{T}}$ zastępujące \mathcal{T} określone jako parametryzacja wykładnicza (patrz (30)). Pokażemy iż:

$$f_i^q = \check{\gamma}_i \circ \psi_i - \gamma_q = \vec{K} \delta_m^4 + O(\delta_m^\eta),$$

asymptotycznie dla pewnych $\eta > 1$ i pewnego $\vec{K} \neq 0$ (niezależne od m).

Dowód. Aby udowodnić ostrość Tw. 3.4 dla $\lambda = 1$ wystarczy pokazać powyższą równość dla dowolnego $\bar{t} \in I_i = [t_i, t_{i+3}]$. Stała \vec{K} i wyrażenie $O(\delta^\eta)$ są niezależne od m .

Dla $\bar{\delta} = \delta_m/2$ próbkowanie (118) na I_0 można zapisać jako (119) a parametryzację wykładniczą (30) dla $\{\gamma_q(t_i)\}_{i=0}^3$ i $\lambda = 1$ jako:

$$\hat{t}_0 = 0, \quad \hat{t}_1 = \delta + \delta^4, \quad \hat{t}_2 = 2\delta + 16\delta^4 \quad \text{oraz} \quad \hat{t}_3 = 4\delta + 256\delta^4. \quad (130)$$

Kolejne różnice dzielone dla funkcji $\psi_0 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ (określonej wzorem (72)) są następujące:

$$\begin{aligned} \psi_0[0] &= 0, & \psi_0[0, \bar{\delta}] &= 1 + \delta^3, & \psi_0[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}] &= 1 + 15\delta^3 & \text{oraz} \\ \psi_0[0, \bar{\delta}, 2\bar{\delta}] &= 7\delta^2. \end{aligned} \quad (131)$$

Teraz uwzględniając, że $\psi_0[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}] = 35\delta^2$ razem z (131) otrzymujemy:

$$\psi_0[0, \bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}] = 7\delta. \quad (132)$$

Uwzględniając (72), (119), (131) i (132) można zapisać:

$$\psi_0(t) = 7\delta t^3 - 14\delta^2 t^2 + (8\delta^3 + 1)t, \quad (133)$$

dla $t \in [0, 4\bar{\delta}] = I_0$. Podstawiając $\bar{t} = \frac{\bar{\delta}}{2} \in I_0$ do (133) daje:

$$\psi_0\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right) = \frac{\delta}{2} + \frac{11\delta^4}{8}. \quad (134)$$

Kolejne różnice dzielone $\hat{\gamma}$ są następujące:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_0[0] &= \vec{0}, \quad \hat{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^4 + \bar{\delta}] = \hat{\gamma}_0[\bar{\delta}^4 + \bar{\delta}, 16\bar{\delta}^4 + 2\bar{\delta}] = (1, 0) \text{ oraz} \\ \hat{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^4 + \bar{\delta}, 16\bar{\delta}^4 + 2\bar{\delta}] &= (0, 0). \end{aligned} \quad (135)$$

Dodatkowo, jeśli $\hat{\gamma}_0[16\bar{\delta}^4 + 2\bar{\delta}, 256\bar{\delta}^4 + 4\bar{\delta}] = (1, 0)$ to:

$$\hat{\gamma}_0[\bar{\delta}^4 + \bar{\delta}, 16\bar{\delta}^4 + 2\bar{\delta}, 256\bar{\delta}^4 + 4\bar{\delta}] = (0, 0). \quad (136)$$

Stąd po uwzględnieniu (135) i (136):

$$\hat{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^4 + \bar{\delta}, 16\bar{\delta}^4 + 2\bar{\delta}, 256\bar{\delta}^4 + 4\bar{\delta}] = (0, 0). \quad (137)$$

Ponownie łącząc (130), (135) i (137) uzyskano dla $\hat{t} = \psi_0(t)$ (z $t \in [0, 4\bar{\delta}]$), następujące wyrażenie:

$$\hat{\gamma}_0(\hat{t}) = (\hat{t}, 0). \quad (138)$$

Łącząc (124) z (128) oraz upraszczając i grupując pewne wyrażenia we wzorze uzyskany "błąd różnicy" dla $t = \frac{\bar{\delta}}{2}$ wynosi:

$$f_0^l\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right) = \hat{\gamma}_0\left(\psi_0\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right)\right) - \gamma\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right) = \frac{21\delta^4}{16},$$

□

Ostrość oszacowania zbieżności dla próbkowania równomiernego, krzywej $\gamma_q = (t^4 + t, 0)$ i dowolnego λ . W następnym lemacie udowodnimy ostrość Tw. 3.4 określoną dla próbkowania równomiernego (czyli $\delta_m = (T/m)$). Bez straty można założyć, że $[0, T]$ jest przesuwany w lewo wprowadzając $\varepsilon > 0$ do $[-\varepsilon, T - \varepsilon]$ więc asymptotycznie zawiera wszystkie węzły interpolacyjne $t_i = -2\delta_m$, $t_{i+1} = -\delta_m$, $t_{i+2} = 0$ i $t_{i+3} = \delta_m$. Dla uproszczenia notacji użytej dla t_{i+j} (gdzie $j = 0, 1, 2, 3$) przyjęto $i = 0$. Testy przeprowadzone są na krzywej regularnej $\gamma_q(t) = (t^4 + t, 0)$. Asymptotyka odpowiednich różnic $f_i^q = \check{\gamma} \circ \psi - \gamma_q$ została przebadana na $I_0 = [-2\delta_m, \delta_m]$.

Lemat 3.7. Załóżmy, że krzywa regularna $\gamma_q(t) = (t^4 + t, 0)$ jest próbkowana równomiernie (na kolejnych przedziałach I_i) według schematu:

$$t_0 = -2\delta_m, \quad t_1 = -\delta_m, \quad t_2 = 0 \quad \text{i} \quad t_3 = \delta_m \quad (139)$$

Tu $\delta_m = \frac{1}{m}$ i $\beta = 1$ - patrz Def. 2.14. Dane zredukowane $q_i = \gamma_i(t_i)$ są uzupełnione przez $\hat{\mathcal{F}} \approx \mathcal{F}$ określone jako parametryzacja wykładnicza (patrz (30)). Pokażemy iż:

$$\boxed{f_i^q = \check{\gamma}_i \circ \psi_i - \gamma_q = \vec{K} \delta_m + O(\delta_m^\eta),}$$

asymptotycznie dla pewnych $\eta > 1$ i pewnego $\vec{K} \neq 0$ (niezależne od m).

Dowód. Dla podanych powyżej węzłów równomiernych (z $\delta_m = T/m$)⁶ parametryzacja wykładnicza (30) dla $\{\gamma_q(t_i)\}_{i=0}^3$ prowadzi do:

$$\begin{aligned} \hat{t}_0 &= 0, \quad \hat{t}_1 = (\delta - 15\delta^4)^\lambda = \delta^\lambda \overbrace{(1 - 15\delta^3)^\lambda}^{f_1}, \quad \hat{t}_2 = (\delta - 15\delta_m^4)^\lambda + \delta^\lambda \overbrace{(1 - \delta^3)^\lambda}^{f_2} \quad \text{oraz} \\ \hat{t}_3 &= (\delta - 15\delta^4)^\lambda + (\delta - \delta^4)^\lambda + \delta^\lambda \overbrace{(1 + \delta^3)^\lambda}^{f_3}. \end{aligned} \quad (140)$$

Pierwsze różnice dzielone dla $\psi : [-2\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ wyrażają się następująco:⁷

$$\begin{aligned} \psi[-2\delta] &= 0, \quad \psi[-2\delta, -\delta] = \frac{(\delta - 15\delta^4)^\lambda}{\delta}, \\ \psi[-\delta, 0] &= \frac{(\delta - \delta^4)^\lambda}{\delta}, \quad \psi[0, \delta] = \frac{(\delta + \delta^4)^\lambda}{\delta}. \end{aligned} \quad (141)$$

Kolejne różnice to:

$$\begin{aligned} \psi[-2\delta, -\delta, 0] &= \frac{(\delta - \delta^4)^\lambda - (\delta - 15\delta^4)^\lambda}{2\delta^2}, \\ \psi[-\delta, 0, \delta] &= \frac{(\delta + \delta^4)^\lambda - (\delta - \delta^4)^\lambda}{2\delta^2}, \end{aligned} \quad (142)$$

co w konsekwencji prowadzi do:

$$\psi[-2\delta, -\delta, 0, \delta] = \frac{(\delta - 15\delta^4)^\lambda - 2(\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta + \delta^4)^\lambda}{6\delta^3}. \quad (143)$$

Podstawiając (72) do (139), (141), (142), (143) i stosując funkcję programu Mathematica -

⁶Omijamy indeks m w dalszych obliczeniach

⁷Omijamy 0 w indeksie dolnym przy ψ

Collect (*Collect*[*Collect*[\(\psi[t, \lambda], \lambda], t]) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (\delta - 15\delta^4)^\lambda + (\delta - \delta^4)^\lambda + \frac{-(\delta - 15\delta^4)^\lambda + 5(\delta - \delta^4)^\lambda + 2(\delta + \delta^4)^\lambda}{6\delta} t \\ & + \frac{(\delta + \delta^4)^\lambda - (\delta - \delta^4)^\lambda}{2\delta^2} t^2 + \frac{(\delta - 15\delta^4)^\lambda - 2(\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta + \delta^4)^\lambda}{6\delta^3} t^3, \end{aligned} \quad (144)$$

dla dowolnego $t \in [-2\delta, \delta] = \hat{I}$. Oszacowanie (144) w punkcie $\bar{t} = (\delta/2) \in \hat{I}$ korzystając z obliczeń symbolicznych *Collect*[\(\psi[\delta/2, \lambda], \lambda)] prowadzi do:

$$\psi(\bar{t}) = (15/16)(\delta - 15\delta^4)^\lambda + (5/4)(\delta - \delta^4)^\lambda + (5/16)(\delta + \delta^4)^\lambda. \quad (145)$$

Ponieważ γ_q i $\hat{\gamma}$ pokrywają się w punktach interpolacji $\{q_{i+j}\}_{j=0}^3$ mamy $\hat{\gamma}(\hat{t}_2) = \vec{0}$ oraz:

$$\hat{\gamma}(\hat{t}_0) = (-2\delta + 16\delta^4, 0), \quad \hat{\gamma}(\hat{t}_1) = (-\delta + \delta^4, 0), \quad \hat{\gamma}(\hat{t}_3) = (\delta + \delta^4, 0).$$

Stąd, uwzględniając (140), odpowiednie różnice dzielone $\hat{\gamma}$ wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}[\hat{t}_0] &= (-2\delta + 16\delta^4, 0), \quad \hat{\gamma}[\hat{t}_0, \hat{t}_1] = ((\delta - 15\delta^4)^{1-\lambda}, 0), \\ \hat{\gamma}[\hat{t}_1, \hat{t}_2] &= ((\delta - \delta^4)^{1-\lambda}, 0) \text{ oraz } \hat{\gamma}[\hat{t}_2, \hat{t}_3] = ((\delta + \delta^4)^{1-\lambda}, 0). \end{aligned} \quad (146)$$

Następnie, trzecie różnice dzielone spełniają:

$$\hat{\gamma}[\hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_2] = \left(\frac{-(\delta - 15\delta^4)^{1-\lambda} + (\delta - \delta^4)^{1-\lambda}}{(\delta - 15\delta^4)^\lambda + (\delta - \delta^4)^\lambda}, 0 \right), \quad (147)$$

$$\hat{\gamma}[\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3] = \left(\frac{-(\delta - \delta^4)^{1-\lambda} + (\delta + \delta^4)^{1-\lambda}}{(\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta + \delta^4)^\lambda}, 0 \right). \quad (148)$$

Po zastosowaniu funkcji *Simplify* czwartą różnicę dzieloną zapiszemy jako:

$$\hat{\gamma}[\hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3] = \left(\frac{\frac{(\delta - 15\delta^4)^{1-\lambda} - (\delta - \delta^4)^{1-\lambda}}{(\delta - 15\delta^4)^\lambda + (\delta - \delta^4)^\lambda} + \frac{-(\delta - \delta^4)^{1-\lambda} + (\delta + \delta^4)^{1-\lambda}}{(\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta + \delta^4)^\lambda}}{(\delta - 15\delta^4)^\lambda + (\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta + \delta^4)^\lambda}, 0 \right). \quad (149)$$

Wstawiając (140), (145), (146), (147) i (149) do wzoru interpolacyjnego Newtona (z $\hat{t} = \psi(\bar{t})$):

$$\begin{aligned} f^q(\bar{t}) = & \left(-2\delta + 16\delta^4 + \hat{t}\kappa_1^{1-\lambda} + \frac{\hat{t}(\hat{t} - \kappa_1^\lambda)(\kappa_2^{1-\lambda} - \kappa_1^{1-\lambda})}{\kappa_1^\lambda + \kappa_2^\lambda} \right. \\ & \left. + \frac{\hat{t}(\hat{t} - \kappa_1^\lambda)(\hat{t} - \kappa_1^\lambda - \kappa_2^\lambda)}{\kappa_1^\lambda + \kappa_2^\lambda + \kappa_3^\lambda} \left(\frac{\kappa_1^{1-\lambda} - \kappa_2^{1-\lambda}}{\kappa_1^\lambda + \kappa_2^\lambda} + \frac{\kappa_3^{1-\lambda} - \kappa_2^{1-\lambda}}{\kappa_2^\lambda + \kappa_3^\lambda} \right), 0 \right), \end{aligned} \quad (150)$$

gdzie $\kappa_1 = \delta - 15\delta^4$, $\kappa_2 = \delta - \delta^4$, $\kappa_3 = \delta + \delta^4$

Wyrażenie (150) jest w postaci, w której możliwe jest jego szacowanie dla $\lambda = 1$ lub $\lambda = 0$. Po zastosowaniu funkcji *Simplify* podstawienie $\lambda = 1$ lub $\lambda = 0$ prowadzi od razu do wyniku $f^q(\bar{t}) = \frac{15}{16}\delta^4$. W konsekwencji dowodzi to ostrości Tw. 3.4 dla próbkowania równomiernego i krzywych regularnych i dwóch przypadków $\lambda = 1$ lub $\lambda = 0$. Aby obliczyć (150) dla innych $\lambda \in (0, 1)$, użyto funkcji programu *Mathematica Series*[$f_i[\delta], \{\delta, 0, 3\}$], aby zastosować rozwinięcie Taylora do 3 rzędu do wyrażeń f_i ze wzoru (140) (dla $i = 1, 2, 3$):

$$f_1(\delta) = (1 - 15\delta^3)^\lambda = 1 - 15\lambda\delta^3 + O(\delta^4), \quad (151)$$

$$f_2(\delta) = (1 - \delta^3)^\lambda = 1 - \lambda\delta^3 + O(\delta^4), \quad (152)$$

$$f_3(\delta) = (1 + \delta^3)^\lambda = 1 + \lambda\delta^3 + O(\delta^4). \quad (153)$$

Podstawiając (151), (152) i (153) do (140) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \hat{t}_1 &= \delta^\lambda (1 - 15\lambda\delta^3 + O(\delta^4)), \quad \hat{t}_2 = \delta^\lambda (1 - 15\lambda\delta_m^3 + O(\delta^4)) + \delta^\lambda (1 - \lambda\delta^3 + O(\delta^4)), \\ \hat{t}_3 &= \delta^\lambda (1 - 15\lambda\delta^3 + O(\delta^4)) + \delta^\lambda (1 + O(\delta^4)). \end{aligned} \quad (154)$$

Pierwsza współrzędna funkcji $f^q(t) = \hat{\gamma} \circ \psi - \gamma_q$ zdefiniowana w programie *Mathematica* to:

$$\text{fun}[\lambda_]:= \hat{\gamma}[\text{Factor}[\text{Collect}[\psi[\delta/2, \lambda], \lambda], \lambda] - ((\delta/2)^4 + \delta/2)]. \quad (155)$$

Obliczając kolejne różnice dzielone dla ψ oraz $\hat{\gamma}$ oraz same funkcje z uwzględnieniem (154) i podstawiając do wzoru (155) (bez *Simplify*) otrzymano:

$$\text{fun}(\lambda) = \left(\frac{255}{16} + \frac{15}{8}(14 - 14\lambda) - 15\lambda + \frac{5}{8}(-6 + 6\lambda) + \frac{5}{2}(-15 + 15\lambda) \right) \delta^4 + O(\delta^5)$$

lub z *Simplify*: $\text{fun}(\lambda) = \frac{15}{16}\delta^4 + O(\delta^5)$. Ostatnie wyrażenie potwierdza ostrość Tw. 3.4 dla dowolnego $\lambda \in (0, 1)$ i równomiernego próbkowania. Co w konsekwencji łącząc dwa przypadki prowadzi do potwierdzenia ostrości dla próbkowania równomiernego i dowolnego $\lambda \in [0, 1]$. Podsumowując, ostrość w Tw. 3.4 została potwierdzona dla wymienionych wcześniej przypadków próbkowań oraz wartości λ . □

3.1.3 Konieczność założenia dopuszczenia próbkowania mniej lub bardziej równomiernego w Tw. 3.4

Kolejne wyniki poniższego **podrozdziału zostały zawarte w publikacji [3]**. W poniższym lemacie zostanie pokazane, że *mniej lub bardziej równomierność* w Tw. 3.4 (z $\lambda \in [0, 1)$) *jest warunkiem koniecznym dla prawdziwości Tw. 3.4*. Obliczenia pokażą, że wybrane próbkowanie dopuszczalne (156) nie spełnia warunku mniej lub bardziej równomierności z Def. 2.14 (z $\delta_m \rightarrow 0$). Dla uproszczenia zapisu t_{i+j} (z $j = 0, 1, 2, 3$) przyjęto, że $i = 0$. Asymptotyka $f^q(t) = (\check{\gamma}_i \circ \psi_i)(t) - \gamma_q(t)$ została określona dla podprzedziału $I_0 = [-\delta_m, \delta_m]$.

Lemat 3.8. *Założmy, że krzywa regularna $\gamma_q(t) = (t^4 + t, 0)$ nie jest próbkowana mniej lub bardziej równomiernie. Rozważmy następujące próbkowanie, które **nie jest** mniej lub bardziej równomierne ale jest próbkowaniem dopuszczalnym (patrz Def. 2.13), na odpowiadającym segmencie $[t_0, t_3] \subseteq (0, T)$ (Uwaga: Rozważany segment powstał w wyniku przesunięcia krzywej oryginalnej : $\gamma(0) = q_0$ a krzywa przesunięta $\check{\gamma}(t) = \gamma(t - \delta)$ więc $\check{\gamma}(-\delta) = \gamma(0)$, pomijamy m w indeksie dolnym):*

$$t_0 = -\delta, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \delta^2 \quad \text{ i } \quad t_3 = \delta. \quad (156)$$

Pokażemy, iż brak spełnienia warunku mniej lub bardziej równomierności powoduje, że Tw. 3.4 nie jest spełnione dla $\lambda \in [0, 1)$ ale pozostaje spełnione dla $\lambda = 1$. Tak więc

$$\boxed{f_i^q = \check{\gamma}_i \circ \psi_i - \gamma_q \neq O(\delta),}$$

Dowód. Parametryzacja wykładnicza (30) zastosowana do $\{\gamma_q(t_i)\}_{i=0}^3$ i (156) daje (asymptotycznie):

$$\begin{aligned} \hat{t}_0 &= 0, \quad \hat{t}_1 = (\delta - \delta^4)^\lambda, \quad \hat{t}_2 = (\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta^2 + \delta^8)^\lambda \quad \text{ oraz} \\ \hat{t}_3 &= (\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda + (\delta^2 + \delta^8)^\lambda. \end{aligned} \quad (157)$$

Odpowiednie różnice dzielone dla $\psi_0 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają:

$$\begin{aligned}\psi_0[-\delta] &= 0, \quad \psi[-\delta, 0] = \frac{(\delta - \delta^4)^\lambda}{\delta}, \quad \psi_0[0, \delta^2] = \frac{(\delta^2 + \delta^8)^\lambda}{\delta^2} \text{ oraz} \\ \psi_0[\delta^2, \delta] &= \frac{(\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda}{\delta - \delta^2}.\end{aligned}\quad (158)$$

W konsekwencji:

$$\begin{aligned}\psi_0[-\delta, 0, \delta^2] &= \frac{-\delta(\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta^2 + \delta^8)^\lambda}{\delta^3(1 + \delta)}, \\ \psi_0[0, \delta^2, \delta] &= -\frac{\delta(\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda - (\delta^2 + \delta^8)^\lambda + \delta(\delta^2 + \delta^8)^\lambda}{(-1 + \delta)\delta^3},\end{aligned}\quad (159)$$

i korzystając z funkcji *Factor* pakietu *Mathematica* otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\psi_0[-\delta, 0, \delta^2, \delta] &= \frac{\delta(\delta - \delta^4)^\lambda + \delta^2(\delta - \delta^4)^\lambda - \delta(\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda}{2(-1 + \delta)\delta^4(1 + \delta)} \\ &\quad + \frac{2(\delta^4 + \delta^8)^\lambda - \delta^2(\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda - \delta(\delta^2 + \delta^8)^\lambda - \delta^2(\delta^2 + \delta^8)^\lambda}{2(-1 + \delta)\delta^4(1 + \delta)}.\end{aligned}\quad (160)$$

Łącząc (70) z (156), (158), (159), (160) i *Collect[Factor[$\psi[t, \lambda]$], t]* otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned}\psi_0(t) &= \frac{\kappa_3(-2\delta^4 + 2\delta^6)}{2(-1 + \delta)\delta^4(1 + \delta)} + \frac{t^3(\kappa_3(-\delta + \delta^2) - \kappa_1(\delta + \delta^2) + \kappa_2(2 - \delta - \delta^2))}{2(-1 + \delta)\delta^4(1 + \delta)} \\ &\quad + \frac{t^2((\delta^2 - \delta^4)(\kappa_3 - \kappa_1 - \kappa_2))}{2(-1 + \delta)\delta^4(1 + \delta)} + \frac{t(\kappa_3(-\delta^4 + \delta^5) + \kappa_1(\delta^4 + \delta^5) + \kappa_2(-2\delta^2 + \delta^4 + \delta^5))}{2(-1 + \delta)\delta^4(1 + \delta)},\end{aligned}\quad (161)$$

gdzie $\kappa_1 = (\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda$, $\kappa_2 = (\delta^2 + \delta^8)^\lambda$ i $\kappa_3 = (\delta - \delta^4)^\lambda$ na I_0 .

Funkcja $\psi_0(t)$ ze wzoru (161) w punkcie $\bar{t} = \frac{\delta}{2}$ po zastosowaniu funkcji *Factor[$\psi[\delta/2, \lambda]$]* redukuje się do:

$$\psi_0(\bar{t}) = \frac{3((\delta - \delta^4)^\lambda(-5\delta - \delta^2 + 6\delta^3) - \kappa_1(\delta - \delta^2 - 2\delta^3))}{16(-1 + \delta)\delta(1 + \delta)} - \frac{3\kappa_2(2 + \delta - \delta^2 - 2\delta^3)}{16(-1 + \delta)\delta(1 + \delta)}.\quad (162)$$

Ponieważ γ_q i $\check{\gamma}_0$ pokrywają się w punktach interpolacyjnych $\{q_{i+j}\}_{j=0}^3$ mamy $\check{\gamma}_0(\hat{t}_1) = \vec{0}$,

$$\check{\gamma}_0(\hat{t}_0) = (-\delta + \delta^4, 0), \quad \check{\gamma}_0(\hat{t}_2) = (\delta^2 + \delta^8, 0), \quad \check{\gamma}_0(\hat{t}_3) = (\delta + \delta^4, 0).$$

Stąd z (157) odpowiednie różnice dzielone $\check{\gamma}$ równe są:

$$\begin{aligned}\check{\gamma}[\hat{t}_0] &= (-\delta + \delta^4, 0), \quad \check{\gamma}[\hat{t}_0, \hat{t}_1] = \left((\delta - \delta^4)^{1-\lambda}, 0 \right), \\ \check{\gamma}[\hat{t}_1, \hat{t}_2] &= \left((\delta^2 + \delta^8)^{1-\lambda}, 0 \right) \text{ oraz } \check{\gamma}[\hat{t}_2, \hat{t}_3] = \left((\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^{1-\lambda}, 0 \right).\end{aligned}\quad (163)$$

Podobnie różnice dzielone wyższych rzędów spełniają:

$$\begin{aligned}\check{\gamma}_0[\hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_2] &= \left(\frac{-(\delta - \delta^4)^{1-\lambda} + (\delta^2 + \delta^8)^{1-\lambda}}{(\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta^2 + \delta^8)^\lambda}, 0 \right), \\ \check{\gamma}_0[\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3] &= \left(\frac{(\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^{1-\lambda} - (\delta^2 + \delta^8)^{1-\lambda}}{(\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda + (\delta^2 + \delta^8)^\lambda}, 0 \right),\end{aligned}\quad (164)$$

co dalej prowadzi do :

$$\check{\gamma}_0[\hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3] = \left(\frac{\frac{(\delta - \delta^4)^{1-\lambda} - (\delta^2 + \delta^8)^{1-\lambda}}{(\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta^2 + \delta^8)^\lambda} + \frac{(\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^{1-\lambda} - (\delta^2 + \delta^8)^{1-\lambda}}{(\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda + (\delta^2 + \delta^8)^\lambda}}{(\delta - \delta^4)^\lambda + (\delta - \delta^2 + \delta^4 - \delta^8)^\lambda + (\delta^2 + \delta^8)^\lambda}, 0 \right).\quad (165)$$

Wstawiając (157), (162), (163), (164) i (165) do wzoru interpolacyjnego Newtona dla ψ , $\check{\gamma}$ i tworząc funkcję $f^q(\bar{t})$ uzyskujemy:

$$\begin{aligned}f^q(\bar{t}) = (\check{\gamma} \circ \psi - \gamma_q)(\bar{t}) &= \left(-\frac{3\delta}{2} + \frac{15\delta^4}{16} + \theta^{1-\lambda} \hat{t} + \frac{(\kappa^{1-\lambda} - \theta^{1-\lambda}) \hat{t} (\hat{t} - \theta^\lambda)}{\theta^\lambda + \kappa^\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \hat{t} (\hat{t} - \theta^\lambda) (\hat{t} - \theta^\lambda - \kappa^\lambda) \frac{\frac{\theta^{1-\lambda} - \kappa^{1-\lambda}}{\theta^\lambda + \kappa^\lambda} + \frac{(\delta - \kappa + \delta^4)^{1-\lambda} - \kappa^{1-\lambda}}{(\delta - \kappa + \delta^4)^\lambda + \kappa^\lambda}}{\theta^\lambda + (\delta - \kappa + \delta^4)^\lambda + \kappa^\lambda}, 0 \right),\end{aligned}\quad (166)$$

gdzie $\theta = \delta - \delta^4$, $\kappa = \delta^2 + \delta^8$ oraz $\hat{t} = \psi(\bar{t})$. Przyjmując $\lambda = 0$ w (166) i stosując funkcję pakietu *Mathematica* - *Simplify* do $f^q(\bar{t})$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}f^q(\bar{t}) &= \frac{-144 + 432\delta + 328\delta^2 + 296\delta^3 - 5437\delta^4 - 2757\delta^5 + 17663\delta^6}{8192\delta^2(-1 + \delta^2)^3} + \frac{7605\delta^7 - 25274\delta^8 - 8438\delta^9 + 8577\delta^{10} + 9801\delta^{11}}{8192\delta^2(-1 + \delta^2)^3} \\ &\quad + \frac{13845\delta^{12} - 5895\delta^{13} - 19566\delta^{14} + 1116\delta^{15} + 7560\delta^{16}}{8192\delta^2(-1 + \delta^2)^3}.\end{aligned}$$

Wyraźnie widać, że jest ostrość rzędu $\alpha(0) = -2$ (co wskazuje na brak zbieżności, bo $\alpha < 0$):

$$f^q(\bar{t}) = (-144/8192)\delta^{-2} + O(\delta^{-1})$$

i wyrażenie $f^q(\bar{t})$ nie tylko nie zachowuje liniowej asymptotyki (t.j. $\alpha = 1$) z Tw. 3.4 określonego

dla dowolnego $\lambda \in [0, 1)$ i dowolnego mniej lub bardziej równomiernego próbkowania ale jest rozbieżność pomiędzy krzywą interpolowaną a interpolantem (różnica "wybucha" do ∞). Taki efekt spowolnienia i utraty zbieżności wynika z faktu, iż próbkowanie (156) nie spełnia Def. 2.14. Podobna ostra asymptotyka z najwolniejszą składową $K_\lambda \delta^{-2}$ (z $K_\lambda \neq 0$) pojawi się dla $\lambda \in (0, 1)$ po podstawieniu do (166) i zastosowaniu funkcji *Mathematica Simplify*. Pomijamy wyrażenie ze względu na jego złożoność.

Wstawienie $\lambda = 1$ do (166) daje w rezultacie:

$$f^q(\bar{t}) = \frac{3}{16}(1 - 2\delta)\delta^4,$$

co pokrywa się z czwartym rzędem zbieżności w oszacowaniu trajektorii w punkcie $\bar{t} = (\delta_m/2)$. To ostatnie potwierdza dla wybranej krzywej ostrość dla Tw. 3.4 prawdziwego także dla $\lambda = 1$ i dla ogólnej klasy próbkowań dopuszczalnych. Faktycznie, chociaż (156) nie spełnia mniej lub bardziej równomierności to wciąż uwzględnia jednak (19). \square

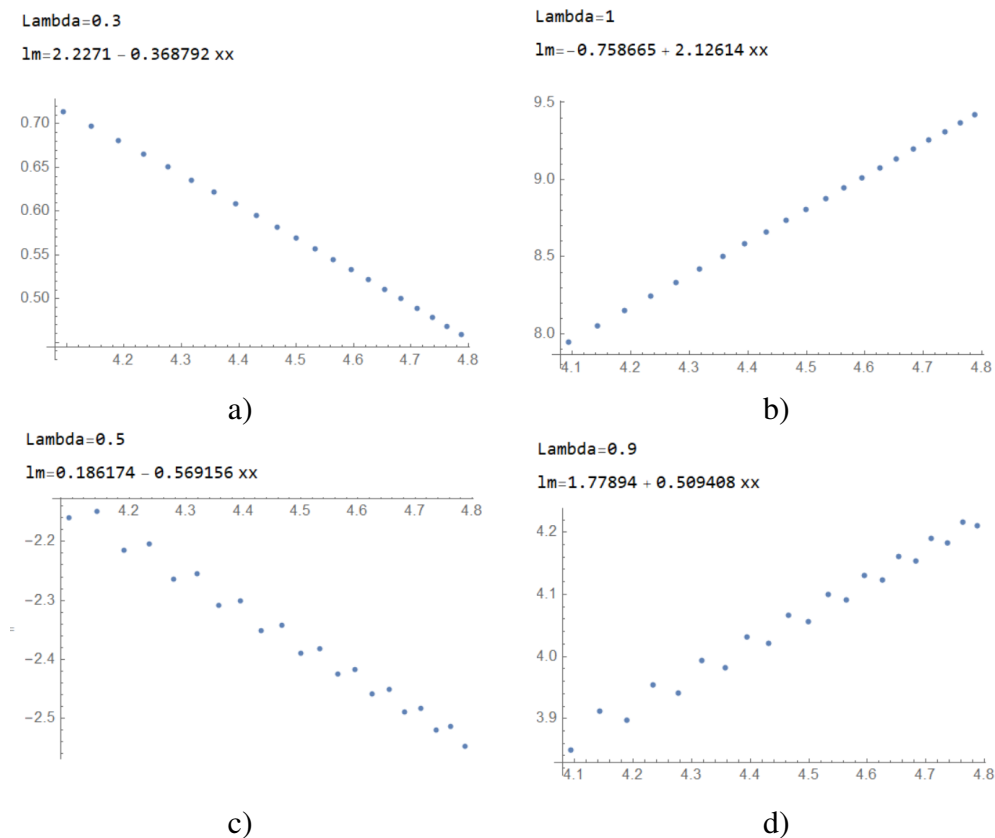
Przykład 4. Poprzednio pokazano analityczny dowód na brak zbieżności w przypadku braku założenia istnienia próbkowania mniej lub bardziej równomiernego. Niezależnie pokażemy również numeryczny przykład, że założenie istnienia mniej lub bardziej równomierności próbkowania jest konieczne dla uzyskania wyników z Tw. 3.4 dla $\lambda \in [0, 1)$. Wybrane zostały próbkowania, które nie są mniej lub bardziej równomierne a mianowicie (28) oraz (29). Krzywa, dla której zbadano rząd zbieżności to spirala z (9). Wartości współczynnika regresji α zaprezentowano w Tab. 3.

Tab. 3: Wartości współczynnika $\alpha(\lambda) \approx \bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_{sp} próbkowanej (28) i (29) dla $m \in \{60, \dots, 120\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (28)	-0,662	-0,572	-0,369	-0,153	0,057	0,365	2,128
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (29)	-2,039	-1,797	-1,209	-0,57	0,049	0,509	4,010
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 3.4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

Wyniki numeryczne pokazują, że gdy próbkowanie (28) nie spełnia prawej strony warunku mniej lub bardziej równomierności (zobacz Def. 2.14) to schemat interpolacyjny staje się rozbieżny dla λ bliższych 0 i zbieżny ale z niższym współczynnikiem zbieżności (np. $\bar{\alpha} = 2,128 < 4$ gdy $\lambda = 1$) dla λ zbliżających się do 1. Podobne wyniki otrzymano w pracy [1]

w przypadku innego typu interpolacji. Tymczasem dla próbkowania (29) nie spełniającego Def. 2.14 rząd zbieżności dla $\lambda = 1$ zostaje zachowany dla testowanej krzywej. Tak więc wyniki numeryczne wskazują, iż dla $\lambda \in [0, 1)$ pojawia się rozbieżność lub wolniejszy stopień zbieżności (patrz Tab. 3). Rysunek 21 pokazuje wykresy krzywej regresji dla wybranych λ z Tab. 3.



Rys. 21. Krzywa regresji dla przypadku próbkowania nie mniej lub bardziej równomiernego a) (28) i $\lambda = 0, 3$, b) (28) i $\lambda = 1$, c) (29) i $\lambda = 0, 5$, d) (29) i $\lambda = 0, 9$.

3.1.4 Konieczność założenia regularności krzywej γ

W głównych twierdzeniach niniejszej pracy zostało założone, iż rozważane krzywe spełniają warunek regularności (patrz Def. 2.11). Poniższe przykłady pokazują, iż to założenie w twierdzeniach jest istotne. Rozważania ograniczają się do analizy wyników numerycznych. Analiza teoretyczna może stanowić rozwinięcie tej pracy. Dodatkowym problemem do dalszego zbadania, który także nie został zawarty w pracy, a który może być jej ciekawym rozwinięciem, jest wpływ rodzaju (stopnia) nieregularności na asymptotykę. W poniższych przykładach zostały użyte krzywe γ_{nr1} dana wzorem (17), γ_{nr2} o wzorze (18) oraz asteroida γ_{as} z (16)

i cardioida γ_{cd} z (15).

Próbkowania, które posłużą w nich dla pokazania jaki wpływ ma nieregularność na zbieżność interpolacji to:

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 1, \\ \frac{i}{m} + \frac{(-1)^{i+1}}{3m}, & \text{dla } i \text{ pozostałych,} \end{cases} \quad (167)$$

$$t_i = \begin{cases} \frac{i}{m} + \frac{1}{2m} - 0,5, & \text{dla } i = 4k + 1, \\ \frac{i}{m} - \frac{1}{2m} - 0,5, & \text{dla } i = 4k + 3, \\ \frac{i}{m} - 0,5, & \text{dla } i = 2k, \end{cases} \quad (168)$$

Oba próbkowania mają punkt osobliwy $(0,0)$ dla badanych tu krzywych nieregularnych: dla $\dot{\gamma}_{nr_1}(0) = (0,0)$, $\dot{\gamma}_{nr_2}(0) = (0,0)$, $\dot{\gamma}_{cd}(0) = (0,0)$ oraz $\dot{\gamma}_{as}(0) = (0,0)$. W przypadku pierwszego próbkowania jest to punkt wymuszony wzorem i jest on obecny dla każdego m , w drugim wypadku punkt osobliwy wynika z natury próbkowania i jest obecny tylko dla niektórych wartości m . Dodatkowo uwzględniono próbkowanie (24) i segment w którym punkt osobliwy krzywej przypada we wnętrzu przedziału.

Przykład 5. *Asymptotyka dla przybliżania krzywej nieregularnej γ_{nr_1} i γ_{as} przez $\hat{\gamma}^L$ i próbkowanie (24), (167) i (168).*

Wyniki numeryczne dla krzywych nieregularnych γ_{as} i γ_{nr_1} wykreślonych na jednym przedziale $(t_0, t_3) = \{-\frac{1}{3m}, 0, \frac{5}{3m}, \frac{10}{3m}\}$ dla próbkowania (24) oraz $[t_0, t_m]$ dla próbkowań (167) oraz (168) zostały zaprezentowane w Tab. 4 oraz Tab. 5

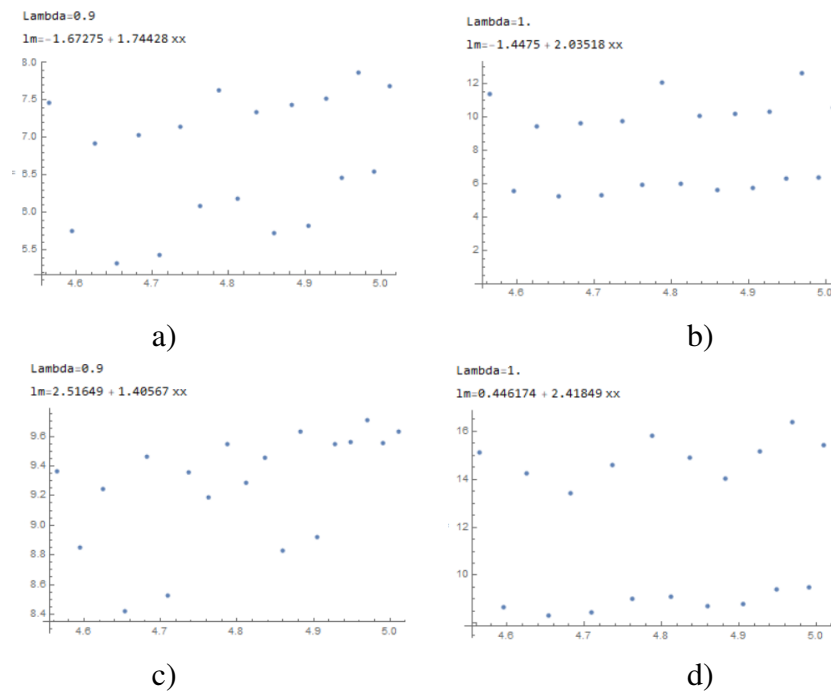
Tab. 4: Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{as} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{as} dla (24) (jeden seg)	1,993	1,994	1,995	1,998	1,999	1,989	2,979
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{as} dla (167)	0,991	0,992	0,997	0,997	1,004	1,989	1,988
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{as} dla (168)	0,992	0,992	0,993	0,995	0,998	1,744*	2,035*
$\alpha(\lambda)$ z Tw. 3.4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

Tab. 5: Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{nr_1} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_1} dla (24) (jeden seg)	2,001	2,001	2,001	2,001	2,000	2,002	3,004
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_1} dla (167)	0,962	0,961	0,959	0,955	0,961	2,002	2,003
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_1} dla (168)	0,990	0,988	0,982	0,973	0,959	1,405*	2,418*
$\alpha(\lambda)$ z Tw. 3.4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

*Zostało zauważone, że zbieżność "psuje się" dla próbkowania (168) przy interpolacji dla obu krzywych nieregularnych, gdy parametr $\lambda = 0,9$ lub $\lambda = 1$ (patrz Rys. 22)



Rys. 22. Krzywa regresji dla przypadku próbkowania (168) a) krzywej γ_{as} z (16) i $\lambda = 0,9$, b) krzywej γ_{as} z (16) i $\lambda = 1$, c) krzywej γ_{nr_1} z (17) i $\lambda = 0,9$, d) krzywej γ_{nr_1} z (17) $\lambda = 1$.

Przykład 6. Asymptotyka dla przybliżania krzywej nieregularnej γ_{nr_2} i γ_{cd} przez $\hat{\gamma}^L$ i próbkowanie (24), (167) i (168).

Wyniki numeryczne dla krzywych nieregularnych γ_{cd} i γ_{nr_2} wykreślonych na jednym przedziale $(t_0, t_3) = \left\{ -\frac{1}{3m}, 0, \frac{5}{3m}, \frac{10}{3m} \right\}$ dla próbkowania (24) oraz $[t_0, t_m]$ dla próbkowań (167) oraz (168) zostały zaprezentowane w Tab. 6 oraz Tab. 7

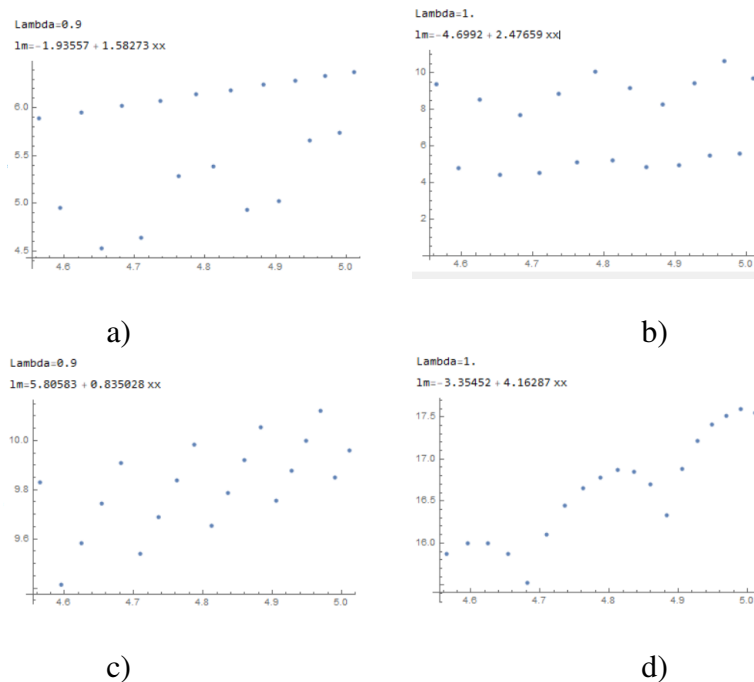
*Zostało zauważone, podobnie jak w poprzednim przykładzie, że zbieżność "psuje się" dla próbkowania (168) przy interpolacji dla obu krzywych nieregularnych, gdy parametr $\lambda = 0,9$ lub $\lambda = 1$ (patrz Rys. 23).

Tab. 6: Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{cd} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{cd} dla (24) (jeden seg)	1,997	1,997	1,998	2,002	1,999	2,009	2,992
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{cd} dla (167)	0,990	0,993	0,993	0,998	1,012	1,998	1,997
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{cd} dla (168)	0,999	0,999	1,000	1,002	1,009	1,582*	2,477*
$\alpha(\lambda)$ z Tw. 3.4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

Tab. 7: Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{nr_2} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_2} dla (24) (jeden seg)	3,001	3,001	3,001	3,004	3,005	3,006	4,002
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_2} dla (167)	0,941	0,940	0,937	0,929	0,939	1,040	4,002
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_2} dla (168)	0,984	0,980	0,970	0,953	0,929	0,835*	4,163*
$\alpha(\lambda)$ z Tw. 3.4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0



Rys. 23. Krzywa regresji dla przypadku próbkowania (168), krzywej γ_{cd} z (15) i a) $\lambda = 0,9$, b) $\lambda = 1$, oraz próbkowania (168), krzywej γ_{nr_2} z (18) i c) $\lambda = 0,9$, d) $\lambda = 1$.

3.1.5 Testy numeryczne

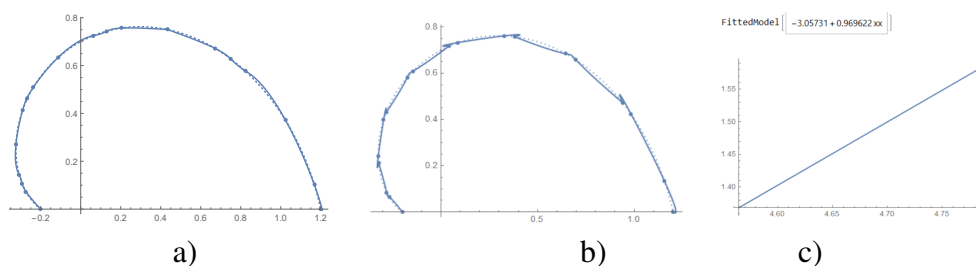
W tym podrozdziale tezy z Tw. 3.4 zostały zweryfikowane eksperymentalnie. Rozważane krzywe są regularne a próbkowania, wybrane z rodziny mniej lub bardziej równomiernych, to (23), (24) oraz (27). Testy zostały przeprowadzone w programie Mathematica 10.0/12.0.

Badania były wspierane w części przez zasoby obliczeniowe PLGrid. Przeprowadzone i poniżej opisane eksperymenty potwierdzają numerycznie tezy Tw. 3.4.

Przykład 7. Wyniki numeryczne zbieżności dla interpolacji Lagrange'a $\hat{\gamma}_3^L$ i krzywej γ_{sp} .

Rozważmy kawałkami kubiczny interpolant Lagrange'a $\hat{\gamma}_3^L$ przybliżający krzywą regularną γ_{sp} .

Mając daną spiralę płaską γ_{sp} o wzorze (9) próbkowaną tak jak na Rys. 24, zostały przeprowadzone eksperymenty, z których wynika, że Tw. 3.4 jest spełnione.



Rys. 24. Spirala γ_{sp} o wzorze (9) próbkowana: a) (23), b) (24) i dopasowana $\hat{\gamma}_3^L$ ($m = 18$ i $\lambda = 0$) c) regresja liniowa dla $\lambda = 0$, próbkowania (24) i $m \in \{96, \dots, 120\}$.

Asymptotykę γ_{sp} przybliżanej przez $\hat{\gamma}_3^L$ reprezentują wyniki numeryczne zawarte w Tab. 8, które potwierdzają *ostrość* z Tw. 3.4.

Tab. 8: Wartości współczynnika $\alpha(\lambda) \approx \bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_{sp} próbkowana (23), (24) i (27) dla $m \in \{96, \dots, 120\}$.

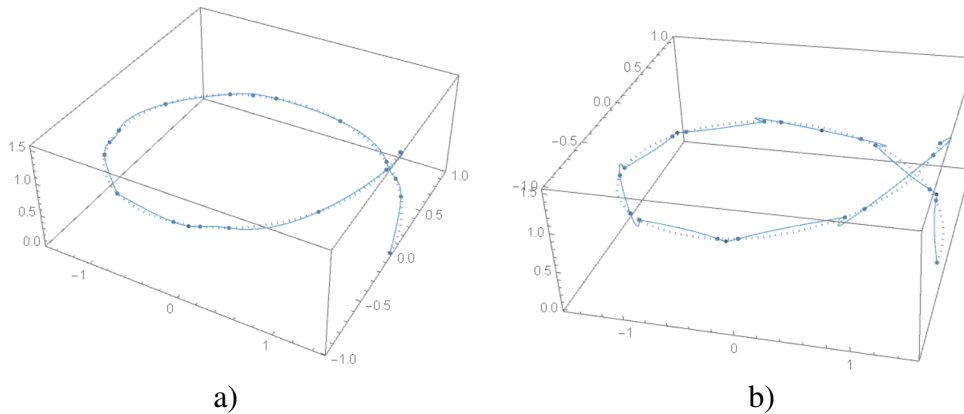
λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,037	1,037	1,036	1,036	1,035	1,041	3,914
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	0,969	0,969	0,968	0,967	0,973	1,028	3,951
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 3.4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (27)	3,995	3,995	3,997	3,983	3,988	3,994	3,998
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 3.4	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0

Przykład 8. Wyniki numeryczne zbieżności dla interpolacji kawałkami kubicznym interpolantem Lagrange'a $\hat{\gamma}_3^L$ do krzywej γ_h .

Ten przykład przedstawia helikoidę trójwymiarową γ_h określoną wzorem (11).

Asymptotykę dla aproksymowania γ_h przez $\hat{\gamma}_3^L$ obrazują wyniki numeryczne zawarte w Tab. 9.

Wyniki potwierdzają *ostrość* z Tw. 3.4.



Rys. 25. Helikoida γ_h dana wzorem (11) próbkowana: a) (23), b) (24) i dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^L$ ($m = 18$ i $\lambda = 0,3$).

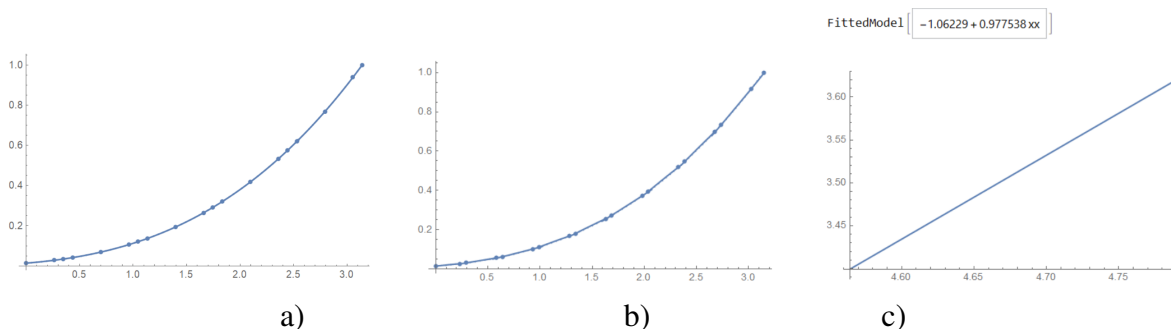
Tab. 9: Wartości współczynnika $\alpha(\lambda) \approx \bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_h próbkowanej z (23), (24) i (27) z $m \in \{96, \dots, 120\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,000	1,000	1,001	1,001	1,003	1,049	3,997
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,003	4,008
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 3.4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (27)	3,999	3,999	3,998	3,998	3,997	3,997	3,997
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 3.4	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0

W ostatnim przykładzie (do numerycznej weryfikacji ostrości rzędu zbieżności z Tw. 3.4) przetestujemy ponownie krzywą w \mathbb{E}^2 .

Przykład 9. Wyniki numeryczne zbieżności dla interpolacji kawałkami kubicznym interpolantem Lagrange'a $\hat{\gamma}_3^L$ do krzywej kubicznej γ_c .

Niech krzywa γ_c będzie zdefiniowana wzorem (10) oraz próbkowana według (23), (24) oraz (27).



Rys. 26. Krzywa kubiczna γ_c (10) próbkowana: a) (23), b) (24) dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^L$ ($m = 18$ i $\lambda = 1$), c) krzywa regresji dla $\lambda = 0,5$ próbkowania (24) oraz $m \in \{96, \dots, 120\}$.

Asymptotykę dla aproksymacji γ_c przez $\hat{\gamma}_3^L$ określają dane numeryczne (patrz Tab. 10), które to również potwierdzają ostrość Tw. 3.4:

Tab. 10: Wartości współczynnika regresji $\alpha(\lambda) \approx \bar{\alpha}(\lambda)$ z Tw. 3.4 dla γ_c próbkowanej (23), (24) i (27) z $m \in \{96, \dots, 120\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,022	1,022	1,022	1,022	1,021	1,018	4,002
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	0,980	0,979	0,979	0,978	0,979	1,001	4,002
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 3.4	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (27)	∞^*	4,137	4,137	4,137	4,136	4,136	4,136
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 3.4	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0

*błąd arytmetyczny wynikający z pokrywania się krzywej z interpolantem

3.2 Szacowanie długości krzywych za pomocą przedziałowo-kubicznej interpolacji klasy C^0 .

Długość, to po trajektorii, najistotniejszy parametr charakteryzujący krzywą. Przybliżanie długości (oprócz samej γ) $d(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ to inne ważne zadanie, jakie można rozważyć badając interpolację danych gęstych zredukowanych. Znalezienie jak najdokładniejszej wartości długości ma bardzo duże znaczenie w modelowaniu krzywych, w szacowaniu wielkości obiektów na zdjęciach medycznych, w szacowaniu odległości lub obwodu obiektów. Istnieje bardzo dużo prac opisujących sposoby obliczania długości na podstawie analizy parametrów krzywej np. pochodnych ([37], projekcji jej punktów na prostą ([38]), w wyniku przybliżonego obliczania długości łuku krzywej z zastosowaniem reparametryzacji długością cięciwy [39] lub analizy punktów leżących na krzywej (zobacz w [40], [41]). Przykładem ostatniego podejścia jest też interpolacja nieparametryczna. Istotnym jest tutaj przybliżenie długości krzywej realnej długością interpolanta oraz analiza przypadku stopnia zbieżności $d(\gamma) - d(\hat{\gamma}) = O(\delta_m^\alpha)$. Prace dotychczas opublikowane dotyczyły analizy rzędu zbieżności długości interpolanta oraz krzywej dla przypadku wielomianów drugiego stopnia i różnych próbkowań ([30], [1], [42], [43]) oraz dla przypadku przybliżania nieznanymi węzłami parametryzacją wykładniczą dla $\lambda = 1$ - tzw. długością cięciwy (patrz [33], [44]). Jeśli ψ nie jest > 0 ale $\psi(t) \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ wtedy pętelek nie ma i ruch po krzywej odbywa się niejednostajnie w różnych kierunkach. Jeśli nie jest $\psi(t) > 0$ i $\psi(t)$ wychodzi poza $[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$,

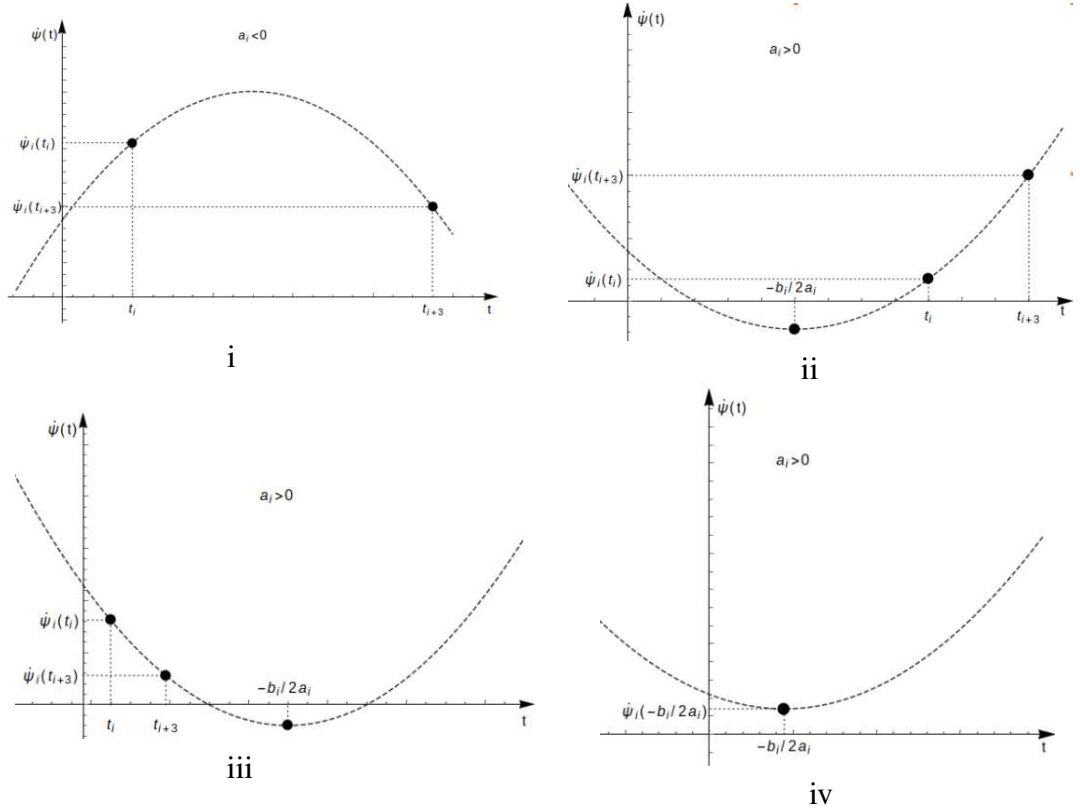
wtedy mamy pętelki. Istnienie pętelek znacząco wpływa na wartość długości oszacowanej na podstawie badania interpolanta oraz wpływa też na zbieżność. Przeprowadzone zostały wstępne eksperymenty numeryczne to pokazujące, jednak w niniejszej pracy skupiono się jedynie na tym, jakie warunki nałożyć na funkcję ψ , aby jej pochodna była > 0 . **Opracowanie tych warunków i ich graficzna prezentacja są kolejnym wynikiem tej pracy doktorskiej opublikowanym w [4] oraz [7].** Analityczne i eksperymentalne szacowanie długości oraz jej rzędu zbieżności dla interpolacji Lagrange klasy C^0 jest możliwym rozszerzeniem tej pracy.

3.2.1 Asymptotyczne warunki wystarczające dla $\psi > 0$ (parametryzacja).

Przypadek interpolacji nieparametrycznej $\hat{\gamma}^L$ wiąże się z koniecznością uwspólnienia dziedzin krzywej γ i interpolanta $\hat{\gamma}^L$ - patrz Def. 2.9. W tym rozdziale sformułowane zostanie *kilka wystarczających warunków* dla funkcji ψ_i stopnia trzeciego, aby była *reparametryzacją*. Wyniki tej części dysertacji zostały opublikowane także w [4] i [7]. W przypadku gdy $\lambda = 1$ jest wiadome, że ψ_i jest asymptotycznie parametryzacją z $[t_i, t_{i+3}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$ ($\psi(t) = 1 + O(\delta_m^2) > 0$) dla dowolnego dopuszczalnego próbkowania (19), co zostało pokazane w [33]. Aby krzywa kubiczna ψ_i była reparametryzacją wystarczy, aby funkcja $\psi_i(t) > 0$. Ponieważ $\psi_i(t)$ jest funkcją kwadratową, więc może być zapisana wzorem $\psi_i(t) = a_i t^2 + b_i t + c_i > 0$ na każdym I_i . Analiza sprowadza się do badania charakteru położenia paraboli na przedziale $[t_i, t_{i+3}]$ - patrz Rys. 27.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & a_i < 0 \quad \wedge \quad \psi_i(t_i) > 0 \quad \wedge \quad \psi_i(t_{i+3}) > 0, \\
 (ii) \quad & a_i > 0 \quad \wedge \quad \psi_i(t_i) > 0 \quad \wedge \quad -\frac{b_i}{2a_i} < t_i, \\
 (iii) \quad & a_i > 0 \quad \wedge \quad \psi_i(t_{i+3}) > 0 \quad \wedge \quad -\frac{b_i}{2a_i} > t_{i+3}, \\
 (iv) \quad & a_i > 0 \quad \wedge \quad \psi_i\left(-\frac{b_i}{2a_i}\right) > 0.
 \end{aligned}
 \tag{169}$$

Dla podanych zbiorów Q_m i \mathcal{T} , testowanie $\psi_i > 0$ na różnych I_i sprowadza się do sprawdzenia warunków (169)(i), (169)(ii), (169)(iii) i (169)(iv). Scharakteryzujemy dowolne dopuszczalne



Rys. 27. Ilustracja warunków, aby $\psi_i > 0$ na $[t_i, t_{i+3}]$ odpowiednio (169): a) (i), b) (ii), c) (iii) i d) (iv).

próbkowanie (19) poprzez wprowadzenie na każdym I_i trzech parametrów (M_{im}, N_{im}, P_{im}) :

$$t_{i+1} - t_i = M_{im} \delta_m, \quad t_{i+2} - t_{i+1} = N_{im} \delta_m \quad \text{i} \quad t_{i+3} - t_{i+2} = P_{im} \delta_m, \quad (170)$$

gdzie $0 < M_{im}, N_{im}, P_{im} \leq 1$ ⁸. *Kolejnym wynikiem pracy doktorskiej jest następujące twierdzenie* (patrz [4], [7]):

Twierdzenie 3.9. *Niech $\gamma \in C^3([0, T])$ będzie próbkowana β_0 -mniej lub bardziej równomiernie (patrz Definicja (2.16)) z węzłami \mathcal{T}_m spełniającymi (170). Dla danych zredukowanych Q_m połączonych z parametryzacją wykładniczą (30) (dla dowolnego $\lambda \in [0, 1)$) warunek (169)(i) określający $\psi_i^L : I \rightarrow \hat{I}_i$ jako reparametryzację jest spełniony asymptotycznie, jeśli następujące trzy nierówności są razem spełnione dla wystarczająco dużego m :*

$$\frac{1}{P_i + N_i + M_i} \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right) \leq \rho < 0, \quad (171)$$

⁸w dalszych wzorach Tw. 3.9 i dowodu zostanie pominięta zmienna m w indeksie dolnym

$$\boxed{M_i^{\lambda-1} - \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})M_i}{N_i + M_i} + \frac{(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})M_i(N_i + M_i)}{(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)} - \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})M_i}{P_i + N_i + M_i} \geq \rho_1 > 0,} \quad (172)$$

$$\boxed{P_i^{\lambda-1} - \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})P_i(P_i + N_i)}{(N_i + M_i)(P_i + N_i + M_i)} + \frac{P_i(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})}{P_i + N_i + M_i} + \frac{P_i(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})}{P_i + N_i} \geq \rho_2 > 0,} \quad (173)$$

z ustalonymi $\rho < 0$, $\rho_1 > 0$ i $\rho_2 > 0$, dowolnie małymi. Podobnie, warunek (169)(iv) zapewnia, że zachodzi $\psi_i^L > 0$, jeśli następujące dwie nierówności są spełnione dla wystarczająco dużego m :

$$\boxed{\frac{1}{P_i + N_i + M_i} \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right) \geq \rho_3 > 0,} \quad (174)$$

$$\boxed{M_i^{\lambda-1} + \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{3(N_i + M_i)} \left[(2N_i + M_i) - \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)}{(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})(N_i + M_i) - (N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})(P_i + N_i)} \right] - \frac{(N_i^2 + N_i M_i + M_i^2)}{3} \left\{ \frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{(N_i + M_i)(P_i + N_i + M_i)} \right\} \geq \rho_4 > 0,} \quad (175)$$

gdzie stałe $\rho_3 > 0$ i $\rho_4 > 0$ są ustalone i małe.

Dowód. Pochodne funkcji ψ_i^L na podstawie wzoru interpolacyjnego Newtona wyrażają się następująco (dla każdego $t \in I_i$).

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \psi[t_i, t_{i+1}] + \psi[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] [(t - t_{i+1}) + (t - t_i)] \\ &\quad + \psi[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] [(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}) + (t - t_i)(t - t_{i+2}) + (t - t_i)(t - t_{i+1})], \\ \ddot{\psi}(t) &= 2\gamma[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] + 2\gamma[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] [3t - t_{i+2} - t_{i+1} - t_i], \\ \dddot{\psi}(t) &= 6\gamma[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]. \end{aligned} \quad (176)$$

Dla zapisania pochodnej z pomocą parametrów (M_i , N_i i P_i) wystarczy uzyskać wzory dla poszczególnych różnic dzielonych. Gdy γ jest regularna to może być reparametryzowana przez długość łuku dającą $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, dla $t \in [0, T]$ (patrz [36]). Prowadzi to do $1 \equiv \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle$ i w wyniku $0 \equiv (\|\dot{\gamma}(t)\|^2)' = 2\langle \dot{\gamma}(t) | \ddot{\gamma}(t) \rangle$ na $t \in [0, T]$. Przypomnijmy, że uzyskana tu ortogonalność $\dot{\gamma}$ i $\ddot{\gamma}$ zeruje określone, wolniejsze składowe w wyrażeniu (92) (dla $j = i+k$ z $k=0, 1, 2$ i dowolnego $\lambda \in [0, 1]$), co skutkuje następującym wynikiem oszacowania

dla:

$$\hat{t}_{j+1} - \hat{t}_j = (t_{j+1} - t_j)^\lambda (1 + O((t_{j+1} - t_j)^2))^{\frac{\lambda}{2}}. \quad (177)$$

Zauważmy, że dla dowolnego (19) stałe w wyrażeniu $O((t_{j+1} - t_j)^2)$ zależą od ograniczonej $\ddot{\gamma}$,

gdyż $\gamma \in C^3$ jest ciągłą funkcją określoną na zwartym zbiorze $I = [0, T]$. Tw. Taylora zastosowane do $f(x) = (1+x)^{\frac{\lambda}{2}}$ w punkcie $x_0=0$ daje dla wszystkich $x \in [-\varepsilon, \varepsilon] = I_\varepsilon$ (z pewnym ustalonym $\varepsilon > 0$) istnienie pewnego $\xi_x \in (-|x|, |x|)$ takiego, że $f(x) = 1 + \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{4}(\frac{\lambda}{2} - 1)(1 + \xi_x)^{\frac{\lambda}{2} - 2}$. Dla $\varepsilon < 1$ usunięto osobliwość $\tau(\xi_x) = (1 + \xi_x)^{\frac{\lambda}{2} - 2}$ w punkcie $\xi_x = -1$ (z $\lambda \in [0, 1]$) wymuszając τ jako ograniczone na I_ε . Więc dla $|\xi_x| < |x| \leq \varepsilon < 1$, $f_1(x) = 1 + \frac{\lambda}{2}x + O(x^2)$ - stała w $O(x^2)$ zależy od λ . Ustalamy teraz, że $x = O((t_{j+1} - t_j)^2)$ z (177), który jest asymptotycznie mały (dla dużych m) w związku z warunkiem dopuszczalności (19) i zatem odseparowany od -1 . W związku z tym:

$$\psi_i^L[t_{i+k}, t_{i+k+1}] = \frac{\hat{t}_{i+k+1} - \hat{t}_{i+k}}{t_{i+k+1} - t_{i+k}} = (t_{i+k+1} - t_{i+k})^{\lambda-1} + O((t_{i+k+1} - t_{i+k})^{1+\lambda}), \quad (178)$$

gdzie $k = 0, 1, 2$. Łącząc (170) z (178) otrzymujemy dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ i $k = 0, 1, 2$:

$$\boxed{\psi_i^L[t_{i+k}, t_{i+k+1}] = R_{ik}^{\lambda-1} \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{1+\lambda})}, \quad (179)$$

gdzie:

$$R_{i0} = M_i, \quad R_{i1} = N_i \quad \text{i} \quad R_{i2} = P_i. \quad (180)$$

Następnie razem z wzorem (178) i nierównością $0 < (t_{i+l+1} - t_{i+l})(t_{i+2} - t_i)^{-1} \leq 1$ (dla $l = 0, 1$)

i $t_{i+2} - t_i = (t_{i+2} - t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)$ trzecia różnica dzielona wyniesie:

$$\begin{aligned} \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] &= \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^{\lambda-1} - (t_{i+1} - t_i)^{\lambda-1}}{t_{i+2} - t_i} + \frac{O((t_{i+2} - t_{i+1})^{1+\lambda}) + O((t_{i+1} - t_i)^{1+\lambda})}{t_{i+2} - t_i} \\ &= \frac{N_i^{\lambda-1} \delta_m^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1} \delta_m^{\lambda-1}}{(N_i + M_i) \delta_m} + O\left(\frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^{1+\lambda}}{t_{i+2} - t_i}\right) + O\left(\frac{(t_{i+1} - t_i)^{1+\lambda}}{t_{i+2} - t_i}\right) \\ &= \underbrace{\frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i}}_{v_i} \delta_m^{\lambda-2} + O((t_{i+2} - t_{i+1})^\lambda) + O((t_{i+1} - t_i)^\lambda). \end{aligned} \quad (181)$$

Analogicznie:

$$\psi_i^L[t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] = \frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} \delta_m^{\lambda-2} + O((t_{i+3} - t_{i+2})^\lambda) + O((t_{i+2} - t_{i+1})^\lambda). \quad (182)$$

Konsekwentnie (181) i (182) prowadzi do (dla $l = 0, 1$):

$$\boxed{\psi_i^L[t_{i+l}, t_{i+l+1}, t_{i+l+2}] = \frac{R_{i(l+1)}^{\lambda-1} - R_{il}^{\lambda-1}}{R_{i(l+1)} + R_{il}} \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^\lambda)}. \quad (183)$$

Łącząc równania (181) i (182) z wyrażeniem

$t_{i+3} - t_i = (t_{i+3} - t_{i+2}) + (t_{i+2} - t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)$ i $0 < (t_{i+l+1} - t_{i+l})(t_{i+3} - t_i)^{-1} < 1$ uzyskujemy:

$$\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] = \frac{\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i}}{t_{i+3} - t_i} \delta_m^{\lambda-2} + \sum_{l=0}^2 O\left(\frac{(t_{i+l+1} - t_{i+l})^\lambda}{t_{i+3} - t_i}\right),$$

co w konsekwencji prowadzi do:

$$\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] = \overbrace{\frac{1}{P_i + N_i + M_i} \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right)}^{o_i} \delta_m^{\lambda-3} + O(\delta_m^{\lambda-1}). \quad (184)$$

Uzasadniając (184) bazuje się na tym, że $O\left(\frac{(t_{i+l+1} - t_{i+l})^\lambda}{t_{i+3} - t_i}\right) = O((t_{i+l+1} - t_{i+l})^{\lambda-1}) = O(\delta_m^{\lambda-1})$,

bo $\frac{(t_{i+l+1} - t_i)^\lambda}{t_{i+3} - t_i} = (t_{i+l+1} - t_i)^{\lambda-1} \frac{t_{i+l+1} - t_i}{t_{i+3} - t_i}$ oraz $0 < \frac{t_{i+l+1} - t_i}{t_{i+3} - t_i} < 1$, gdzie $l = 0, 1$

Drugi krok w poprzednim równaniu odwołuje się do mniej lub bardziej równomierności (Def. 2.14) dopuszczalnego próbkowania \mathcal{S} dla dowolnego $\lambda \in [0, 1)$ (jeśli $\lambda - 1 < 0$). Dla jakiegoś ustalonego $0 < \beta_0 \leq 1$ (patrz Def. 2.23) jest $|(t_{i+l+1} - t_{i+l})^{\lambda-1}| \leq \beta_0^{\lambda-1} \delta_m^{\lambda-1}$ co wyjaśnia przejście w (184) do $O(\delta_m^{\lambda-1})$ zależnymi tylko od γ i λ .

Kiedy $\psi_i^L(t) = a_i t^2 + b_i t + c_i$ na I_i , ze wzoru (176) na pierwszą pochodną zachodzi:

$$\begin{aligned} a_i &= 3\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}], \\ b_i &= 2\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] - 2\psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}](t_{i+2} + t_{i+1} + t_i), \\ c_i &= \psi_i[t_i, t_{i+1}] - \psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t_i + t_{i+1}) + \psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}](t_i t_{i+1} + t_{i+1} t_{i+2} + t_i t_{i+2}). \end{aligned} \quad (185)$$

W kolejnych krokach nierówności (169)(i) i (169)(iv) wymuszające $\psi_i^L > 0$ są przekształcane na swoje *asymptotyczne odpowiedniki*, prawdziwe dla wystarczająco dużego m i wyrażone w terminach $\vec{O}_i = (M_i, N_i, P_i)$ (patrz Tw. 3.9). Zgodnie z (185) pierwsza nierówność $a_i < 0$ w (169)(i) będzie zapisana jako $\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] < 0$ i podlega transformacji zgodnie z (184) na:

$$\frac{1}{P_i + N_i + M_i} \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right) \delta_m^{\lambda-3} + O(\delta_m^{\lambda-1}) < 0, \quad (186)$$

dla $\vec{O}_i \in [\beta_0, 1]^3$. Asymptotycznie, dla ustalonego $\lambda \in [0, 1)$ najwolniejsze wyrażenie w (186) jest czynnikiem przy $\delta^{\lambda-3}$ (dla wszystkich próbkowań \mathcal{T}_{β_0}):

$$\theta_1(M_i, N_i, P_i) = \frac{1}{P_i + N_i + M_i} \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right), \quad (187)$$

pod warunkiem, że θ_1 nie jest rzędu $\Theta(\delta_m^{-1+\varepsilon})^9$ z $\varepsilon \geq 0$. Możliwym wystarczającym warunkiem określającym ostatnie wyrażenie jest by (dla ustalonego $\lambda \in [0, 1)$):

$$\boxed{\theta_1(M_i, N_i, P_i) \leq \rho < 0}, \quad (188)$$

dla pewnego ustalonego $\rho < 0$ (tzn. ρ może być wybrane jako dowolnie mała ujemna wartość).

Asymptotyczny zapis dla drugiej nierówności z (169)(i) tzn. $\psi_i^L(t_i) > 0$ jest wynikiem zastosowania podobnej transformacji. Połączenie wyrażeń (170), (176), (179), (183) z (184) prowadzi do (asymptotycznie):

$$\begin{aligned} \psi_i^L(t_i) &= \psi_i^L[t_i, t_{i+1}] - \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t_{i+1} - t_i) + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}](t_{i+1} - t_i)(t_{i+2} - t_i) \\ &= \left[M_i^{\lambda-1} - \left(\frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right) M_i + \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right) \frac{M_i(M_i + N_i)}{P_i + N_i + M_i} \right] \delta_m^{\lambda-1} \\ &\quad + O(\delta_m^{\lambda+1}) > 0, \end{aligned} \quad (189)$$

dla $\vec{O}_i \in [\beta_0, 1]^3$. Zapis (189) (dla \mathcal{T}_{β_0}) w postaci asymptotycznej daje warunek (172) z Tw. 3.9 (założono, że warunek ten będzie spełniony dla dowolnego ustalonego $\rho_1 > 0$) co gwarantuje także, że $\psi_i^L(t_i) > 0$ dla odpowiednio dużych m .

Trzecią nierówność $\psi_i^L(t_{i+3}) > 0$ z układu (169)(i) mapujemy na jej asymptotyczny odpowiednik korzystając z (176) w punkcie t_{i+3} :

$$\begin{aligned} \psi_i^L(t_{i+3}) &= \psi_i^L[t_i, t_{i+1}] + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]((t_{i+3} - t_i) + (t_{i+3} - t_{i+1})) + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] \\ &\quad \cdot ((t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_{i+2}) + (t_{i+3} - t_i)(t_{i+3} - t_{i+2}) + (t_{i+3} - t_i)(t_{i+3} - t_{i+1})), \end{aligned}$$

który w połączeniu z $|R_{ik}| \leq 1$ (patrz (180)), (170), (179), (183) i (184) przekształca się do:

$$\psi_i^L(t_{i+3}) = M_i \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}) + \left[\frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^{\lambda}) \right] (2P_i + 2N_i + M_i) \delta_m$$

⁹ Θ oznacza oszacowanie asymptotyczne: $c_1 \delta_m^{-1+\varepsilon} \geq \theta_1 \geq c_2 \delta_m^{-1+\varepsilon}$ i stałe c_1 i c_2 są dowolne, a nierówność zachodzi dla odpowiednio dużego m

$$+ \left[\frac{1}{P_i + N_i + M_i} \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right) \delta_m^{\lambda-3} + O(\delta_m^{\lambda-1}) \right] \cdot [P_i(P_i + N_i) + P_i(P_i + N_i + M_i) + (P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)] \delta_m^2.$$

Następnie po uporządkowaniu wyrażeń:

$$\begin{aligned} \psi_i^L(t_{i+3}) = & \left[M_i^{\lambda-1} + \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})((2P_i + N_i) + (N_i + M_i))}{N_i + M_i} \right. \\ & + \left(P_i(P_i + N_i) + (P_i + N_i + M_i)P_i + (P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i) \right) \\ & \cdot \left. \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{(N_i + M_i)(P_i + N_i + M_i)} \right) \right] \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}) \end{aligned}$$

dla $\vec{O}_i \in [\beta_0, 1]^3$. Wyrażenie przy wolniejszym składniku oznaczono jako $\theta_2(M_i, N_i, P_i)$:

$$\begin{aligned} \theta_2(M_i, N_i, P_i) = & M_i^{\lambda-1} + \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})((2P_i + N_i) + (N_i + M_i))}{N_i + M_i} \\ & + \left(P_i(P_i + N_i) + (P_i + N_i + M_i)P_i + (P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i) \right) \\ & \cdot \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{(N_i + M_i)(P_i + N_i + M_i)} \right). \end{aligned} \quad (190)$$

Przeprowadzono szersze przekształcenia i grupowania względem wyrażeń przy $M_i^{\lambda-1}$, $N_i^{\lambda-1}$ i $P_i^{\lambda-1}$. Do zapewnienia, że wyrażenie (190) jest asymptotyczne wystarczy założyć, że (dla próbkowania \mathcal{T}_{β_0}) trzeci warunek (173) z Tw. 3.9 jest spełniony dla jakiegoś ustalonego $\rho_2 > 0$.

$$\begin{aligned} & \cancel{M_i^{\lambda-1}} + \cancel{N_i^{\lambda-1}} - \cancel{M_i^{\lambda-1}} + \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})(2P_i + N_i)}{N_i + M_i} + \frac{P_i(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})}{M_i + N_i + P_i} + \frac{P_i(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})}{P_i + N_i} \\ & + P_i^{\lambda-1} - \cancel{N_i^{\lambda-1}} - \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})P_i(P_i + N_i)}{(M_i + N_i)(M_i + N_i + P_i)} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{M_i + N_i} P_i - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{M_i + N_i} (P_i + N_i) \geq \rho_2 > 0. \end{aligned} \quad (191)$$

Ostatecznie $\theta_2(M_i, N_i, P_i)$ wynosi:

$$P_i^{\lambda-1} - \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})P_i(P_i + N_i)}{(N_i + M_i)(P_i + N_i + M_i)} + \frac{P_i(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})}{P_i + N_i + M_i} + \frac{P_i(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})}{P_i + N_i} \geq \rho_2 > 0. \quad (192)$$

Mając dowiedzione (171) otrzymujemy automatycznie symetryczny wystarczający warunek asymptotyczności dla $a_i > 0$. Zgadza się on z nierównością (174) z Twierdzenia 3.9 dla jakiegoś ustalonego $\rho_3 > 0$ (gdzie ρ_3 jest wybrane dowolnie małe). Druga nierówność $\kappa_i = \psi_i^L(\frac{-b_i}{2a_i}) > 0$ z 169(iv) przez wykorzystanie podstawienia we wzorze (176) na pierwszą pochodną przekształca

się na równoważną:

$$\begin{aligned} \kappa_i = & \overbrace{\psi_i[t_i, t_{i+1}] + \psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] \left(-\frac{b_i}{a_i} - t_i - t_{i+1}\right) + \psi_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]}^{\sigma_i} \\ & \cdot \left[\frac{3}{4} \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2 + \frac{b_i}{a_i} (t_i + t_{i+1} + t_{i+2}) + \underbrace{t_i t_{i+1} + t_{i+1} t_{i+2} + t_i t_{i+2}}_{\varkappa_i} \right]. \end{aligned} \quad (193)$$

Dla obliczenia poszczególnych składników z (193) korzystając z (185) warto zauważyć, że:

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{2\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] - 2\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}](t_i + t_{i+1} + t_{i+2})}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]}, \quad (194)$$

co z kolei prowadzi do:

$$\sigma_i = \frac{-2(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}])^2}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] \left(\frac{2}{3}(t_i + t_{i+1} + t_{i+2}) - (t_i + t_{i+1}) \right).$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie oraz (194) do (193) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \kappa_i = & \psi_i^L[t_i, t_{i+1}] + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] \underbrace{\left(\frac{2}{3}(t_i + t_{i+1} + t_{i+2}) - (t_i + t_{i+1}) \right)}_{\xi_i} - \frac{2(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}])^2}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} \\ & + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] \left[3 \left(\frac{\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} - \frac{(t_i + t_{i+1} + t_{i+2})}{3} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{2\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} - \frac{2(t_i + t_{i+1} + t_{i+2})}{3} \right) \cdot (t_i + t_{i+1} + t_{i+2}) + \varkappa_i \right]. \end{aligned}$$

Dalsze algebraiczne uproszczenia w ostatnim wyrażeniu dają:

$$\begin{aligned} \kappa_i = & \psi_i^L[t_i, t_{i+1}] + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] \xi_i - \frac{2(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}])^2}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] \\ & \cdot \left[\frac{(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}])^2}{3(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}])^2} - 2 \frac{\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t_{i+2} + t_{i+1} + t_i)}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} + \frac{(t_{i+2} + t_{i+1} + t_i)^2}{3} \right. \\ & \left. + \left(\frac{2\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} - \frac{2(t_{i+2} + t_{i+1} + t_i)}{3} \right) (t_{i+2} + t_{i+1} + t_i) + \varkappa_i \right], \end{aligned}$$

co dalej redukuje się do:

$$\begin{aligned} \kappa_i = & \psi_i^L[t_i, t_{i+1}] + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] \xi_{im} - \frac{2(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}])^2}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] \\ & \cdot \left[\frac{(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}])^2}{3(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}])^2} - \frac{2\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](\cancel{t_{i+2} + t_{i+1} + t_i})}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} \right. \\ & \left. + \frac{2\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](\cancel{t_{i+2} + t_{i+1} + t_i})}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} + \underbrace{\varkappa_i - \frac{(t_i + t_{i+1} + t_{i+2})^2}{3}}_{\mu_i} \right]. \end{aligned}$$

Ostatecznie powyższa formuła prowadzi do:

$$\kappa_i = \psi_i^L[t_i, t_{i+1}] + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] \xi_i - \frac{(\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}])^2}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] \mu_i. \quad (195)$$

Na podstawie (170) wyrażenia ξ_i oraz μ_i można rozwinąć jako:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{2t_{i+2} - t_{i+1} - t_i}{3} = \frac{2(t_{i+2} - t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)}{3} = \frac{2N_i + M_i}{3} \delta_m, \\ \mu_i &= \frac{-t_i^2 - t_{i+1}^2 - t_{i+2}^2 + t_i t_{i+1} + t_i t_{i+2} + t_{i+1} t_{i+2} + t_{i+1} t_{i+2} - t_{i+1} t_{i+2}}{3} \\ &= \frac{t_i(t_{i+1} - t_i) + t_{i+1}(t_{i+2} - t_{i+1}) + t_{i+2}(t_{i+1} - t_{i+2}) + t_{i+2}(t_i - t_{i+1})}{3} \\ &= \frac{-(t_{i+1} - t_i)(t_{i+2} - t_i) - (t_{i+2} - t_{i+1})^2}{3} = \frac{-M_i^2 - M_i N_i - N_i^2}{3} \delta_m^2. \end{aligned} \quad (196)$$

Co więcej, podstawienie (196) do (195) prowadzi do:

$$\begin{aligned} 3\kappa_i &= 3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}] + \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] \left[(2N_i + M_i) \delta_m - \frac{\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]}{\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} \right] \\ &\quad - \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] (M_i^2 + M_i N_i + N_i^2) \delta_m^2. \end{aligned}$$

Łącząc (179), (181), (183) i (184) z ostatnim wyrażeniem uzyskuje się:

$$\begin{aligned} 3\kappa_i &= 3M_i^{\lambda-1} \delta^{\lambda-1} + O(\delta^{\lambda+1}) + \overbrace{\left(v_i \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta^\lambda) \right)}^{\alpha_{1i}} \left[(2N_i + M_i) \delta_m - \underbrace{\frac{v_i \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^\lambda)}{\omega_i \delta_m^{\lambda-3} + O(\delta_m^{\lambda-1})}}_{\alpha_{2i}} \right] \\ &\quad - \left(\omega_i \delta_m^{\lambda-3} + O(\delta_m^{\lambda-1}) \right) (M_i^2 + M_i N_i + N_i^2) \delta_m^2, \end{aligned} \quad (197)$$

gdzie, przypominając, $v_i = \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i}$ z (181) oraz $\omega_i = \frac{1}{P_i + N_i + M_i} \left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{P_i + N_i} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right)$ z (184). Po algebraicznych przekształceniach (kiedy $0 < R_{ik} \leq 1$ - patrz (170) i (180)) jest:

$$\alpha_{1i} = v_i (2N_i + M_i) \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}) - v_i \alpha_{2i} \delta_m^{\lambda-2} - \alpha_{2i} O(\delta_m^\lambda). \quad (198)$$

Rozwinięcie Taylora w punkcie $x_0=0$ daje dla funkcji $f_2(x) = (1+x)^{-1} = 1 - \frac{1}{(1+\xi_x)^2} x = 1 + O(x)$, gdzie $|\xi_x| \leq |x| \leq \varepsilon < 1$. Podstawiając $x = O(\delta_m^2)$ oraz ω_i z (184) (x jest wystarczająco małe z (19)) otrzymujemy mianownik z $\alpha_{2,i}$ jako:

$$\frac{1}{\omega_i \delta_m^{\lambda-3} + O(\delta_m^{\lambda-1})} = \frac{1}{\omega_i \delta_m^{\lambda-3} (1 + \frac{1}{\omega_i} O(\delta_m^2))} = \frac{1}{\omega_i \delta_m^{\lambda-3}} (1 + O(\delta_m^2)). \quad (199)$$

Aby udowodnić (199) korzysta się z faktu, iż $\frac{1}{\omega_i} = O(1)$.

Pierwsza nierówność z (169(iv)) jest asymptotyczna, prowadzi do wyrażenia (174) i równa się $\omega_i \geq \rho_3 > 0$.

Tak więc z (199) trzecie wyrażenie w (198) można zapisać jako:

$$-v_i \alpha_{2i} \delta_m^{\lambda-2} = \frac{-1}{\omega_i \delta_m^{\lambda-3}} \left[v_i^2 \delta^{2\lambda-4} + v_i O(\delta_m^{2\lambda-2}) \right] (1 + O(\delta_m^2)) = -\frac{v_i^2}{\omega_i} \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}). \quad (200)$$

Dowodząc (200) wykorzystuje się ciągłość v_i nad zbiorem zwartym $[\beta_0, 1]^2$ (dla \mathcal{T}_{β_0}) spełniającym warunek ograniczoności $v_i = O(1)$. Ostatnie wyrażenie w (198) redukuje się do:

$$-\alpha_{2i} O(\delta_m^\lambda) = -\left(v_i \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^\lambda) \right) \left(\frac{1}{\omega_i \delta_m^{\lambda-3}} (1 + O(\delta_m^2)) \right) O(\delta_m^\lambda) = O(\delta_m^{\lambda+1}). \quad (201)$$

W konsekwencji łącząc wzory (198), (200) i (201) uzyskujemy:

$$\alpha_{1i} = v_i (2N_i + M_i) \delta_m^{\lambda-1} - \frac{v_i^2}{\omega_i} \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}),$$

które to, w połączeniu z (197) i $|M_i^2 + M_i N_i + N_i^2| \leq 3$, prowadzą do:

$$\begin{aligned} 3\kappa_i = & \delta^{\lambda-1} \left\{ 3M_i^{\lambda-1} + \left(\frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i} \right) \cdot \left[M_i + 2N_i - \frac{\frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i}}{\left(\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{(N_i + M_i)(P_i + N_i + M_i)} \right)} \right] \right. \\ & \left. - \left[\frac{P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)} - \frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{(M_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)} \right] \underbrace{\left(M_i^2 + M_i N_i + N_i^2 \right)}_{\alpha_{3i}} \right\} + O(\delta_m^{\lambda+1}). \quad (202) \end{aligned}$$

Z wyrażenia (202), $\kappa_i = \theta_3(M_i, N_i, P_i) \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{1+\lambda}) > 0$ i asymptotycznie spełnia (174) jeśli wyrażenie $\frac{1}{3} \theta_3(M_i, N_i, P_i) \geq \rho_4 > 0$, nad $[\beta_0, 1]^3$, dla pewnego ustalonego dowolnie $\rho_4 > 0$.

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} \theta_3(M_i, N_i, P_i) = & 3M_i^{\lambda-1} + \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})(2N_i + M_i)}{(N_i + M_i)} \\ & - \frac{(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})^2}{N_i + M_i} \frac{(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)}{(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})(N_i + M_i) - (N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})(N_i + P_i)} \\ & - \left[\frac{(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1})(N_i + M_i) - (N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})(P_i + N_i)}{(N_i + M_i)(P_i + N_i)(P_i + N_i + M_i)} \right] \alpha_{3i}, \quad (203) \end{aligned}$$

co reprezentuje ostatnią nierówność (175) z Tw. 3.9 i udowadnia jego założenia. \square

Warunki w Twierdzeniu 3.9 zależą wyłącznie od $\vec{O}_{im} \in [\beta_0, 1]^3$, w szczególności nie zależą od γ . Dzięki temu można je zwizualizować w 3D dla każdego podprzedziału I_i , ustalonego $\lambda \in [0, 1)$ i zastosować do dowolnej regularnej krzywej γ - patrz wykresy 3D w podrozdziale

3.2.2 wygenerowane w programie *Mathematica* [21].

Przywołajmy dwa szczególne przypadki *próbkiowania równomiernego*, dla którego we wzorach (170) i (180) $R_{imk}=1$ (t.j. gdzie $\beta_0=1$) w połączeniu z $\lambda \in [0,1)$ lub $\lambda = 1$ z (19). W obydwu przypadkach w obliczeniach otrzymano $\psi_i^L=1+O(\delta_m^2)>0$ (patrz [3] i [33]). Rzeczywiście warunki (172), (173) i (175) są spełnione tak dla $\lambda = 1$ jak i próbkiowania równomiernego \mathcal{T} i $\lambda \in [0,1)$. Natomiast nie zachodzi żadna z nierówności (171) czy (174). Możliwym sposobem na zapisanie tych dwóch przypadków w postaci asymptotycznych odpowiedników dla nierówności $a_i > 0$ lub $a_i < 0$ jest zastosowanie rozwinięcia Taylora czwartego rzędu dla $\gamma \in C^4$ (patrz Tw. 2.6). Analiza (pominięta w tej pracy i stanowiąca jej możliwe rozszerzenie) prowadzi do nowego warunku na $a_i > 0$ (lub $a_i < 0$), w którym pojawiają się nie tylko trójki $(M_{im}, N_{im}, P_{im}) \in [\beta_0, 1]^3$, $\lambda \in [0,1)$ ale także krzywizna $\|\dot{\gamma}(t_i)\|^2$ wzdłuż próbkiowania \mathcal{T} (patrz [33] i [3]). Krzywizna nie musi być znana z góry. Alternatywnym podejściem jest narzucenie odgórne jakichś ograniczeń na krzywiznę krzywych γ należących do rodziny dopuszczalnych krzywych. Asymptotyczne warunki z Twierdzenia 3.9 wyrażone jako odpowiednie trójki (170) (na I_i) mogą być mapowane także na zbiór nierówności wprowadzających parę nowych zmiennych. Taka redukcja wymiarów pozwala przedstawić ograniczenia w bardziej przystępnym wymiarze $2D$ dzięki np. programowi *Mathematica*. Należy rozważyć następujące *jednorodne mapowanie*:

$$x = \frac{M_{im}}{N_{im}} \quad \text{i} \quad y = \frac{P_{im}}{N_{im}}, \quad (204)$$

gdzie para $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$ uwzględniając (170), (180) i β_0 -mniej lub bardziej równomierne $\beta_0 \leq R_{imk} \leq 1$. Można zapisać następujące twierdzenie, będące **wynikiem tej pracy doktorskiej** (patrz [4]):

Twierdzenie 3.10. *Niech $\gamma \in C^3([0, T])$ będzie próbkiowana β_0 -mniej lub bardziej równomiernie (patrz Definicja 2.14). Załóżmy że zmienne (170) określające \mathcal{T} są mapowane z podstawieniem (204) na $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$. Dla danych Q_m łączonych z (30) wystarczający warunek (169)(i) dający ψ_i^L jako reparametryzację na I_i do \hat{I}_i jest spełniony asymptotycznie,*

jeśli

$$\boxed{\frac{y^{\lambda-1} - 1}{(y+1)(1+x+y)} + \frac{x^{\lambda-1} - 1}{(x+1)(1+x+y)} \leq \rho < 0} \quad (205)$$

oraz

$$\boxed{x^{\lambda-1} + (x^{\lambda-1} - 1) \left[\frac{x}{1+x+y} + \frac{x}{1+x} \right] + (y^{\lambda-1} - 1) \frac{x(1+x)}{(1+y)(1+x+y)} \geq \rho_1 > 0} \quad (206)$$

oraz

$$\boxed{y^{\lambda-1} + (y^{\lambda-1} - 1) \left[\frac{y}{1+x+y} + \frac{y}{1+y} \right] + (x^{\lambda-1} - 1) \frac{y(1+y)}{(1+x)(1+x+y)} \geq \rho_2 > 0,} \quad (207)$$

z ustalonymi $\rho < 0$, $\rho_1 > 0$ i $\rho_2 > 0$ dowolnie małymi.

Podobnie warunek (169)(iv) zapewnia asymptotyczność, jeśli obie nierówności

$$\boxed{\frac{y^{\lambda-1} - 1}{(y+1)(1+x+y)} + \frac{x^{\lambda-1} - 1}{(x+1)(1+x+y)} \geq \rho_3 > 0} \quad (208)$$

oraz

$$\boxed{3x^{\lambda-1} + \frac{1-x^{\lambda-1}}{1+x} \left[x+2 + \frac{1+x+y}{\frac{y^{\lambda-1}-1}{x^{\lambda-1}-1} + 1} + \frac{x^2+x+1}{1+x+y} \right] + \frac{(1-y^{\lambda-1})(x^2+x+1)}{(1+y)(1+x+y)} \geq 3\rho_4 > 0} \quad (209)$$

są spełnione odpowiednio, dla pewnych ustalonych $\rho_3 > 0$ i $\rho_4 > 0$.

Dowód. Wszystkie nierówności z Tw. 3.9 (169)(i) i (169)(iv) (zachodzą dla wystarczająco dużego m) przekształcono na pięć nierówności wyrażonych w zmiennych (x, y) wprowadzonych jako (204). A więc rozważane są następujące kroki:

Wymuszając $a_i < 0$, połączono (171) z (204) (dla dowolnej ustalonej $\rho < 0$) co dało:

$$N_{im}^{\lambda-3} \frac{1}{\frac{P_{im}}{N_{im}} + 1 + \frac{M_{im}}{N_{im}}} \left(\frac{\frac{P_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} - 1}{\frac{P_{im}}{N_{im}} + 1} - \frac{1 - \frac{M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}}}{1 + \frac{M_{im}}{N_{im}}} \right) \leq \rho < 0 \quad (210)$$

$$\frac{y^{\lambda-1} - 1}{(1+y)(1+x+y)} + \frac{x^{\lambda-1} - 1}{(1+x)(1+x+y)} \leq N_{im}^{3-\lambda} \rho.$$

Biorąc pod uwagę $0 < \beta_0^{3-\lambda} \leq N_{im}^{3-\lambda} \leq 1$ (dla $\lambda \in [0, 1)$), aby zachodziło (210) wystarczy wymóc (dla ustalonego dowolnie małego $\rho < 0$) pierwszą nierówność (205) z Tw. 3.10

wyrażoną w zmiennych $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$.

By znaleźć asymptotyczny odpowiednik dla $\psi_t^L(t_i) > 0$ wyrażony w $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$ mapowanie (204) zastosowane do (172) przekształca to ostatnie na (dla jakiegoś ustalonego $\rho_1 > 0$):

$$\frac{M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} - \frac{\left(1 - \frac{M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}}\right)M_{im}}{N_{im}\left(1 + \frac{M_{im}}{N_{im}}\right)} - \frac{\left(1 - \frac{M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}}\right)M_{im}}{N_{im}\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)} + \frac{\left(\frac{P_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} - 1\right)M_{im}\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1\right)}{N_{im}\left(\frac{P_{im}}{N_{im}} + 1\right)\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)} \geq \frac{\rho_1}{N_{im}^{\lambda-1}},$$

co ostatecznie daje:

$$x^{\lambda-1} - \frac{\left(1 - x^{\lambda-1}\right)x}{1+x} - \frac{\left(1 - x^{\lambda-1}\right)x}{1+x+y} + \frac{\left(y^{\lambda-1} - 1\right)x(x+1)}{(1+y)(1+x+y)} \geq N_{im}^{1-\lambda}\rho_1.$$

Kiedy $\lambda \in [0, 1]$ i $\beta_0 \leq N_{im} \leq 1$ ostatnia nierówność jest spełniona jeśli nierówność (206) jest spełniona dla $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$.

Analogicznie, aby przeformułować $\psi_t^L(t_{i+3}) > 0$ z (173) dzięki (204) otrzymano:

$$N_{im}^{\lambda-1} \left[\frac{\left(\frac{M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} - 1\right)\frac{P_{im}}{N_{im}}\left(\frac{P_{im}}{N_{im}} + 1\right)}{\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1\right)\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)} + \frac{\frac{P_{im}}{N_{im}}\left(\frac{P_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} - 1\right)}{\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}} + \frac{\frac{P_{im}}{N_{im}}\left(\frac{P_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} - 1\right)}{\frac{P_{im}}{N_{im}} + 1} + \frac{P_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} \right] \geq \rho_2,$$

które (kiedy $\lambda \in [0, 1]$ i $\beta_0 \leq N_{im} \leq 1$) jest spełnione, gdy trzecia nierówność (207) w Tw. 3.10 jest spełniona dla $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$. Stała ρ_2 jest dowolną liczbą dodatnią.

Połączenie (174) z (204) pozwala zapisać inaczej $a_i > 0$ jako (208) (dla $\lambda \in [0, 1]$) dla $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$ i jakiegoś ustalonego dowolnie małego $\rho_3 > 0$.

Finalnie, warunek dla $\psi_t^L(-b_i/2a_i) > 0$ zapisany asymptotycznie w zmiennych $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$ z (203), po przekształceniach algebraicznych, jest wyrażony jako:

$$\theta_3 = N_{im}^{\lambda-1} \cdot \left\{ \frac{2M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} + 1 + \frac{\left(1 - \frac{M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}}\right)}{\left(1 + \frac{M_{im}}{N_{im}}\right)} - \frac{\left(1 - \frac{M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}}\right)}{N_{im}^2\left(1 + \frac{M_{im}}{N_{im}}\right)} \frac{N_{im}^2\left(1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)}{\left[\frac{\left(P_{im}^{\lambda-1} - N_{im}^{\lambda-1}\right)}{\left(N_{im}^{\lambda-1} - M_{im}^{\lambda-1}\right)}\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1\right) - \left(1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)\right]} \right. \\ \left. - \left[\frac{N_{im}\left(\frac{P_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}} - 1\right)\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1\right) - \left(1 - \frac{M_{im}^{\lambda-1}}{N_{im}^{\lambda-1}}\right)\left(1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)}{N_{im}^3\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1\right)\left(1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)\left(\frac{M_{im}}{N_{im}} + 1 + \frac{P_{im}}{N_{im}}\right)} \right] N_{im}^2\left(\frac{M_{im}^2}{N_{im}^2} + \frac{M_{im}}{N_{im}} + 1\right) \right\}.$$

Ostatnie wyrażenie z pomocą (204) mapuje (175) na:

$$\frac{N_{im}^{\lambda-1}}{3} \left[2x^{\lambda-1} + 1 + \frac{1-x^{\lambda-1}}{1+x} \left(1 - \frac{(1+y)(1+x+y)}{\frac{y^{\lambda-1}-1}{1-x^{\lambda-1}}(1+x)-(1+y)} \right) - \frac{(y^{\lambda-1}-1)(1+x)-(1-x^{\lambda-1})(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}(x^2+x+1) \right] \geq \rho_4 > 0, \quad (211)$$

dla jakiegoś, ale ustalonego $\rho_4 > 0$. Kiedy $\lambda \in [0, 1]$, $\beta_0 \leq N_{im} \leq 1$ wystarczający warunek (211) (upewniając się, że $\psi_i^L(-b_i/2a_i) > 0$ zachodzi asymptotycznie) można zastąpić (209). To kończy dowód Twierdzenia 3.10. \square

Podsumowując, w Tw. 3.9 i Tw. 3.10 dwa wystarczające warunki (169)(i) i (169)(iv) aby $\psi_i^L > 0$ są asymptotycznie realizowane przez albo (171)-(175) albo (205)-(209) wyrażone odpowiednio w terminach zmiennych (M_{im}, N_{im}, P_{im}) lub (x, y) . Analizując dwa powyższe dowody, spełnienie nierówności z Tw. 3.10 sprowadza się do faktu, że odpowiednie warunki w Tw. 3.9 są spełnione dla wystarczająco dużych m (t.j. zachodzą asymptotycznie).

Uwaga 3.11. Należy zauważyć, że (169)(i) wymusza ψ_i^L jako wklęsłą krzywą na $I_i = [t_i, t_{i+3}]$ z albo $t_{max} \notin I_i$ (t.j. dla ψ_i^L ostro rosnącego lub ostro malejącego) albo $t_{max} \in (t_i, t_{i+3})$. Z innej strony warunek (169)(iv) narzuca wypukłość ψ_i^L . Tutaj, przypadek $t_{min} \in (t_i, t_{i+3})$ jest włączony do (169)(iv) podobnie do (169)(i), gdzie t_{max} zastępuje t_{min} . Przypadki (169)(ii) i (169)(iii) stanowią uzupełnienie warunku (169)(iv) o klasę próbkowań, spełniających $t_{min} \notin I_i$ i $\psi_i^L(t_{min}) \leq 0$

Zauważmy, że warunek (169)(iv) zawiera (169)(ii) i (169)(iii) wtedy gdy $\psi_i^L(t_{min}) > 0$. Podobnie jak poprzednio, przekształcono trzecią nierówność z (169)(ii) do:

$$\frac{\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] - \psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}](t_{i+2} + t_{i+1} + t_i)}{3\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} < t_i,$$

którą po kilku algebraicznych przekształceniach można zapisać jako:

$$\frac{-\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]}{\psi_i^L[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}]} + t_{i+2} + t_{i+1} - 2t_i < 0. \quad (212)$$

Stosując do (212) proste obliczenia przekształcono $-\frac{b_i}{2a_i} < t_i$ na asymptotyczny odpowiednik (dla ustalonego dowolnego $\rho_5 < 0$):

$$\frac{\frac{M_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i}}{\frac{(M_i + N_i)(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}) - (P_i + N_i)(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})}{(P_i + N_i)(M_i + N_i)(M_i + N_i + P_i)}} + N_i + 2M_i \leq \rho_5 < 0, \quad (213)$$

dla $(M_i, N_i, P_i) \in [\beta_0, 1]^3$. Ostatnia nierówność w terminach (x, y) jest spełniona pod warunkiem, że:

$$\frac{1 + x + y}{\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\left(\frac{y^{\lambda-1}-1}{x^{\lambda-1}-1}\right) + 1} + 1 + 2x \leq \frac{\rho_5}{\beta_0} < 0, \quad (214)$$

dla $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$. Zwróćmy uwagę, że w (213) dzieląc przez N_i i przechodząc do zmiennych (x, y) dostaje się $N_i^{-1}\rho_5$. Podobne obliczenia dla $-\frac{b_i}{2a_i} > t_{i+3}$ także dają asymptotyczne odpowiedniki:

$$\frac{\frac{N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1}}{N_i + M_i}}{\frac{(M_i + N_i)(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}) - (P_i + N_i)(N_i^{\lambda-1} - M_i^{\lambda-1})}{(P_i + N_i)(M_i + N_i)(M_i + N_i + P_i)}} + M_i + 2N_i + 3P_i \leq \rho_6 < 0, \quad (215)$$

dla $(M_i, N_i, P_i) \in [\beta_0, 1]^3$, które z kolei z (204) jest zapisywane jako:

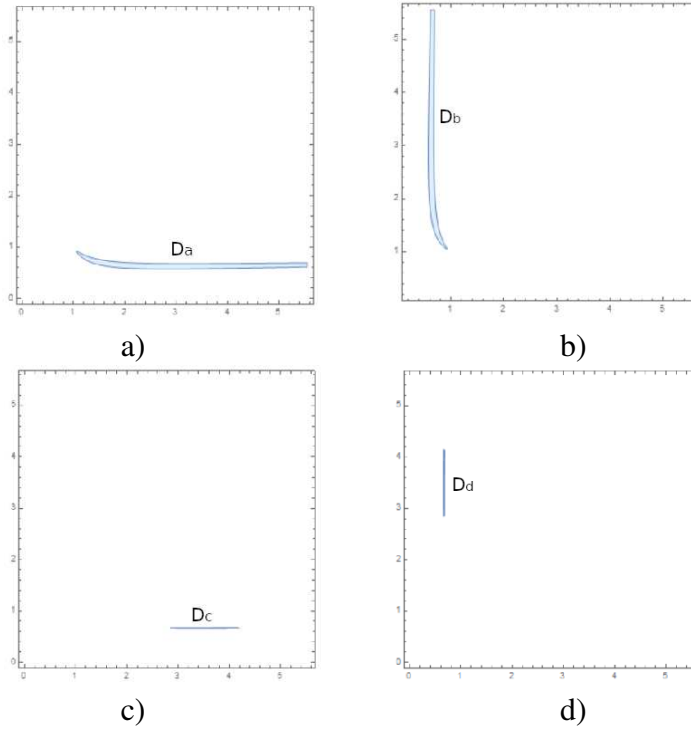
$$\frac{1 + x + y}{\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\left(\frac{y^{\lambda-1}-1}{1-x^{\lambda-1}}\right) - 1} + 2 + x + 3y < \frac{\rho_6}{\beta_0} < 0, \quad (216)$$

dla $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$ i pewnego ustalonego $\rho_6 < 0$ (dowolnie małego).

Jak się okazuje, warunki (213), (214), (215) lub (216) powodują, że (169)(ii) lub (169)(iii) są zbyt restrykcyjne i jako takie mają ograniczone zastosowanie. Obrazują to przykłady dla $\lambda = 0,7$, $\beta_0 = 0,18$, $\rho_1 = 0,05$, $\rho_2 = 0,05$, $\rho_3 = 0,001$, $\rho_4 = 0,001$, $\rho_5 = -0,0001$ i $\rho_6 = -0,0001$, Rys. 28 (a)-(b) pokazuje, że (169)(ii) i (169)(iii) są asymptotycznie reprezentowane przez cienkie zbiory $D_a, D_b \subset [\beta_0, 1/\beta_0]^2$. Dodatkowo, Rys. 28 (c)-(d) ilustruje, że podzbiory $D_c \subset D_a$ (i $D_d \subset D_b$) reprezentujące (169)(ii) i $\psi_i^L(-b_i/2a_i) \leq 0$ (lub (169)(iii) i $\psi_i^L(-b_i/2a_i) \leq 0$) asymptotycznie są jeszcze mniejsze.

Przypomnijmy, że tylko drugie wyrażenia w (169)(ii) i (169)(iii) nie są objęte przez (169)(iv). Taka prawidłowość istnieje dla różnych $\lambda \in [0, 1)$, $\beta_0 \in (0, 1)$ i ρ_i z $i = 1, 2, \dots, 6$. Obydwa wyrażenia (169)(ii) i (169)(iii) razem z $\psi_i^L(-b_i/2a_i) > 0$ (dla $t_i \in [t_i, t_{i+3}]$) mogą być zastąpione przez jeden warunek (169)(iv) bez znaczącej utraty ogólności rozważań z pominięciem $\psi_i^L(-b_i/2a_i) \leq 0$.

Poszukiwanie kolejnych alternatywnych do (169)(i) i (169)(iv) warunków wystarczających



Rys. 28. Wykresy (dla $\lambda = 0,7$) odpowiednich obszarów D_a i D_b punktów $(x, y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$ spełniających albo (a) (206), (208) i (214) do wymuszenia asymptotycznego (169)(ii) lub (b) (207), (208) i (216) do zapisania asymptotycznie (169)(iii). Dopuszczalne obszary $D_c \subset D_a$ i $D_d \subset D_b$ dla dodatkowego warunku $\psi_i^L(-b_i/2a_i) \leq 0$ wymuszane są asymptotycznie przez symetryczną nierówność do (209) i łączone z (c) (206), (208) i (214) lub z (d) (207), (208) i (216). Warunki (c) i (d) nie brane pod uwagę przez (208) i (209) są reprezentowane przez małe zbiory D_c i D_d .

stanowi **możliwe rozszerzenie tej pracy**. Zauważyć należy, że dla $a_i = 0$ (tj. kiedy np. albo $\lambda = 1$ lub próbkowanie \mathcal{T} jest *równomierne*) dwa warunki $\psi_i^L(t_i) > 0$ i $\psi_i^L(t_{i+3}) > 0$ gwarantują $\psi_i^L > 0$ na I_i , bo wtedy ψ_i^L redukuje się do funkcji liniowej.

3.2.2 Testy numeryczne

Przedstawione eksperymenty numeryczne oraz opisane przykłady potwierdzają założenia zawarte w Tw. 3.9 i Tw. 3.10.

Uwaga W przykładach zastosowano następującą notację (dla tabel i rysunków): (169(i))* (lub (169(i)**)) określa nierówności (171), (172) i (173) (lub (205), (206) i (207)). Podobnie (169(iv))* (lub (169(iv)**)) określa (174) i (175) (lub (208) i (209)). W przykładach 10 i 11 przetestowano czy interpolant ψ oparty o wybrane próbkowania jest funkcją iniekcijną. Poniżej szczegółowy opis eksperymentu: Dla danego ustalonego β_0 wprowadzono dwie rodziny β_0 -mniej lub bardziej równomiernych próbkowań (25) i (26). Następnie, spełnienie

asymptotycznych wystarczających warunków zapewniających $\psi^L > 0$ (patrz Tw. 3.9 lub Tw. 3.10) jest badane dla różnych $\lambda \in [0, 1)$ i wspomnianych próbkowań. Algebraiczne obliczenia zostały uzupełnione o geometryczne wizualizacje 2D i 3D wygenerowane w pakiecie *Mathematica*.

Przykład 10 (Sprawdzenie czy ψ^L jest iniekcją). Rozważono rodzinę \mathcal{T}_1 *mniej lub bardziej równomiernych próbkowań* daną wzorem (25). Założono, że $1 \leq i \leq m = 3k$, gdzie $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ z $t_0 = 0$ i $t_m = T = 1$. Po skorzystaniu z (170) odpowiadająca asymptotyczna reprezentacja 3D: \mathcal{T}_1^{3D} dla \mathcal{T}_1 zapisana jest jako (dla jakiegoś m):

$$\mathcal{T}_1^{3D} = \left\{ \left(\frac{5}{8}, 1, \frac{1}{2} \right), \left(1, \frac{1}{2}, 1 \right), \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right), \left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{8} \right), \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{8} \right) \right\}. \quad (217)$$

Ostatnie dwa punkty (pierwszy punkt) w (217) jest określony jako $m = 3k$ i $t_m = T = 1$ (przy $t_0 = 0$). Inne punkty (217) odnoszą się do wygenerowanych z (25). Ustawiono $\beta_0 = 0, 15 \leq \beta_1$ i więc (25) jest także β_0 -*mniej lub bardziej równomierne*. Następnie, przez (204) i (217) otrzymano odpowiadające przeliczenie asymptotyczne dla przypadku dwuwymiarowego \mathcal{T}_1^{2D} dla (25):

$$\mathcal{T}_1^{2D} = \left\{ \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2} \right), (2, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(2, \frac{7}{4} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right) \right\}. \quad (218)$$

λ	War. \mathcal{T}_1^{3D} / \mathcal{T}_1^{2D}	$\left(\frac{5}{8}, 1, \frac{1}{2} \right)$	$\left(1, \frac{1}{2}, 1 \right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)$	$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{8} \right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{8} \right)$
		$\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2} \right)$	$(2, 2)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$	$\left(2, \frac{7}{4} \right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right)$
0,1	$(169(i))^* \& (169(i))^{**}$	F	F	F	F	F
	$(169(iv))^* \& (169(iv))^{**}$	P	F	P	F	P
0,7	$(169(i))^* \& (169(i))^{**}$	F	P	F	P	F
	$(169(iv))^* \& (169(iv))^{**}$	P	F	P	F	P

Tab. 11: Wyniki sprawdzenia $(169(i))$ i $(169(iv))$ (wymuszone asymptotycznie przez albo $(169(i))^*$ i $(169(i))^{**}$ albo przez $(169(iv))^*$ i $(169(iv))^{**}$) dla próbkowania (25) (reprezentowanego przez (217) i (218)) i $\lambda \in \{0, 1; 0, 7\}$ z $\rho = -0,001$, $\rho_1 = 0,05$, $\rho_2 = 0,05$, $\rho_3 = 0,001$ i $\rho_4 = 0,005$. Tutaj **P** oznacza *prawdę* i **F** - *fałsz*, odpowiednio po weryfikacji odpowiednich warunków z wiersza wymienionych w drugiej kolumnie.

Dla innego próbkowania β_0 -*mniej lub bardziej równomiernego* \mathcal{T}_2 , zdefiniowanego według wzoru (26) przyjmuje się także, że $t_0 = 0$ i $t_m = T = 1$ z $1 \leq i \leq m = 3k$, dla $k \in$

$\{1, 2, 3, \dots\}$. Biorąc pod uwagę (170) reprezentacja 3D \mathcal{T}_2^{3D} dla (26) jest zapisana poniżej (dla dowolnego m):

$$\mathcal{T}_2^{3D} = \left\{ \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{28}, \frac{9}{14} \right), \left(\frac{5}{28}, \frac{1}{2}, 1 \right), \left(\frac{5}{28}, \frac{9}{14}, \frac{5}{28} \right), \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{28} \right), \left(\frac{9}{14}, \frac{5}{28}, \frac{1}{2} \right), \left(1, \frac{5}{28}, \frac{9}{14} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{5}{28}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{5}{28}, \frac{9}{14}, \frac{3}{7} \right), \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{9}{14}, \frac{5}{28}, \frac{3}{4} \right), \left(1, \frac{5}{28}, \frac{4}{7} \right) \right\}. \quad (219)$$

Ostatnie 5 punktów (pierwszy punkt) w (219) należy do zbioru kiedy $t_m = T$ ($t_0 = 0$). Pozostałe 5 punktów w (219) to punkty generowane przez próbkowanie (26). Dzięki (204) trójki punktów ze wzoru (219) można zapisać jako 2D wymiarowe \mathcal{T}_2^{2D} :

$$\mathcal{T}_2^{2D} = \left\{ \left(\frac{21}{5}, \frac{18}{5} \right), \left(\frac{5}{14}, 2 \right), \left(\frac{5}{18}, \frac{5}{18} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{28} \right), \left(\frac{18}{5}, \frac{14}{5} \right), \left(\frac{28}{5}, \frac{18}{5} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{5}{14}, \frac{3}{2} \right), \left(\frac{5}{18}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{18}{5}, \frac{21}{5} \right), \left(\frac{28}{5}, \frac{16}{5} \right) \right\}. \quad (220)$$

Nierówności $(169(i))^*$ ($(169(iv))^*$) i ich asymptotyczne odpowiedniki $(169(i))$ ($(169(iv))$) są badane na $[\beta_0, 1]^3$ dla obu próbkowań (25) i (26). Parametr $\lambda \in \{0, 1; 0, 7; 0, 9\}$ z $\rho = -0,001$, $\rho_1 = \rho_2 = 0,05$, $\rho_3 = 0,001$ i $\rho_4 = 0,005$ - patrz Tab. 11 i Tab. 12.

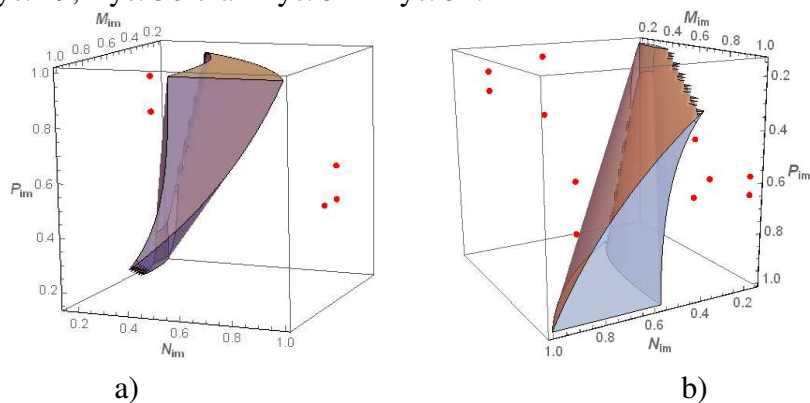
λ	War.	\mathcal{T}_2^{3D}					
		$\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{28}, \frac{9}{14} \right)$	$\left(\frac{5}{28}, \frac{1}{2}, 1 \right)$	$\left(\frac{5}{28}, \frac{9}{14}, \frac{5}{28} \right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{28} \right)$	$\left(\frac{9}{14}, \frac{5}{28}, \frac{1}{2} \right)$	$\left(1, \frac{5}{28}, \frac{9}{14} \right)$
0,1	$(169(i))^* \text{ i } (169(i))^{**}$	F	F	F	F	F	F
	$(169(iv))^* \text{ i } (169(iv))^{**}$	F	P	P	P	F	F
0,9	$(169(i))^* \text{ i } (169(i))^{**}$	P	F	F	F	P	P
	$(169(iv))^* \text{ i } (169(iv))^{**}$	F	P	P	P	F	F

λ	War.	\mathcal{T}_2^{2D}				
		$\left(\frac{5}{14}, \frac{3}{2} \right)$	$\left(\frac{5}{18}, \frac{2}{3} \right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$	$\left(\frac{18}{5}, \frac{21}{5} \right)$	$\left(\frac{28}{5}, \frac{16}{5} \right)$
0,1	$(169(i))^* \text{ i } (169(i))^{**}$	F	F	F	F	F
	$(169(iv))^* \text{ i } (169(iv))^{**}$	P	P	P	F	F
0,9	$(169(i))^* \text{ i } (169(i))^{**}$	F	F	F	P	P
	$(169(iv))^* \text{ i } (169(iv))^{**}$	P	P	P	F	F

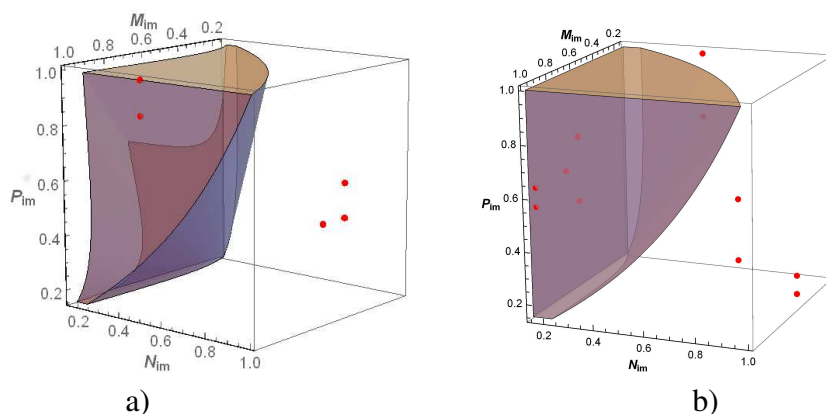
Tab. 12: Wynik testowania $(169(i))$ i $(169(iv))$ (wymuszone asymptotycznie albo przez $(169(i))^*$ i $(169(i))^{**}$ albo przez $(169(iv))^*$ i $(169(iv))^{**}$) dla próbkowania (26) (reprezentowanego przez (219) i (220)) oraz dla $\lambda \in \{0, 1; 0, 9\}$ z $\rho = -0,001$, $\rho_1 = 0,05$, $\rho_2 = 0,05$, $\rho_3 = 0,001$ i $\rho_4 = 0,005$. Tutaj **P** oznacza *prawdę* i **F** *falsz*, odpowiednio po zweryfikowaniu odpowiadających warunków z wierszy przedstawionych w drugiej kolumnie.

Powiązane zbiory trójek $\vec{O}_{im} \in [\beta_0, 1]^3$ spełniające albo $(169(i))^*$ lub $(169(iv))^*$

reprezentują odpowiednie bryły 3D $D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$ wykreślone w programie *Mathematica* jak pokazano na Rys. 29, Rys. 30 oraz Rys. 31 i Rys. 32.

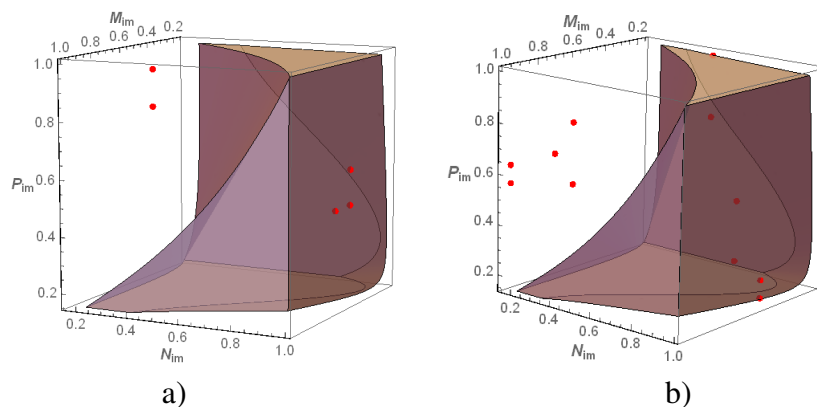


Rys. 29. Warunek (169(i)) asymptotycznie (169(i))* przedstawiony na wykresie 3D jako trzy bryły: $D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$. Tutaj $\beta_0=0,15$ z punktami reprezentującymi próbkowanie: a) (25) mapowane na (217) lub b) (26) mapowane na (219) obydwia dla $\lambda=0,1$.

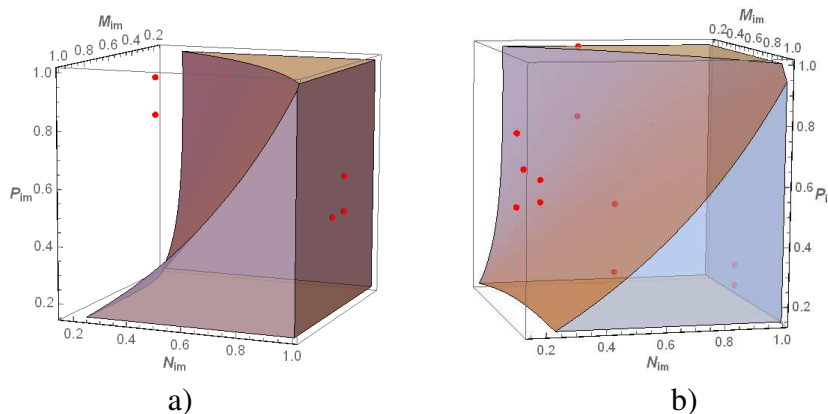


Rys. 30. Warunek (169(i)) asymptotycznie (169(i))* przedstawiony na wykresie 3D jako trzy bryły: $D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$. Tutaj $\beta_0=0,15$ z punktami reprezentującymi próbkowania: a) (25) dla $\lambda=0,7$ mapowane na (217) lub b) (26) dla $\lambda=0,9$ mapowane na (219).

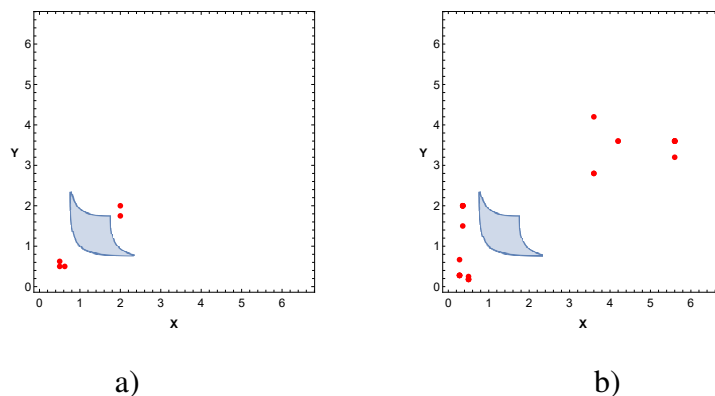
Wyrażenia (169(i)) i (169(iv)) formułowane na ich asymptotyczne odpowiedniki dwuwymiarowe (169(i)** (lub (169(iv)**)) zostały algebraicznie zweryfikowane dla (25) i (26) w Tab. 11 i Tab. 12 i także zostały zaprezentowane na Rys. 33 i 35. Tu wszystkie pary $(x,y) \in [\beta_0, 1/\beta_0]^2$ spełniające albo (169(i)** albo (169(iv)** określają odpowiednie podobszary $\hat{D}_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1/\beta_0]^2$. Widać, że wszystkie wykresy 2D reprezentujące obszary dopuszczalności asymptotycznej próbkowań są bardziej czytelne. To pokazuje zaletę zastosowania *przekształcenia jednorodnego* (204) do (170). Różne punkty z \mathcal{F}_k^{3D} , dla $k = 1,2$ (lub z \mathcal{F}_k^{2D}) mogą spełniać różne asymptotyczne wystarczające warunki wymuszając albo (169(i)) albo (169(iv)) - patrz Rysunki 33, 34 oraz 35 i 36.



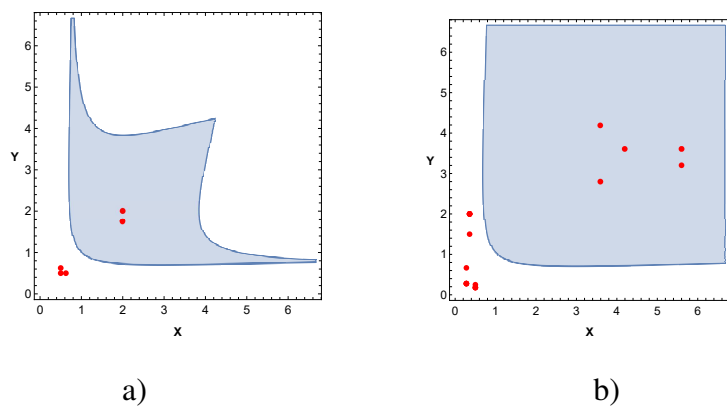
Rys. 31. Warunek (169(iv)) asymptotycznie reprezentowany przez (169(iv))* zwizualizowany na wykresie 3D jako bryły $D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$. Tutaj $\beta_0=0,15$ z punktami reprezentującymi próbkowanie: a) (25) mapowane na (217) lub b) (26) mapowane na (219) obydwu dla $\lambda=0,1$.



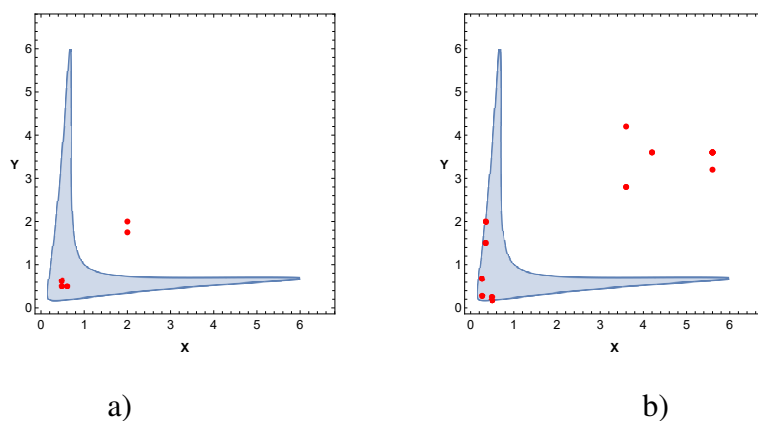
Rys. 32. Warunek (169(iv)) asymptotycznie reprezentowany przez (169(iv))* zwizualizowany na wykresie 3D jako dwie bryły $D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$. Tutaj $\beta_0=0,15$ z punktami reprezentującymi próbkowanie: a) (25) dla $\lambda=0,7$ mapowane na (217) lub b) (26) dla $\lambda=0,9$ przekształcane na (219).



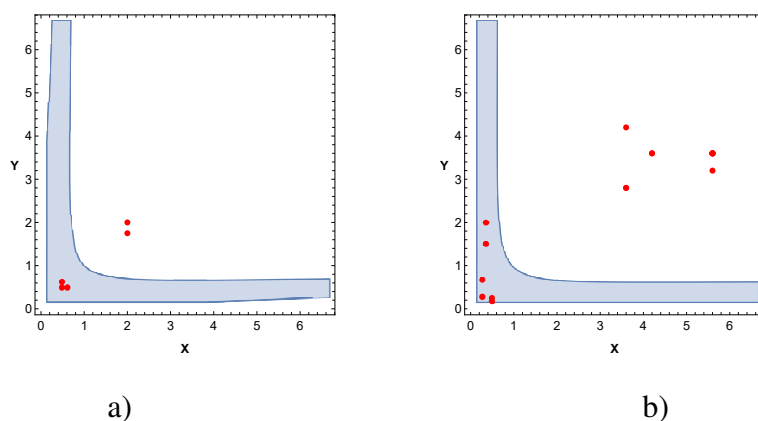
Rys. 33. Warunek (169(i)) wymuszony asymptotycznie przez (169(i))* zwizualizowany w 2D jako trzy podobszary $\hat{D}_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1/\beta_0]^2$, $\beta_0=0,15$ z punktami reprezentującymi próbkowanie: a) (25) mapowane na (218) lub b) (26) mapowane na (220) obydwu dla $\lambda=0,1$.



Rys. 34. Warunek (169(i)) wymuszony asymptotycznie przez (169(i))** zwizualizowany w 2D jako trzy podobszary $\hat{D}_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1/\beta_0]^2$, $\beta_0=0,15$ z punktami reprezentującymi próbkowania: a) (25) dla $\lambda=0,7$ mapowane na (218) lub b) (26) dla $\lambda=0,9$ mapowane na (220).



Rys. 35. Warunek (169(iv)) wymuszony asymptotycznie dla (169(iv))** zobrazowany w 2D jako dwa podobszary $\hat{D}_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1/\beta_0]^2$. $\beta_0=0,15$ z punktami reprezentującymi próbkowania: a) (25) przekształcane na (218) lub b) (26) mapowane na (220) obydwa dla $\lambda=0,1$.



Rys. 36. Warunek (169(iv)) wymuszony asymptotycznie dla (169(iv))** zobrazowany w 2D jako dwa podobszary $\hat{D}_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1/\beta_0]^2$. $\beta_0=0,15$ z punktami reprezentującymi próbkowania: a) (25) dla $\lambda=0,7$ przekształcane na (218) lub b) (26) dla $\lambda=0,9$ rzutowane na (220).

Rzeczywiście dla $\lambda=0,1$ żadna z nierówności $(169(i))^{**}$ nie jest spełniona przez żadną z par z \mathcal{T}_k^{2D} (dla $k=1,2$) umieszczonych na zewnątrz obszaru $\hat{D}_{\beta_0}^\lambda$. Także $(169(iv))^{**}$ jest spełniony tylko przez jakieś punkty z \mathcal{T}_k^{2D} . To samo następuje dla $(169(i))^*$ i $(169(iv))^*$ - patrz Rys. 29, Rys. 30 oraz Rys. 31 i Rys. 32. W związku z tym iniekcyjność funkcji ψ_i^L dla \mathcal{T}_1^{2D} lub \mathcal{T}_2^{2D} nie jest zapewniona. W przeciwieństwie do poprzedniego na Rys. 33, Rys. 34 i Rys. 35, Rys. 36 wszystkie punkty z \mathcal{T}_1^{2D} dla $\lambda = 0,7$ (i z \mathcal{T}_2^{2D} dla $\lambda = 0,9$) są wewnątrz $\hat{D}_{\beta_0}^\lambda$ określonego przez $(169(i))^{**}$ lub $(169(iv))^{**}$. Testy algebraiczne $(169(i))^*$ lub $(169(iv))^*$ (lub z $(169(i))^{**}$ lub $(169(iv))^{**}$) są przedstawione w Tab. 11 i Tab. 12. Zauważyć należy, że wszystkie przeprowadzone eksperymenty obu warunków $(169(i))^*$ i $(169(i))^{**}$ (lub $(169(iv))^*$ i $(169(iv))^{**}$) pokazują, że są one albo spełnione albo nie. Tabele 11 i 12 zestawiają odpowiedni zbiór nierówności (patrz Uwaga na początku rozdziału) w tym samym wierszu. \square

Przykład 11. Rozważmy rodzinę próbkowań \mathcal{T}_0 należąca do klasy *mniej lub bardziej równomiernych* (z rozkładem geometrycznym $\{\gamma(t_i)\}_{i=0}^{15}$ i próbkowaniem (23) (zobacz Rys. 13). Tutaj $0 \leq i \leq m = 3k$, gdzie $k \in \{1,2,\dots\}$ oraz $t_0 = 0$ i $t_m = T = 1$. Z uwzględnieniem (170) następującą asymptotyczną reprezentację $3D \mathcal{T}_0^{3D}$ dla \mathcal{T}_0 można zapisać (dla $m = 3k$):

$$\mathcal{T}_0^{3D} = \left\{ \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(1, 1, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1, 1\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right), \left(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) \right\}. \quad (221)$$

Ostatnie dwa punkty w (221) są generowane dla $m = 3k$ gdy $t_m = 1$. Ustawiamy $\beta_0 = 0,16$ i stąd kiedy $\beta_0 \leq \beta_1$ próbkowanie (23) jest także β_0 -mniej lub bardziej równomierne.

Przywołamy też próbkowanie β_0 -mniej lub bardziej równomierne \mathcal{T}_3 zdefiniowane z (24) (zobacz Rys. 14) gdzie $\beta_2 = \frac{1}{5} \geq \beta_0$. Znowu ustawiamy $t_0 = 0$ i $t_m = T = 1$ z $0 \leq i \leq m = 3k$, dla $k \in \{1,2,\dots\}$. Z pomocą (170) asymptotyczna forma $3D \mathcal{T}_3^{3D}$ tego próbkowania może zostać zapisana jako:

$$\mathcal{T}_3^{3D} = \left\{ \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 1\right), \left(\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{5}\right), \left(1, \frac{1}{5}, 1\right), \left(1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5}\right) \right\}. \quad (222)$$

Ostatnie dwa punkty (222) pochodzą z $m = 3k$, gdy $t_m = 1$ i pierwszy punkt odnosi się do $t_0 = 0$. Nierówności (171), (172), (173) oznaczone $(169(i))^*$ (lub (174) i (175) ozn. $(169(iv))^*$) wymuszają asymptotyczne $(169(i))$ (lub $(169(iv))$) testowane na $[\beta_0, 1]^3$ dla obu próbkowań (23) i (24). Ustalony parametr λ jest ustawiony jako $\lambda = 0,3$ lub $\lambda = 0,9$ z $\rho = -0,001$, $\rho_1 = \rho_2 = 0,05$, $\rho_3 = 0,001$ i $\rho_4 = 0,005$ - zobacz Tab. 13 i Tab. 14.

λ	$\lambda = 0,3$		$\lambda = 0,9$	
Warunki	$(169(i))^*$	$(169(iv))^*$	$(169(i))^*$	$(169(iv))^*$
Próbkowanie \mathcal{T}_0^{3D}				
$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	F	F	P	F
$(1, 1, \frac{1}{3})$	F	P	F	P
$(\frac{1}{3}, 1, 1)$	F	P	F	P
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$	F	F	P	F
$(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	F	F	P	F
$(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3})$	F	P	F	P

Tab. 13: Warunki $(169)(i)$ i $(169)(iv)$ (osiągnięte asymptotycznie z $(169(i))^*$ i $(169(iv))^*$) dla próbkowania (23) (reprezentowanego przez (221)) i dla $\lambda = 0,3$ i $\lambda = 0,9$ z $\rho = -0,001$, $\rho_1 = 0,05$, $\rho_2 = 0,05$, $\rho_3 = 0,001$ i $\rho_4 = 0,005$. Tutaj **P** oznacza *prawda* i **F**-*falsz*.

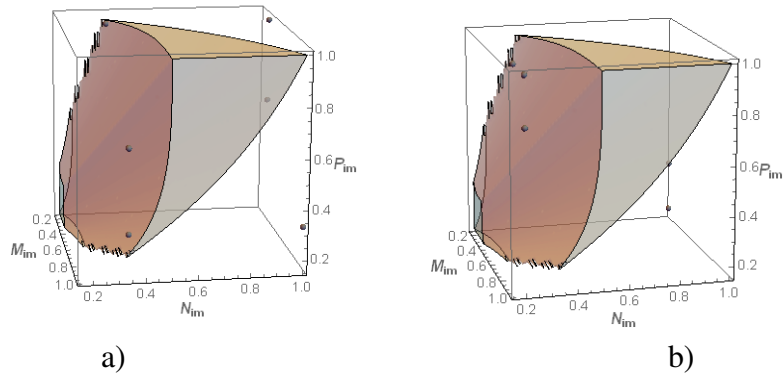
λ	$\lambda = 0,3$		$\lambda = 0,9$	
Warunki	$(169(i))^*$	$(169(iv))^*$	$(283)^*$	$(286)^*$
Próbkowanie \mathcal{T}_2^{3D}				
$(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 1)$	F	F	P	F
$(\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{5})$	F	P	F	P
$(1, \frac{1}{5}, 1)$	F	F	P	F
$(1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5})$	F	F	P	F
$(\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5})$	F	P	F	P

Tab. 14: Testowanie warunków $(169)(i)$ i $(169)(iv)$ (wyprowadzonych asymptotycznie z $(169(i))^*$ i $(169(iv))^*$) dla próbkowania (24) (zapisanego też jako (222)) i dla $\lambda = 0,3$ i $\lambda = 0,9$ z $\rho = -0,001$, $\rho_1 = 0,05$, $\rho_2 = 0,05$, $\rho_3 = 0,001$ i $\rho_4 = 0,005$. Podobnie jak wcześniej **P** oznacza *prawda* i **F** - *falsz*.

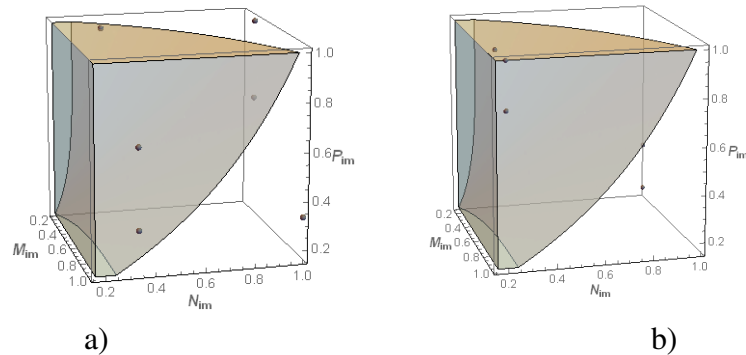
Odpowiednie zestawy trójek $(M_{im}, N_{im}, P_{im}) \in [\beta_0, 1]^3$ spełniające albo $(169(i))^*$ lub $(169(iv))^*$ tworzą odpowiednie bryły 3D $D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$ narysowane w pakiecie *Mathematica*, co pokazano na Rys. 37, Rys. 38, Rys. 39 oraz Rys. 40. Warto zauważyć, że różne punkty ze zbioru \mathcal{T}_k^{3D} , dla $k = 0,3$ mogą wymiennie spełniać lub nie, jeden z warunków wystarczających $(169(i))$ lub $(169(iv))$, co zostało przedstawione w Tab. 13 i Tab. 14. Natomiast dla $\lambda = 0,3$ wszystkie warunki z $(169(i))^*$ nie są spełnione przez obydwa zbiory \mathcal{T}_k^{3D} (dla $k = 0,3$) więc mamy **F** w odpowiednich kolumnach w Tab. 13 i Tab. 14. Co więcej, warunek $(169(iv))^*$ jest spełniony tylko przez niektóre punkty (nie wszystkie) z \mathcal{T}_k^{3D} . Konsekwentnie iniekcyjność ψ_i^L dla \mathcal{T}_0^{3D} lub \mathcal{T}_3^{3D} nie jest zagwarantowana. Geometrycznie obydwa zbiory \mathcal{T}_k^{3D} (dla $k = 0,3$) nie są zawarte w odpowiednim obszarze iniekcyjności $D_{\beta_0}^{\lambda=0.3}$ (dla albo $(169(i))^*$ lub $(169(iv))^*$). Natomiast dla $\lambda = 0,9$, proste sprawdzenie Tab. 13 i Tab. 14 pokazuje, że wszystkie punkty z \mathcal{T}_k^{3D} (dla $k = 0,3$) mogą być podzielone na dwa podzbiory, każdy zawarty w obszarach

iniekcji $D_{\beta_0}^{\lambda=0,9}$ określonym przez $(169(i))^*$ lub przez $(169(iv))^*$, odpowiednio. Algebraicznie oznacza to conajmniej jedno \mathbf{P} w ostatnich dwóch kolumnach wszystkich wierszy w Tab. 13 i Tab. 14. \square

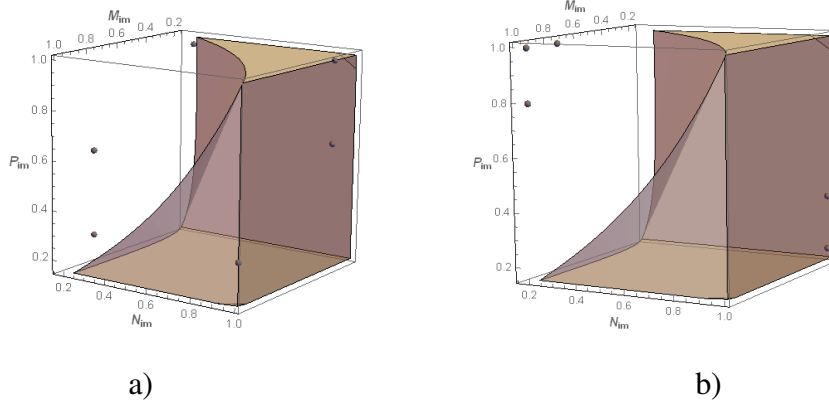
Uwaga 3.12. Dla $\mathcal{T}_{\beta_0}^a \subset \mathcal{T}_{\beta_0}$, z $\vec{O}_{im} \in I_a^{3D} = (a_1, a_2) \times (a_3, a_4) \times (a_5, a_6)$ można zweryfikować (dla $\lambda \in [0, 1)$) czy $I_a^{3D} \subset D_{\beta_0}^\lambda$. Z Tw. 3.10, jeśli ostatnie ma miejsce to wszystkie próbkowania $\mathcal{T}_{\beta_0}^a$ sprawiają, że asymptotycznie ψ_t^L jest iniekcją. Podobnie Tw. 3.10 można rozważyć razem z warunkiem $2D I_a^{2D} \subset \hat{D}_{\beta_0}^\lambda$, gdzie $I_a^{2D} = (\frac{a_1}{a_4}, \frac{a_2}{a_3}) \times (\frac{a_5}{a_4}, \frac{a_6}{a_3})$. Taka dodatkowa informacja na \mathcal{T} otrzymana z $\mathcal{T}_{\beta_0}^a$ czasami towarzyszy Q_m .



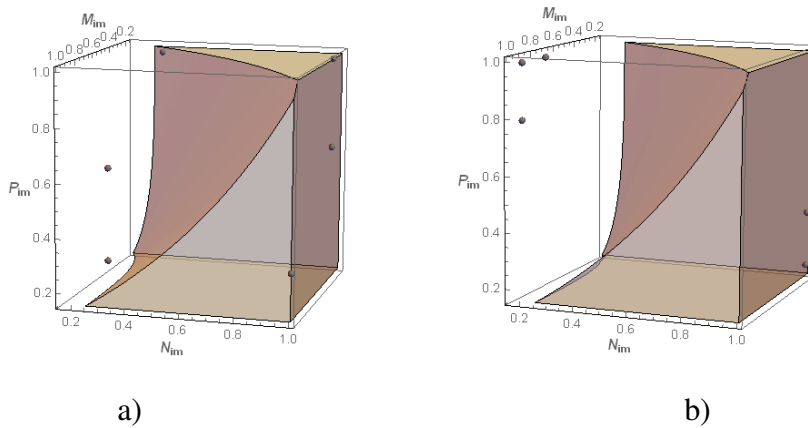
Rys. 37. Warunek $(169(i))$ wymuszony asymptotycznie $(169(i))^*$ zobrazowany w 3D jako trzy bryły $D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$, dla $\lambda=0,3$. Tutaj $\beta_0=0,16$ z punktami reprezentującymi próbkowanie: a) (23) mapowane na (221) lub b) (24) przekształcane na (222) obydwa $\lambda=0,3$.



Rys. 38. Warunek $(169(i))$ wymuszony asymptotycznie $(169(i))^*$ zobrazowany w 3D jako trzy bryły $D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$, dla $\lambda=0,9$. Tutaj $\beta_0=0,16$ z punktami reprezentującymi próbkowanie: a) (23) zapisane jako (221) lub b) (24) w postaci (222) obydwa dla $\lambda=0,9$.



Rys. 39. Warunek (169(iv)) wymuszony asymptotycznie przez (169(iv))* narysowany jako dwie bryły $3D D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$, dla $\lambda = 0, 3$. $\beta_0=0, 16$ z kropkami jako reprezentantami próbkowań: a) (23) z (221) lub b) (24) mapowane na (222) dla $\lambda=0, 3$.



Rys. 40. Warunek (169(iv)) wymuszony asymptotycznie przez (169(iv))* narysowany jako dwie bryły $3D D_{\beta_0}^\lambda \subset [\beta_0, 1]^3$, dla $\lambda = 0, 9$. $\beta_0=0, 16$ z kropkami jako reprezentantami próbkowań: a) (23) mapowane na (221) lub b) (24) mapowane na (222) obydwu dla $\lambda=0, 9$.

W kolejnych dwóch przykładach zbadano numerycznie rząd zbieżności $\alpha(\lambda)$ w szacowaniu długości $d(\gamma) - d(\hat{\gamma}_3^L) = O(\delta_m^{\alpha(\lambda)})$, dla jakiegoś $\lambda \in [0, 1]$ wymuszającego ψ_i^L jako funkcję iniekcji. Przypomnijmy, że długość interpolanta liczymy sumując długości na poszczególnych podprzedziałach (tj. $[t_i, t_{i+3}]$, $[t_{i+3}, t_{i+6}]$, \dots , $[t_{m-3}, t_m]$), korzystając z Def. 2.3, a mianowicie:

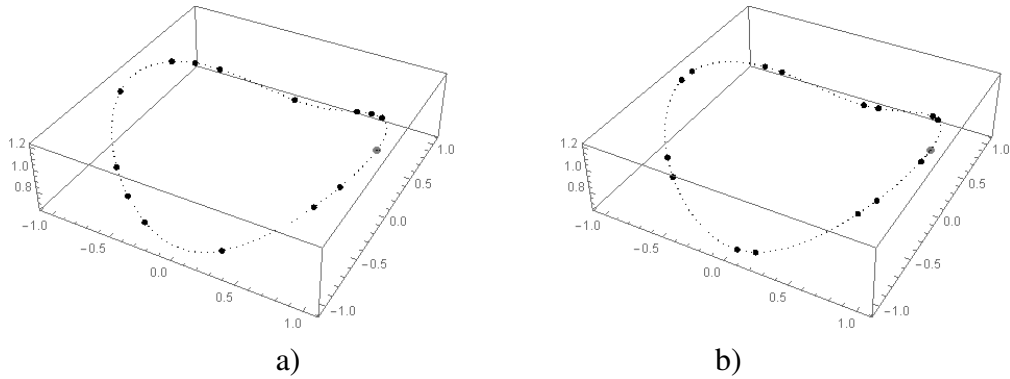
$$d(\hat{\gamma}_3^L) = \sum_{i=0}^m \int_{\hat{t}_i}^{\hat{t}_{i+3}} \|\hat{\gamma}_{3,i}^L(\hat{t})\| d\hat{t} \quad (223)$$

Tutaj $\alpha(\lambda) \approx \tilde{\alpha}(\lambda)$ jest obliczone numerycznie dzięki *regresji liniowej* zastosowanej do par punktów $\{(\log(m), -\log(E_m))\}_{m=m_{\min}}^{m=m_{\max}}$, gdzie $E_m = |d(\gamma) - d(\hat{\gamma}^L)|$. Współczynnik kierunkowy a prostej regresji $y(x) = ax + b$ oblicza się w programie *Mathematica* z pomocą funkcji `Normal[LinearModelFit[data]]`, co daje $a = \tilde{\alpha}(\lambda)$.

Przykład 12. W rozważanym przykładzie mamy spiralę $\gamma_{sp} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ (krzywa regularna $\gamma_{sp}(0) = (-0, 2; 0)$ i $\gamma_{sp}(1) = (1, 2; 0)$ daną wzorem (9) i tzw. trójwymiarową krzywą Steinmetz'a $\gamma_S : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ (regularna zamknięta krzywa z $\gamma_S(0) = \gamma_S(1) = (1, 0; 1, 2)$ - patrz szary punkt na Rys. 41).

Obie krzywe γ_{sp} , γ_S (dane wzorem odpowiednio (9) i (14)) próbkowane są zgodnie z (23) lub (24) (patrz Rys. 13 i Rys. 41. Wyniki numeryczne $\tilde{\alpha}(\lambda)$ z $\alpha(\lambda)$ (dla $d(\gamma) - d(\hat{\gamma}^L) = O(\delta_m^{\alpha(\lambda)})$) są pokazane w Tab. 15. Liniowa regresja, której liczymy współczynnik $\tilde{\alpha}(\lambda)$ jest stosowana do zbioru punktów $\{(\log(m), -\log(E_m))\}_{m_{min}=120}^{m_{max}=201}$, z $E_m = |d(\gamma) - d(\hat{\gamma}^L)|$ i dla różnych $\lambda \in \{0, 3; 0, 7; 0, 9\}$. Wyniki z Tab. 15 sugerują, że dla $\lambda \in \{0, 3; 0, 7; 0, 9\}$ jest, że $\psi^L > 0$ i należy się spodziewać $\lim_{m \rightarrow \infty} E_m = 0$ z kwadratowym rzędem zbieżności $\alpha(\lambda) = 2 \approx \tilde{\alpha}(\lambda)$.

□



Rys. 41. Krzywa Steinmetz'a γ_S z (14) próbkowana według: a) (23) lub b) (24), dla $m = 15$ (z szarym punktem $\gamma_S(0) = \gamma_S(1) = (1, 0; 1, 2)$).

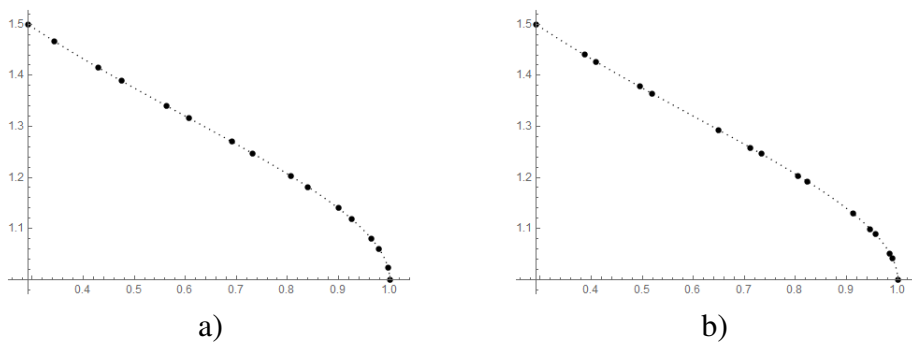
Przykład 13. Rozważono krzywe 2D i 3D-wymiarowe $\gamma_o, \gamma_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^k$ (dla $k = 2, 3$):

$$(i) \gamma_o(t) = (\cos(t^2); 1, 5^t), \quad (ii) \text{helikoida z (11)}. \quad (224)$$

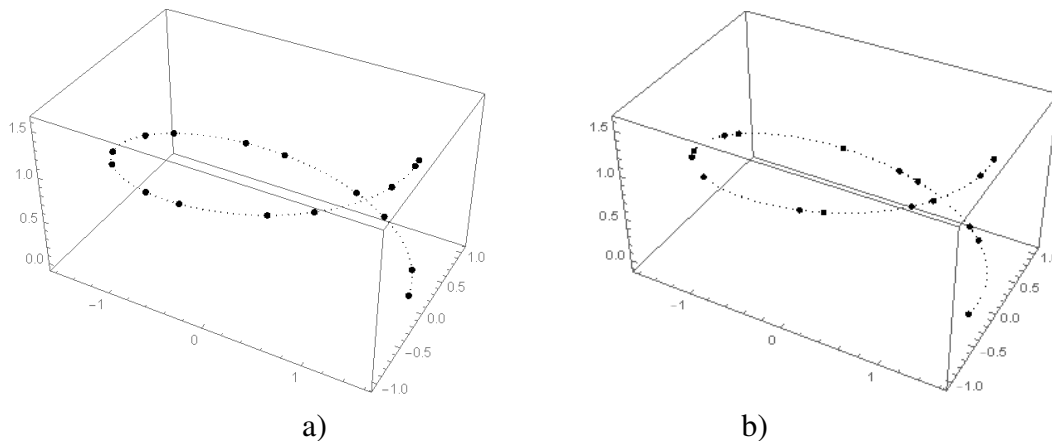
Obie krzywe regularne γ_o , γ_h próbkowane (25) lub (26) są zobrazowane na Rys. 42 i Rys. 43. Wyniki numeryczne dla $\tilde{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ są pokazane w Tab. 17. Liniowa regresja jest użyta dla $m_{min} = 120$ i $m_{max} = 210$ z $\lambda \in \{0, 3; 0, 7; 0, 9\}$. Tab. 17 sugeruje, że jeśli przynajmniej jedno z Tw. 3.9 lub Tw. 3.10 jest spełnione (z $\psi^L > 0$) ostra zbieżność kwadratowa występuje $\alpha(\lambda) = 2 \approx \tilde{\alpha}(\lambda)$, dla wszystkich $\lambda \in [0, 1)$ wymuszających $\psi^L > 0$. Algebraiczna weryfikacja $\psi^L > 0$ na $\tilde{I} = I \setminus \{t_3, t_6, \dots, t_{m-3}\}$ jest przedstawiona w Tab. 16, dla $\lambda = 0, 9$. Spełnienie tej

Krzywa	Próbkowanie	λ	$E_{m=201}$	$\alpha(\lambda) \approx \tilde{\alpha}(\lambda)$	(169(i))* lub (286)*
(9)	(23)	0,3	0,0735	0,044	F
		0,7	0,0000083	1,945	P
		0,9	0,0000016	1,885	P
	(24)	0,3	2,462	-0,012	F
		0,7	0,005	0,007	F
		0,9	0,0000319	1,989	P
(14)	(23)	0,3	0,204	0,033	F
		0,7	0,0000897	2,015	P
		0,9	0,0000181	2,092	P
	(24)	0,3	6,739	-0,009	F
		0,7	0,013	-0,080	F
		0,9	0,0003419	1,985	P

Tab. 15: Oszacowanie numeryczne $\alpha(\lambda) \approx \tilde{\alpha}(\lambda)$ dla spirali γ_{sp} ze wzoru (9) i krzywej Steinmetz'a γ_S z (14), obliczone dla $m_{min} = 120 \leq m \leq m_{max} = 201$ i $\lambda \in \{0,3; 0,7; 0,9\}$. Litera **P** oznacza prawdę i **F** fałsz



Rys. 42. Krzywa γ_o zapisana jako (224)(i) próbkowana: a) (25) lub b) (26), dla $m = 15$.



Rys. 43. Krzywa γ_h z (224)(ii) próbkowana w odniesieniu do: a) (25) lub b) (26), dla $m = 15$.

ostatniej ma miejsce wtedy, gdy ψ^L jest iniekcją na I ($\psi^L \in C^0([0, T])$). Wybrane wykresy ψ^L na \tilde{I} są narysowane na Rys. 44. \square

\mathcal{T}	γ	m			
		120	150	180	210
(25)	(224)(i)	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$
	(224)(ii)	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$
(26)	(224)(i)	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$
	(224)(ii)	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$	$\psi^L > 0 \checkmark$

Tab. 16: Testowanie algebraiczne $\psi^L > 0$ na $I \setminus \{t_3, t_6, \dots, t_{m-3}\}$ dla próbkowania (25) i (26) i krzywych γ_0, γ_h z (224) dla różnych m z $\lambda = 0, 9$. Tutaj \checkmark oznacza "spełnione".

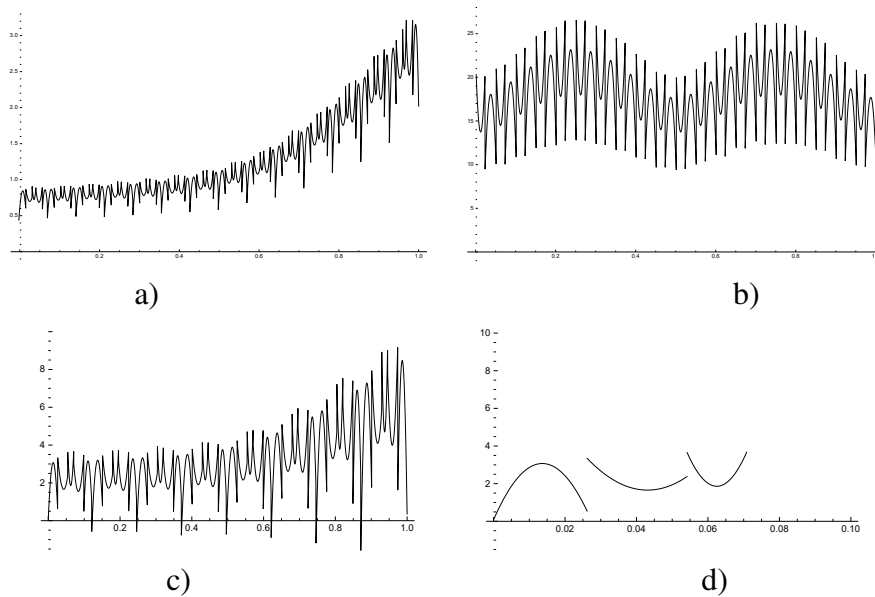
γ	\mathcal{T}	λ	$E_{m=210}$	$\alpha \approx \tilde{\alpha}$	$\begin{matrix} (283)^* \\ (286)^* \end{matrix}$	γ	\mathcal{T}	λ	$E_{m=210}$	$\alpha \approx \tilde{\alpha}$	$\begin{matrix} (283)^* \\ (286)^* \end{matrix}$
(224)(i)	(25)	0,1	0,013	-0,014	F	(224)(ii)	(25)	0,1	0,121241	0,01844	F
		0,7	$5,62 \cdot 10^{-7}$	1,897	P			0,7	0,000115	1,96055	P
		0,9	$3,0236 \cdot 10^{-7}$	1,925	P			0,9	0,000061	1,96702	P
	(26)	0,1	1,160	0,003	F		(26)	0,1	10,599900	-0,00923	F
		0,7	0,007	0,023	F			0,7	0,058812	-0,04601	F
		0,9	$4,472 \cdot 10^{-7}$	1,82	P			0,9	0,000096	1,98485	P

Tab. 17: Oszacowania numeryczne $\alpha(\lambda) \approx \tilde{\alpha}(\lambda)$ dla γ_0 i γ_h z (224) obliczone dla $m_{min} = 120 \leq m \leq m_{max} = 210$ i $\lambda \in \{0, 1; 0, 7; 0, 9\}$. Tutaj **P** oznacza *prawda* i **F** - *falsz*, odpowiednio w zależności od spełnienia warunku z ostatniej kolumny.

3.3 Podsumowanie

W tym rozdziale zostały przedstawione główne wyniki teoretyczne (stanowiące część tej pracy doktorskiej) zawarte w [3], [4], [7]. Wyniki te są sformułowane w Tw. 3.9 i Tw. 3.10 wraz z dowodami oraz uzupełnione i potwierdzone w uwagach, przykładach i eksperymentach. Szerzej opisując rezultaty można przytoczyć następujące punkty:

- dla każdego z twierdzeń oprócz dowodu analitycznego przeprowadzono eksperymenty numeryczne dla krzywych dwu-i trzywymiarowych oraz wybranych próbkowań z rodziny próbkowań mniej lub bardziej równomiernych.
- podano przykłady krzywych i próbkowań potwierdzające ostrość oszacowań podanych w twierdzeniach dla przypadków: $\lambda \in [0, 1)$, $\lambda = 1$ oraz próbkowania równomiernego.
- potwierdzono konieczność spełnienia przez próbkowanie warunku mniej lub bardziej równomierności jako czynnika wpływającego na zbieżność oraz stopień tej zbieżności.
- przeprowadzono eksperymenty, w których wykazano, że regularność krzywej istotnie wpływa na rząd zbieżności interpolanta do interpolowanej funkcji. Dodatkowo jej brak



Rys. 44. Wykresy ψ^L dla a) (224)(i) próbkowanej (26) z $\lambda = 0,9$ i $m = 210$, b) (224)(ii) próbkowanej przez (25) z $\lambda = 0,7$ i $m = 120$ (z $\psi^L > 0$ spełnionym) i dla c) (224)(i) próbkowanej (26) z $\lambda = 0,7$ i $m = 120$ (z $\psi^L > 0$ nie spełnionym) i dla d) (224)(ii) próbkowanej (25) na pierwszych trzech przedziałach dla $m = 120$ i $\lambda = 0.9$ z nieciągłościami w punktach połączeń t_3 i t_6 .

nie pozwala na uproszczenia w dowodach analitycznych twierdzeń i wymusza przyjęcie dodatkowych założeń narzuconych na krzywą interpolowaną, żeby je przeprowadzić.

W opisanych badaniach przyjęto pewne założenia, które pozwoliły osiągnąć opisane wnioski, ale jednocześnie ich brak (założeń) może stanowić dalsze prace w tej tematyce. Jednym z nich było to, że wprowadzenie funkcji ψ następowało lokalnie na każdym segmencie. Wiązało się to z tym, że w przypadku konieczności usunięcia pętli było zapewnione, że nie będzie ich lokalnie (tj. w obrębie rozważanego segmentu). Co nie znaczy, że nie pojawiały się globalnie na całym przedziale $[0, T]$. Rozszerzeniem tej pracy mogą być badania czy globalnie funkcja sklejana ψ jest bez pętelek (tj. czy pochodna tej funkcji jest > 0).

Ponieważ podczas obliczeń teoretycznych i praktycznych wprowadzamy złożenie funkcji ψ i $\hat{\gamma}$ to kolejnym rozszerzeniem tej pracy może być pytanie: Jak zachowuje się funkcja $\hat{\gamma}$ tak lokalnie jak i globalnie (co może mieć wpływ na zastosowania wyników przy sytuacjach planowania trajektorii).

Kolejnym założeniem był warunek narzucony na krzywą przybliżaną czyli jej regularność. Możliwym rozszerzeniem tej pracy jest sprawdzenie jak stopień regularności krzywej wpływa na oszacowanie rzędu zbieżności $\alpha(\lambda)$. Podczas badania funkcji ψ potrzebne było zapisanie

analitycznych warunków narzuconych na tę funkcję tak, żeby była ona różnowartościowa (tj. bez pętelek) a ściślej na jej pochodną (by w rozpatrywanym przedziale była ona > 0). Problem sprowadzał się do badania położenia paraboli i jej punktów charakterystycznych względem przedziału $[t_i, t_{i+3}]$ (tj. ramiona do dołu czy do góry, wartość paraboli w granicach przedziału oraz położenie wierzchołka). Omówione warunki (169)(i) - (169)(iv) są jednym z możliwych wyborów. Kolejnym podejściem mogłoby być rozważenie znaku pochodnej w zależności od np. położenia pierwiastków paraboli (punktów zerowych pochodnej) względem rozważanego przedziału.

Przykłady eksperymentów w przypadku oszacowania długości oraz badania znaku pochodnej potwierdziły, że zapewnienie, że funkcja ψ lokalnie jest > 0 dla pewnych parametrów λ pozwala na oszacowanie długości krzywej z bardzo małym błędem. Istnienie bowiem "pętelek" zwiększa długość interpolanta, w związku z tym oszacowania obarczone są większym błędem.

Interpolacja Lagrange'a opisana w tym rozdziale ma pewną wadę, a mianowicie brak ciągłości klasy C^1 na łączeniach kolejnych segmentów funkcji, powstała funkcja jest w tych punktach niegładka. Efekt jest kluczowym przy planowaniu trajektorii poruszającego się punktu lub przy odzyskiwaniu metodą interpolacji brakujących klatek filmowych. Wadę tego podejścia usuwa opisana w kolejnym rozdziale zmodyfikowana interpolacja Hermita.

4 Przedziałowo-kubiczna interpolacja klasy C^1 i parametryzacja wykładnicza

Kawałkami kubiczny interpolant Lagrange'a (patrz np. [24]), a ściślej jego funkcje $\hat{\gamma}_i : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ (gdzie $\gamma_i(t_{i+k}) = q_{i+k}$ dla $k = 0, 1, 2, 3$), sklejane w punktach interpolacyjnych poszczególnych przedziałów, tworzą funkcję $\hat{\gamma}^L$, która jest niegładka (jest tylko klasy C^0) we wszystkich punktach sklejania t.j. punktach q_3, q_6, \dots, q_{m-3} . Jest to niepożądany efekt np, przy planowaniu trajektorii poruszającego się punktu. Generuje się "zygzak", tym wyraźniejszy im więcej punktów interpolacyjnych podano. Aby usunąć ten defekt została wprowadzona *zmodyfikowana przedziałowo-kubiczna interpolacja* klasy C^1 , oparta na interpolacji Hermita.

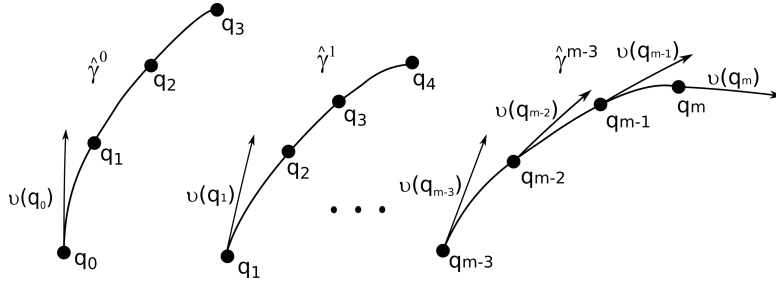
W parametrycznej wersji, interpolacja Hermita wymaga znajomości par węzłów (t_i, t_{i+1}) , wartości w tych węzłach (q_i, q_{i+1}) oraz pochodnych (np. pierwszych t.j. prędkości w węzłach $(v(q_i), v(q_{i+1}))$). Zmodyfikowana wersja opiera się na oszacowaniu nieznanymi wektorów prędkości w punktach Q_m . Prędkości te oblicza się dla funkcji przedziałowo-kubicznych Lagrange'a w sposób nakładkowy ¹⁰: $\hat{v}(q_i) = \hat{\gamma}'^L(\hat{t}_i)$ i $\hat{v}(q_{i+1}) = \hat{\gamma}'^L(\hat{t}_{i+1})$.

Podobnie jak w poprzednim rozdziale interpolanta konstruujemy na kolejnych przedziałach sklejając odpowiednie wielomiany Hermita stopnia trzeciego oparte na wartościach q_i, q_{i+1} i przybliżonych $\hat{v}_i(q_i)$ i $\hat{v}_{i+1}(q_{i+1})$. Poniżej znajduje się dokładniejszy algorytm konstrukcji zmodyfikowanego wielomianu interpolacyjnego Hermita $\hat{\gamma}^H \in C^1$ (zobacz w [1] lub [17]):

- Tworzymy "nakładkowo" wielomiany kubiczne Lagrange'a $\hat{\gamma}_i^L : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ spełniające $\hat{\gamma}_i^L(\hat{t}_{i+j}) = q_{i+j}$ z $j = 0, 1, 2, 3$ i $i = 0, 1, \dots, m-3$,
- Przyjmujemy prędkości $\{\hat{v}(q_i) = \hat{\gamma}'^L(\hat{t}_i)\}_{i=0}^m$ jako odpowiednie aproksymacje dla $\{\dot{\gamma}(t_i)\}_{i=0}^m$,
- Definiujemy wielomian kubiczny Hermita $\hat{\gamma}_i^H : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ spełniający (dla $i=0, 1, \dots, m-1$ i $k = 0, 1$):

$$\hat{\gamma}_i^H(\hat{t}_{i+k}) = q_{i+k} \quad \text{oraz} \quad \hat{\gamma}_i^{H'}(\hat{t}_{i+k}) = \hat{\gamma}'^L(\hat{t}_{i+k}), \quad (225)$$

¹⁰Pochodna wielomianu przedziałowo kubicznego Lagrange'a zdefiniowanego na $\hat{\gamma}_i^L : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ wynosi w punkcie q_i : $\hat{v}(q_i) = \hat{\gamma}'^L(\hat{t}_i)$ natomiast dla wielomianu przedziałowo kubicznego Lagrange'a stworzonego nakładkowo do niego tj. $\hat{\gamma}_{i+1}^L : [\hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+4}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ (patrz także Rys. 45) wynosi w punkcie q_{i+1} : $\hat{v}(q_{i+1}) = \hat{\gamma}'^L(\hat{t}_{i+1})$



Rys. 45. Sposób budowania interpolanta Hermita na punktach q_i i q_{i+1} z danymi z wielomianu Lagrange'a prędkościami v_i i v_{i+1}

gdzie $\hat{\gamma}_{i+1}^L$ jest pochodną wielomianu Lagrange'a w punkcie t_{i+1} zbudowanego na następnej czwórce punktów (patrz Rys. 45).

- Dla ostatnich trzech punktów (q_{m-2}, q_{m-1}, q_m) odpowiadające im prędkości $\{\hat{v}(q_j)\}_{j=m-3}^m$ są obliczone jako kolejne pochodne wielomianu Lagrange zbudowanego na ostatnim przedziale t.j.: $\hat{\gamma}_{m-3}^L(\hat{t}_{m-2}), \hat{\gamma}_{m-3}^L(\hat{t}_{m-1}), \hat{\gamma}_{m-3}^L(\hat{t}_m)$.
- Zauważmy, że wzór interpolacyjny Newtona (zobacz w [24]) na każdym podprzedziale $\hat{I}_i = [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ daje:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_i^H(\hat{t}) &= \hat{\gamma}_i^H[\hat{t}_i] + \hat{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_i](\hat{t} - \hat{t}_i) + \hat{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}](\hat{t} - \hat{t}_i)^2 \\ &\quad + \hat{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+1}](\hat{t} - \hat{t}_i)^2(\hat{t} - \hat{t}_{i+1}). \end{aligned} \quad (226)$$

- Krzywa $\hat{\gamma}^H$ (określona jako *zmodyfikowany kubiczny wielomian Hermita* - patrz [1]) reprezentowana jest jako funkcja sklejana $\{\hat{\gamma}_i^H\}_{i=0}^{m-1}$ (patrz. Def. 2.3).

Aby oszacować różnicę między γ i $\hat{\gamma}^H$ odpowiednie dziedziny obu krzywych muszą się pokrywać (tak jak miało to miejsce w poprzednim rozdziale). Aby to osiągnąć zostało wprowadzone pewne mapowanie $\phi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ gdzie ϕ jest zdefiniowane jako suma kolejnych $\{\phi_i\}_{i=0}^m$. W niektórych przypadkach pożądanym jest by była ona reparametryzacja z $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ na \hat{I}_i (np. gdy długość $d(\gamma)$ jest szacowana przez $d(\hat{\gamma})$). Z drugiej strony dla pewnych zastosowań podejmujących planowanie trasy pożądanym jest dla krzywej $\hat{\gamma} \circ \phi$ występowanie pojedynczej lub wielu pętli (patrz np. [34]).

Konstrukcja funkcji $\phi = \phi^H$ jest analogiczna jak w przypadku $\hat{\gamma}^H$. Mianowicie:

- Pierwsze zdefiniowano rodzinę interpolantów kubicznych Lagrange $\psi_i : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$ dla $i = 0, 1, \dots, m-3$, które spełniają warunki interpolacji (z $j = 0, 1, 2, 3$):

$$\psi_i(t_{i+j}) = \hat{t}_{i+j}, \quad (227)$$

- Skonstruowany został wielomian kubiczny Hermita: $\phi_i^H : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \phi_i^H(t) = & \phi_i^H(t_i) + \phi_i^H[t_i, t_i](t - t_i) + \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}](t - t_i)^2 \\ & + \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t - t_i)^2(t - t_{i+1}) \end{aligned} \quad (228)$$

spełniający (dla $k = 0, 1$):

$$\phi_i^H(t_{i+k}) = \hat{t}_{i+k} \quad \text{i} \quad \dot{\phi}_i^H(t_{i+k}) = \dot{\psi}_{i+k}(t_{i+k}), \quad (229)$$

- Połączono przedziałowe interpolanty jako funkcję $\phi = \phi^H$ reprezentującą sumę częściową $\{\phi_i^H\}_{i=0}^{m-1}$.

4.1 Szacowanie trajektorii przedziałowo-kubicznym interpolantem klasy C^1 w oparciu o dane zredukowane

W poniższym rozdziale zostały przedstawione kolejne wyniki badań prowadzonych w ramach tego doktoratu, opublikowane w pracach [5] i [6] dla zmodyfikowanej interpolacji Hermita w kontekście badania jej przydatności w szacowaniu trajektorii i długości krzywych. W pracy [1] zostało pokazane, że zastosowanie przedziałowo-kubicznej interpolacji Hermita w połączeniu z parametryzacją wykładniczą przy $\lambda = 1$ (tzw. parametryzacja skumulowaną długością cięciwy) daje przy wykorzystaniu klasy próbkowań dopuszczalnych rząd zbieżności 4 w oszacowaniu trajektorii. Udowodniono tam (patrz [1]) następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.1. *Założmy, że $\gamma \in C^4([0, T])$ jest krzywą regularną na \mathbb{E}^n próbkowaną dopuszczalnie (patrz (19)). Dla $\hat{\gamma}^H$ oraz $\lambda = 1$ w (30) (patrz także (31)) mapowanie ϕ^H reprezentuje reparametryzację klasy C^1 I na \hat{I} , dla którego jest (jednostajnie na $[0, T]$):*

$$\hat{\gamma}^H \circ \phi^H - \gamma = O(\delta_m^4). \quad (230)$$

4.1.1 Rząd zbieżności w szacowaniu trajektorii γ

Jednym z wyników tej pracy doktorskiej zaprezentowanym w tym rozdziale jest rozszerzenie Twierdzenia 4.1 na poniższe twierdzenie spełnione dla $\lambda \in [0, 1)$ (patrz [5]).

Twierdzenie 4.2. *Niech γ będzie krzywa regularną $C^4([0, T])$ w \mathbb{E}^n próbkowaną mniej lub bardziej równomiernie zgodnie z Def. 2.14. Dla danych zredukowanych Q_m założmy, że $\{\hat{t}_i^\lambda\}_{i=0}^m$ obliczone są w zgodzie z (30) (z $\lambda \in [0, 1)$). Istnieje wtedy kawałkami kubiczny wielomian klasy C^1 , a mianowicie $\phi^H : [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$, dla którego zachodzi:*

$$\check{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H - \gamma = O(\delta_m), \quad (231)$$

na całym przedziale $[0, T]$.

* gdzie $\check{\gamma}_i^H$ - wielomian Hermita z rozszerzoną dziedziną spełniający $\check{\gamma}_i^H|_{[t_i, t_{i+1}]} = \hat{\gamma}_i^H$.

Dowód. Zauważmy, że jeśli $\phi_i^H(I_i) \subset \hat{I}_i$ (np. kiedy ϕ_i staje się reparametryzacją) interpolant $\check{\gamma}_i^H$ może być zastąpiony przez $\hat{\gamma}_i^H$ w (231). Jednak nawet, jeśli $\phi_i^H : I_i \rightarrow \hat{I}_i$ to wciąż ϕ_i^H może nie być reparametryzacją i trajektoria $\hat{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H$ może mieć wtedy dodatkowe pętle (zjawisko takie także występuje, jeśli $\hat{I}_i \subset \phi_i^H(I_i)$ i $\hat{I}_i \neq \phi_i^H(I_i)$). Oszacowanie asymptotyki dla $f = \hat{\gamma}^H \circ \phi^H - \gamma$ nie ma sensu gdy $\phi_i^H[t_i, t_{i+1}] \notin [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$. Jeśli natomiast $\phi_i^H[I_i] \subseteq \hat{I}_i = (\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1})$ to szacowana jest asymptotyka dla $f_i = f|_{I_i} = \check{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H - \gamma$ na odpowiednim podprzedziale I_i (tutaj $i = 1, 2, \dots, m-1$).

Niech $f_i(t) = (\check{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H)(t) - \gamma(t)$. Można zapisać:

$$f_i(t) = \gamma(t) - (\check{\gamma}_i^L \circ \psi_i^L)(t) + (\check{\gamma}_i^L \circ \psi_i^L)(t) - (\check{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H)(t). \quad (232)$$

Biorąc pod uwagę, że dla $\gamma \in C^4$ jest $\gamma - \check{\gamma}_i^L \circ \psi_i^L = O(\delta_m)$ (patrz [3]) aby udowodnić iż $f_i = O(\delta_m)$ wystarczy pokazać, że drugi składnik w (232) jest także rzędu $O(\delta_m)$. Wzór interpolacyjny Newtona (patrz w [24]) zastosowany do $\rho_i = \check{\gamma}_i^L \circ \psi_i^L - \check{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H$, na każdym I_i , daje:

$$\begin{aligned} \rho_i(t) = & \rho_i[t_i] + \rho_i[t_i, t_i](t - t_i) + \rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}](t - t_i)^2 + \rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t - t_i)^2(t - t_{i+1}) \\ & + (t - t_i)^2(t - t_{i+1})^2 \rho_i[t, t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}]. \end{aligned} \quad (233)$$

Łącząc (225) i (227) razem z (226) i (229) otrzymano $\rho_i[t_i] = \rho_i[t_i, t_i] = \vec{0}$. Podobnie otrzymujemy $\rho_i[t_i, t_{i+1}] = \vec{0}$ oraz $\rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}] = \vec{0}$. W konsekwencji, wyrażenie (233) redukuje

się do:

$$\rho_i(t) = \rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t - t_i)^2(t - t_{i+1}) + (t - t_i)^2(t - t_{i+1})^2 \rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t]. \quad (234)$$

Uwzględniając $\rho_i[t_i, t_{i+1}] = \rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}] = \vec{0}$ i $\dot{\rho} = \check{\gamma}_i^{L'} \psi_i^L - \check{\gamma}_i^{H'} \dot{\phi}_i^H$ mamy:

$$\begin{aligned} \rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] &= \frac{\rho_i[t_i, t_{i+1}, t_{i+1}]}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\dot{\rho}(t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} \\ &= \frac{\check{\gamma}_i^{L'}(\hat{t}_{i+1}) \psi_i^L(t_{i+1}) - \dot{\gamma}(t_{i+1}) + \dot{\gamma}(t_{i+1}) - \check{\gamma}_i^{H'}(\hat{t}_{i+1}) \dot{\phi}_i^H(t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2}. \end{aligned} \quad (235)$$

W kolejnych obliczeniach będziemy korzystać (dla $k = 0, 1$ - patrz [3]) z:

$$\boxed{\psi_{i+k}^L = O(\delta_m^{\lambda-1}), \quad \dot{\psi}_{i+k}^L = O(\delta_m^{\lambda-2}), \quad \ddot{\psi}_{i+k}^L = O(\delta_m^{\lambda-3}),} \quad (236)$$

oraz

$$\boxed{\check{\gamma}_{i+k}^{L'} = O(\delta_m^{1-\lambda}), \quad \check{\gamma}_{i+k}^{L''} = O(\delta_m^{1-2\lambda}), \quad \check{\gamma}_{i+k}^{L'''} = O(\delta_m^{1-3\lambda}).} \quad (237)$$

Wzory powyższe spełnione są odpowiednio na I_{i+k} i $\psi_{i+k}(I_{i+k})$. Dalej, łącząc (236) z (237) mamy:

$$\dot{\gamma}(t_{i+1}) - \check{\gamma}_i^{L'}(\hat{t}_{i+1}) \dot{\psi}_i^L(t_{i+1}) = O(1) + O(\delta_m^{1-\lambda}) O(\delta_m^{\lambda-1}) = O(1). \quad (238)$$

Podobnie uwzględniając (225) i (229) oraz (236) i (237) otrzymujemy:

$$\check{\gamma}_i^{H'}(\hat{t}_{i+1}) \dot{\phi}_i^H(t_{i+1}) - \dot{\gamma}(t_{i+1}) = \check{\gamma}_{i+1}^{L'}(\hat{t}_{i+1}) \dot{\psi}_{i+1}^L(t_{i+1}) - \dot{\gamma}(t_{i+1}) = O(1). \quad (239)$$

Następnie uwzględniając (238) i (239) formuła (235) redukuje się do:

$$\rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] = \frac{O(1)}{(t_{i+1} - t_i)^2}.$$

W konsekwencji dla $t \in I_i$ ostatnie wyrażenie (234) prowadzi do:

$$\rho_i(t) = O(\delta_m) + (t - t_i)^2(t - t_{i+1})^2 \rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t]. \quad (240)$$

Zbadamy teraz asymptotykę czynnika drugiego członu wyrażenia (240) tj. różnicy dzielonej: $\rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t]$. Każdy składnik ρ_i (z $1 \leq j \leq m$) z [24] można zapisać jako $\rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t]_j = \frac{1}{4!} \frac{d^4 \rho_i}{dt^4}(\tilde{t}_j^i)$, dla jakiegoś $\tilde{t}_j^i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Korzystając z różniczkowania funkcji złożonej wyrażenie $4! \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}]_j$ w \tilde{t}_j^i jest

równe:

$$6(\dot{\psi}_i^L)^2 \ddot{\psi}_i^L \check{\gamma}_{i,j}^{L'''} + 3(\ddot{\psi}_i^L)^2 \check{\gamma}_{i,j}^{L''} + 4\dot{\psi}_i^L \ddot{\psi}_i^L \check{\gamma}_i^{L''} - 6(\dot{\phi}_i^H)^2 \ddot{\phi}_i^H \check{\gamma}_{i,j}^{H'''} - 3(\ddot{\phi}_i^H)^2 \check{\gamma}_{i,j}^{H''} - 4\dot{\phi}_i^H \ddot{\phi}_i^H \check{\gamma}_{i,j}^{H''}, \quad (241)$$

z pochodnymi ψ_i^L i ϕ_i^H obliczonymi w \tilde{t}_j^i i wszystkimi pochodnymi $\check{\gamma}_{i,j}^L$ (lub $\check{\gamma}_{i,j}^H$) obliczonymi w $\psi_i^L(\tilde{t}_j^i)$ (lub w $\phi_i^H(\tilde{t}_j^i)$). Łącząc (236) i (237) określenie najwolniejszego członu istotnego dla określenia asymptotyki (241) bazuje na oszacowaniu odpowiednich pochodnych funkcji $\check{\gamma}_{i,j}^H$ i ϕ_i^H . Biorąc pod uwagę (227), (229) i (236) oraz mniej lub bardziej równomierność próbkowania uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \phi_i^H[t_i, t_i] &= \psi_i^L(t_i) = O(\delta_m^{\lambda-1}), \\ \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}] &= \frac{\psi_i^L(t_{i+1}) - \psi_i^L(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{\dot{\psi}_i^L(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \psi_i^L[t_i, t_i, t_{i+1}] = O(\dot{\psi}_i^L) = O(\delta_m^{\lambda-2}). \end{aligned} \quad (242)$$

Dodatkowo ze wzorów (236) wstawiając $k = 1$ otrzymano, że $\psi_{i+1}(t_{i+1}) = \psi_i(t_i) + O(\delta_m^{\lambda-1})$.

Warunek mniej lub bardziej równomierności wraz z (227), (229) i (236) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] &= \frac{\dot{\phi}_i^H(t_{i+1}) - \dot{\phi}_i^H[t_i, t_{i+1}]}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{\dot{\phi}_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}]}{t_{i+1} - t_i} \\ &= \frac{\dot{\psi}_{i+1}^L(t_{i+1}) - \dot{\psi}_i^L[t_i, t_{i+1}]}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{\dot{\psi}_i^L[t_i, t_i, t_{i+1}]}{t_{i+1} - t_i} \\ &= \frac{\dot{\psi}_i^L(t_{i+1}) - \dot{\psi}_i^L[t_i, t_{i+1}]}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{\dot{\psi}_i^L[t_i, t_i, t_{i+1}]}{t_{i+1} - t_i} + \frac{O(\delta_m^{\lambda-1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} \\ &= \psi_i^L[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] + O(\delta_m^{\lambda-3}) = O(\dot{\psi}_i^L) + O(\delta_m^{\lambda-3}) = O(\delta_m^{\lambda-3}). \end{aligned} \quad (243)$$

Z formuły interpolacyjnej Newtona (patrz [24]) (zastosowanej do każdego przedziału I_i) mamy:

$$\phi_i^H(t) = \phi_i^H[t_i] + \phi_i^H[t_i, t_i](t - t_i) + \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}](t - t_i)^2 + \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t - t_i)^2(t - t_{i+1}).$$

Wstawiając (242) i (243) do (228) otrzymujemy:

$$\boxed{\dot{\phi}_i^H = O(\delta_m^{\lambda-1}), \quad \ddot{\phi}_i^H = O(\delta_m^{\lambda-2}) \quad \text{i} \quad \ddot{\phi}_i^H = O(\delta_m^{\lambda-3}).} \quad (244)$$

W następnym kroku zbadamy asymptotykę odpowiednich różnic dzielonych dla zmodyfikowanego interpolanta Hermita $\check{\gamma}^H$. W tym celu należy zauważyć, iż uwzględniając

(225) i (237) zachodzi:

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_i] &= \check{\gamma}_i'(\hat{t}_i) = O(\delta_m^{1-\lambda}). \\
\check{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}] &= \frac{\check{\gamma}_i^H(\hat{t}_{i+1}) - \check{\gamma}_i^H(\hat{t}_i)}{(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)^2} - \frac{\check{\gamma}_i^{H'}(\hat{t}_i)}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} = \frac{\check{\gamma}_i^L(\hat{t}_{i+1}) - \check{\gamma}_i^L(\hat{t}_i)}{(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)^2} - \frac{\check{\gamma}_i^{L'}(\hat{t}_i)}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} \\
&= \check{\gamma}_i^L[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}] = O(\check{\gamma}_i^{L''}) = O(\delta_m^{1-2\lambda}).
\end{aligned} \tag{245}$$

Z kolei łącząc (237) i (245) uzyskujemy:

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+1}] &= \frac{\check{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+1}] - \check{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} = \frac{\check{\gamma}_i^L[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+1}] - \check{\gamma}_i^L[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} \\
&= \frac{\frac{\check{\gamma}_{i+1}^{L'}(\hat{t}_{i+1}) - \check{\gamma}_i^L[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} - \check{\gamma}_i^L[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i}.
\end{aligned} \tag{246}$$

Ponieważ $\check{\gamma}_{i+1}^{L'}(\hat{t}_{i+1}) = O(\delta_m^{1-\lambda})$ i $\check{\gamma}_i^L(\hat{t}_{i+1}) = O(\delta_m^{1-\lambda})$ (patrz (237)) to zachodzi następujący wzór $\check{\gamma}_{i+1}^{L'}(\hat{t}_{i+1}) = \check{\gamma}_i^L(\hat{t}_{i+1}) + O(\delta_m^{1-\lambda})$, co ostatecznie przekształca (246) do

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_i^H[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+1}] &= \frac{\frac{\check{\gamma}_{i+1}^{L'}(\hat{t}_{i+1}) - \check{\gamma}_i^L[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} - \check{\gamma}_i^L[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]}{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i} + \frac{O(\delta_m^{1-\lambda})}{(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)^2} \\
&= \check{\gamma}_i^L[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+1}] + \frac{O(\delta_m^{1-\lambda})}{(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)^2} = O(\check{\gamma}_i^{L''''}) + O(\delta_m^{1-3\lambda}) = O(\delta_m^{1-3\lambda}).
\end{aligned} \tag{247}$$

Dla uzasadnienia wzoru (247) warto przypomnieć, że każda regularna krzywa γ może być reparametryzowana długością łuku (patrz [36]) dając $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ co sprowadza się do wniosku: $\langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$ (patrz uzasadnienie do wzoru (92)). Następnie stosując rozwinięcie Taylora: $\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i) + (1/2)\ddot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i)^2 + O(\delta_m^3)$ oraz przypominając, iż (patrz wzór (92) w którym uwzględniamy, że próbkowanie jest mniej lub bardziej równomierne):

$$\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i = (t_{i+1} - t_i)^\lambda (1 + O(\delta_m^2)) \quad \text{i następnie} \quad (\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)^{-2} = O(\delta_m^{-2\lambda}) \tag{248}$$

otrzymano:

$$\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i = (t_{i+1} - t_i)^\lambda (1 + O(\delta_m^2))^\lambda. \tag{249}$$

Dla $g(x) = (1+x)^\lambda = 1 + O(x)$ i dla x oddzielnego asymptotycznie od -1 , podstawienie $x = O(\delta_m^2)$ w (249) uzasadnia pierwsze równanie w (248). Co więcej jako, że $(1 + O(\delta_m))^2 = 1 + O(\delta_m)$ i $h(x) = (1+x)^{-1} = 1 + O(x)$ dla x oddzielnego asymptotycznie od -1 podstawienie

$x = O(\delta_m)$ w ostatnim wyrażeniu daje:

$$(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)^{-2} = (t_{i+1} - t_i)^{-2\lambda} (1 + O(\delta_m)).$$

Ostatni wzór w połączeniu z mniej lub bardziej równomiernym próbkowaniem $\beta \delta_m \leq t_{i+1} - t_i$ uzasadnia drugie równanie w (248) użyte ostatecznie do (247). Twierdzenie o wartości średniej (zobacz [28]) w połączeniu z (244) daje (tutaj $k = 0, 1$):

$$\hat{t} - t_{i+k} = \frac{\phi_i^H(t) - \phi_i^H(t_{i+k})}{t - t_{i+k}} (t - t_{i+k}) = \dot{\phi}_i^H(\xi_i)(t - t_{i+k}) = O(\dot{\phi}_i^H) \cdot O(\delta_m) = O(\delta_m^\lambda).$$

Powyższe równanie wraz z (245) i (247) prowadzi ostatecznie do:

$$\begin{aligned} \check{\gamma}_i^{H'} &= O(\delta_m^{1-\lambda}) + O(\delta_m^\lambda) \cdot O(\delta_m^{1-2\lambda}) + O(\delta_m^{2\lambda}) \cdot O(\delta_m^{1-3\lambda}) = O(\delta_m^{1-\lambda}), \\ \check{\gamma}_i^{H''} &= O(\delta_m^{1-2\lambda}) + O(\delta_m^\lambda) \cdot O(\delta_m^{1-3\lambda}) = O(\delta_m^{1-2\lambda}), \\ \check{\gamma}_i^{H'''} &= O(\delta_m^{1-3\lambda}). \end{aligned} \quad (250)$$

Podstawiając (236), (237), (244) i (250) do wzoru (241) otrzymujemy asymptotykę dla $\rho_i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t]$:

$$\begin{aligned} &= O(\delta_m^{2\lambda-2})O(\delta_m^{\lambda-2})O(\delta_m^{1-3\lambda}) + O(\delta_m^{2\lambda-4})O(\delta_m^{1-2\lambda}) + O(\delta_m^{\lambda-1})O(\delta_m^{\lambda-3})O(\delta_m^{1-2\lambda}) \\ &+ O(\delta_m^{2\lambda-2})O(\delta_m^{\lambda-2})O(\delta_m^{1-3\lambda}) + O(\delta_m^{2\lambda-4})O(\delta_m^{1-2\lambda}) + O(\delta_m^{\lambda-1})O(\delta_m^{\lambda-3})O(\delta_m^{1-2\lambda}) \\ &= O(\delta_m^{-3}) + O(\delta_m^{-3}) + O(\delta_m^{-3}) + O(\delta_m^{-3}) + O(\delta_m^{-3}) + O(\delta_m^{-3}) = O(\delta_m^{-3}), \end{aligned} \quad (251)$$

dla dowolnego $\lambda \in [0, 1)$. Następnie, podstawiając (251) do wzoru (240) otrzymujemy (jednostajnie na I_i):

$$\rho_i(t) = O(\delta_m^1) + O(\delta_m^4)O(\delta_m^{-3}) = O(\delta_m).$$

Stąd ostatecznie (232) określa się liniową asymptotyką:

$$\check{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H - \gamma = O(\delta_m) + O(\delta_m) = O(\delta_m), \quad (252)$$

na $[t_i, t_{i+1}]$. Dowód jest zakończony. \square

Należy zauważyć, iż w [3] udowodniono, że próbkowanie równomierne $t_i = \frac{iT}{m}$ daje przyspieszenie zbieżności (236) i (237) (dla $k = 0, 1$). Istotnie mamy wtedy:

$$\boxed{\psi_{i+k}^L = O(\delta_m^{\lambda-1}), \quad \dot{\psi}_{i+k}^L = O(\delta_m^\lambda), \quad \ddot{\psi}_{i+k}^L = O(\delta_m^{\lambda-1}),} \quad (253)$$

i

$$\boxed{\check{\gamma}_{i+k}^L = O(\delta_m^{2-\lambda}), \quad \check{\gamma}_{i+k}^{L''} = O(\delta_m^{2-2\lambda}), \quad \check{\gamma}_{i+k}^{L'''} = O(\delta_m^{3-3\lambda}).} \quad (254)$$

Zgodnie z [3] otrzymano $\check{\gamma}_i^L \circ \psi_i^L - \gamma = O(\delta_m^4)$, co przy (232) razem z (253) i (254) daje przyspieszenie rzędu zbieżności dla próbkowania równomiernego (podobnie do uzasadnienia (231)):

$$\check{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H - \gamma = O(\delta_m^4), \quad (255)$$

jednostajnie na $[0, T]$. Uwaga: jeśli $\phi_i^H(I_i) \subset \hat{I}_i$ to możemy założyć, że badamy $\hat{\gamma}_i^H \circ \phi_i^H - \gamma = O(\delta_m^4)$.

4.1.2 Ostrość asymptotyki w oszacowaniu trajektorii γ

W tym rozdziale został opisany **kolejny wynik pracy doktorskiej**, opublikowany w artykule [5]. W Lemacie 4.3 udowodniona jest *ostrość* oszacowania z (231) w powiązaniu z Def. 2.23.

Ostrość oszacowania zbieżności dla Tw. 4.2, próbkowania mniej lub bardziej równomiernego oraz $\lambda \in [0, 1)$. Wystarczy pokazać, że istnieje jedna krzywa regularna $\gamma \in C^4$, dla której spełniony jest wzór (231) z Tw. 4.2, próbkowana mniej lub bardziej równomiernie (na kolejnych I_i). Sformułujmy lemat:

Lemat 4.3. *Załóżmy, że prosta $\gamma_l(t) = (t, 0) \in \mathbb{E}^2$ jest próbkowana mniej lub bardziej równomiernie (na kolejnych przedziałach I_i) według schematu:*

$$t_i = \frac{i}{m}, \quad t_{i+1} = \frac{i+1}{m}, \quad t_{i+2} = \frac{i+2}{m}, \quad t_{i+3} = \frac{i+4}{m}, \quad t_{i+4} = \frac{i+5}{m}. \quad (256)$$

Tu $\delta_m = \frac{2}{m}$ i $\beta = \frac{1}{2}$ - patrz Def. 2.14. Dane zredukowane Q_m są generowane przez $\{\gamma(t_i)\}_{i=0}^m$ (t_i zakładamy, że jest czasowo znane, aby wygenerować $\{q_i\}_{i=0}^m$) i są powiązane z parametryzacją wykładniczą $\hat{\mathcal{T}}$ definiowaną przez (30). Pokażemy iż:

$$\boxed{f_i^l = \check{\gamma}^H \circ \phi^H - \gamma_l = K\delta_m + O(\delta_m^\theta),}$$

asymptotycznie dla pewnych $\theta > 1$, $\lambda \in [0, 1)$ i pewnego $\vec{K} \neq 0$ (niezależne od m).

Dowód. Dla punktu $\bar{\delta} = \delta_m/2$ próbkowania (256) na J_0 gdzie $t_0 = 0$, $t_1 = \bar{\delta}$, $t_2 = 2\bar{\delta}$ i $t_3 = 4\bar{\delta}$ otrzymujemy dla γ i (30) następujące oszacowania węzłów $\hat{t}_0 = 0$, $\hat{t}_1 = \bar{\delta}^\lambda$, $\hat{t}_2 = 2\bar{\delta}^\lambda$ i $\hat{t}_3 = (2 + 2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda$. Podobnie dla J_1 z t_1, t_2, t_3 i $t_4 = 5\bar{\delta}$ jest $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3$ i $\hat{t}_4 = (3 + 2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda$. Wystarczy dowieść, że różnica $f_0^l = \check{\gamma}_0^H \circ \phi_0^H - \gamma$ na $I_0 = [t_0, t_1]$ spełnia:

$$\boxed{f_0^l = K\bar{\delta} + O(\bar{\delta}^\theta)}, \quad (257)$$

dla pewnego $K > 0$ i $\theta > 1$, co z Def. 2.23 uzasadnia *ostrość* oszacowania (231).

(i) Pierwszym krokiem jest znalezienie dokładnego wyrażenia dla ϕ_0^H . Łącząc (228) i (229) otrzymano (dla każdego $t \in I_0$):

$$\phi_0^H(t) = \phi_0^H[0, 0]t + \phi_0^H[0, 0, \bar{\delta}]t^2 + \phi_0^H[0, 0, \bar{\delta}, \bar{\delta}]t^2(t - \bar{\delta}). \quad (258)$$

Pierwsza różnica dzielona korzystając z (227) i (229) spełnia:

$$\phi_0^H[0, 0] = \check{\psi}_0^L(0) = \psi_0[0, \bar{\delta}] - \psi_0[0, \bar{\delta}, 2\bar{\delta}]\bar{\delta} + 2\psi_0[0, \bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}]\bar{\delta}^2. \quad (259)$$

Dodatkowo ze wzoru (228) mamy:

$$\psi_0[0, \bar{\delta}] = \bar{\delta}^{\lambda-1}, \quad \psi_0[0, \bar{\delta}, 2\bar{\delta}] = 0, \quad \psi_0[0, \bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}] = \frac{(2^{\lambda-1} - 1)}{12} \bar{\delta}^{\lambda-3},$$

i podstawiając te formuły do (259) otrzymamy:

$$\boxed{\phi_0^H[0, 0] = \frac{1}{12} (10 + 2^\lambda) \bar{\delta}^{\lambda-1}}. \quad (260)$$

Równanie (260) z $\phi_0^H[0, \bar{\delta}] = \bar{\delta}^{\lambda-1}$ i $\phi_0^H[0, 0, \bar{\delta}] = (\phi_0^H[0, \bar{\delta}] - \phi_0^H[0, 0])\bar{\delta}^{-1}$ prowadzi do:

$$\boxed{\phi_0^H[0, 0, \bar{\delta}] = -\frac{1}{12} (2^\lambda - 2) \bar{\delta}^{\lambda-2}}. \quad (261)$$

Podobnie, korzystając z (229):

$$\phi_0^H[\bar{\delta}, \bar{\delta}] = \check{\psi}_1^L(\bar{\delta}) = \psi_1[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}] - \psi_1[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}]\bar{\delta} + 3\psi_1[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}, 5\bar{\delta}]\bar{\delta}^2, \quad (262)$$

gdzie

$$\psi_1[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}] = \bar{\delta}^{\lambda-1}, \quad \psi_1[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}] = \frac{(2^{\lambda-1} - 1)}{3} \bar{\delta}^{\lambda-2} = -\psi_1[2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}, 5\bar{\delta}]$$

$$\text{i } \psi_1[\bar{\delta}, 2\bar{\delta}, 4\bar{\delta}, 5\bar{\delta}] = \frac{2-2^\lambda}{3} \bar{\delta}^{\lambda-3}.$$

Podstawiając te wyrażenia do (262) otrzymujemy:

$$\phi_0^H[\bar{\delta}, \bar{\delta}] = \frac{1}{12} (22 - 5 \cdot 2^\lambda) \bar{\delta}^{\lambda-1} \quad \text{i} \quad \phi_0^H[0, \bar{\delta}, \bar{\delta}] = -\frac{5}{12} (2^\lambda - 2) \bar{\delta}^{\lambda-2}. \quad (263)$$

Uwzględniając trzecie różnice dzielone (262) i (263) czwarta różnica dzielona z (258) spełnia¹¹:

$$\boxed{\phi_0^H[0, 0, \bar{\delta}, \bar{\delta}] = -\frac{1}{3} (2^\lambda - 2) \bar{\delta}^{\lambda-3}.} \quad (264)$$

Konsekwentnie łącząc (260), (261) i (264) formuła (258) przekształca się na:

$$\boxed{\phi_0^H(t) = \left(\frac{2-2^\lambda}{3}\right) \bar{\delta}^{\lambda-3} t^3 + \left(\frac{2^{\lambda-1}-1}{2}\right) \bar{\delta}^{\lambda-2} t^2 + \left(\frac{2^{\lambda-2}}{3} + \frac{5}{6}\right) \bar{\delta}^{\lambda-1} t.} \quad (265)$$

(ii) Podobne postępowanie zastosowano do określenia wyrażenia dla $\check{\gamma}_0^H$. Mianowicie z (226) mamy:

$$\boxed{\check{\gamma}_0^H(\hat{t}) = \check{\gamma}_0^H[0, 0]\hat{t} + \check{\gamma}_0^H[0, 0, \bar{\delta}^\lambda]\hat{t}^2 + \check{\gamma}_0^H[0, 0, \bar{\delta}^\lambda, \bar{\delta}^\lambda]\hat{t}^2(\hat{t} - \bar{\delta}^\lambda).} \quad (266)$$

Analogicznie do punktu (i) z (225) otrzymujemy:

$$\check{\gamma}_0^H[0, 0] = \check{\gamma}_0(0) = \check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda] - \check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda]\bar{\delta}^\lambda + 2\check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda]\bar{\delta}^{2\lambda}. \quad (267)$$

Ponieważ $\check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda] = \check{\gamma}_0[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda] = (\bar{\delta}^{1-\lambda}, 0)$ to $\check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda] = (0, 0)$.

Uwzględniając $\check{\gamma}_0[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] = (\bar{\delta}^{1-2\lambda}(2^{1-\lambda} - 1)(1 + 2^\lambda)^{-1}, 0)$ ostatnia różnica dzielona w (267) przekształca się do:

$$\check{\gamma}_0[0, \bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{(2^{1-\lambda} - 1)}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-3\bar{\lambda}}, 0 \right).$$

Po podstawieniu powyższego wzoru do (267) otrzymujemy:

$$\boxed{\check{\gamma}_0^H[0, 0] = \check{\gamma}_0(0) = \left(\frac{2^{-\lambda}(4+3 \cdot 4^\lambda + 8^\lambda)}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-\lambda}, 0 \right).} \quad (268)$$

Formuła (268) w połączeniu z $\check{\gamma}_0^H[0, \bar{\delta}^\lambda] = (\bar{\delta}^{1-\lambda}, 0)$ pozwala obliczyć drugą różnicę dzieloną

¹¹ pomijamy indeks L przy ψ i $\check{\gamma}$ we wzorach na różnice dzielone

w (266) jako:

$$\boxed{\check{\gamma}_0^H[0, 0, \bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{2^{1-\lambda}(2^\lambda - 2)}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-2\lambda}, 0 \right)}. \quad (269)$$

Podobnie korzystając z (225) mamy:

$$\begin{aligned} \check{\gamma}_0^H[\bar{\delta}^\lambda, \bar{\delta}^\lambda] = \check{\gamma}_1^L(\bar{\delta}^\lambda) &= \check{\gamma}_1[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda] - \check{\gamma}_1[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] \cdot \bar{\delta}^\lambda \\ &\quad - \check{\gamma}_1[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda, (3+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] \cdot \bar{\delta}^\lambda(1+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda, \end{aligned} \quad (270)$$

gdzie

$$\check{\gamma}_1[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda] = (\bar{\delta}^{1-\lambda}, 0), \quad \check{\gamma}_1[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{2^{1-\lambda} - 1}{1+2^\lambda} \bar{\delta}^{1-2\lambda}, 0 \right), \quad (271)$$

$$\check{\gamma}_1[\bar{\delta}^\lambda, 2\bar{\delta}^\lambda, (2+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda, (3+2^\lambda)\bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{2 - 2^{2-\lambda}}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-3\lambda}, 0 \right). \quad (272)$$

Przekształcając wzór (270) oraz uwzględniając wartości różnic dzielonych dla $\check{\gamma}_1$ (wzory (271) i (272)) otrzymano:

$$\check{\gamma}_0^H[\bar{\delta}^\lambda, \bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{2^{-\lambda}(3 \cdot 2^{2\lambda+1} + 8^\lambda - 8)}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-\lambda}, 0 \right),$$

i kolejną różnicę dzieloną:

$$\check{\gamma}_0^H[0, \bar{\delta}^\lambda, \bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{2^{-\lambda}(2^\lambda - 2)(3 \cdot 2^\lambda + 4)}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-2\lambda}, 0 \right).$$

Ostatnia formuła połączona z (269) prowadzi do:

$$\boxed{\check{\gamma}_0^H[0, 0, \bar{\delta}^\lambda, \bar{\delta}^\lambda] = \left(\frac{2^{-\lambda}(2^\lambda - 2)(3 \cdot 2^\lambda + 2)}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-3\lambda}, 0 \right)}. \quad (273)$$

Po uwzględnieniu (268), (269) i (273) w (266) finalnie uzyskujemy: $\check{\gamma}_0^H(\hat{t}) =$

$$\boxed{\left(\frac{\frac{1}{2}^\lambda (3 \cdot 4^\lambda - 4 - 2^{2\lambda+2})}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-3\lambda} \hat{t}^3 - \frac{3(2^\lambda - 2)}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-2\lambda} \hat{t}^2 + \frac{\frac{1}{2}^\lambda (4 + 3 \cdot 4^\lambda + 8^\lambda)}{(1+2^\lambda)(2+2^\lambda)} \bar{\delta}^{1-\lambda} \hat{t}, 0 \right)}. \quad (274)$$

Dwie funkcje kubiczne (265) i (274) wraz z η określają różnicę $f_0^l = \check{\gamma}_0^H \circ \phi_0^H - \eta$ na pierwszym podprzedziale $I_0 = [0, \bar{\delta}]$, którego asymptotyka w *normie Euklidesowej* (patrz Def. 2.23) jest nie wolniejsza niż $O(\bar{\delta})$ - patrz Tw. 4.2. Jeżeli uwzględniona zostanie Def. 2.23, ostrość dla Tw.

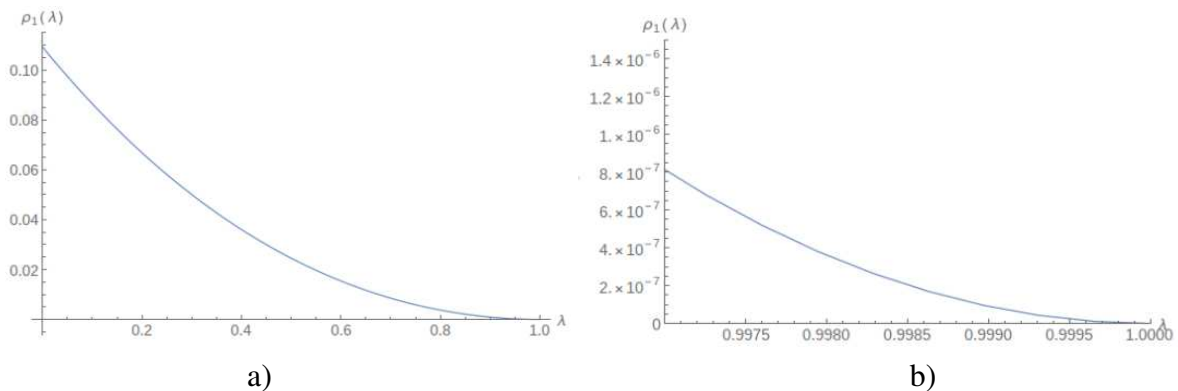
(4.2) razem z (257) zostanie dowiedziona jeśli pokażemy, że dla jakiegoś $\bar{t} \in [0, \delta]$ zachodzi $\|f_0^l(\bar{t})\| = K\delta + O(\delta^\lambda)$, gdzie $\lambda > 1$. Korzystając z funkcji programu *Mathematica - Simplify[]* zastosowanej do $\|f_0^l(\bar{t})\|$ w $\bar{t} = \frac{\bar{\delta}}{2} \in [0, \bar{\delta}]$ mamy w wyniku:

$$\|f_0^l(\frac{\bar{\delta}}{2})\| = \frac{3 \cdot 2^{-\lambda-12} (2^\lambda - 2)^2 (91 \cdot 2^{\lambda+2} + 45 \cdot 2^{2\lambda+1} + 8^\lambda + 440)}{(1 + 2^\lambda)(2 + 2^\lambda)} \bar{\delta} = \rho_1(\lambda) \bar{\delta}. \quad (275)$$

Wykres dla $\rho_1(\lambda)$ na $I_\lambda = [0, 1)$ i na przedziale $[0, 997; 1]$ przedstawiający $\rho_1|_{I_\lambda} > 0$ jest pokazany na Rys. 46. Dodatniość $K = \rho_1$ na I_λ z (257) i (275) ustala *ostrość* z (231) - zobacz Def. 2.23. Zauważmy, że *ostrość* dla (231) udowodniona tutaj na I_0 implikuje *ostrość* dla (231) z Tw. 4.2 w oszacowaniu $\gamma - \check{\gamma}^H \circ \phi^H$ na całym przedziale $[0, T]$. \square

Przypadek *parametryzacji długością cięciwy* (t.j. dla $\lambda = 1$) pokazuje, że obie krzywe γ i $\hat{\gamma}_0^H \circ \phi_0^H$ są identyczne, co wyjaśnia $\rho_1(1) = 0$ brane wprost z (275). *Ostrość* dla (230) może być wciąż dowiedziona z Lem. 4.3 przy zastąpieniu γ przez inną krzywą regularną γ . Została też udowodniona w pracy [1].

Dodatkowo, *konieczność mniej lub bardziej równomierności* w (231) także może być zaprezentowana z pomocą podobnego schematu obliczeniowego jaki użyto w Tw. 4.3 (patrz sekcja 4.1.3).



Rys. 46. Wykres dla $\rho_1(\lambda) > 0$ na a) $[0, 1)$ i b) $[0, 997; 1]$.

4.1.3 Konieczność założenia dopuszczenia próbkowania mniej lub bardziej równomiernego w Tw. 4.2.

W tym podrozdziale udowodnimy konieczność założenia *mniej lub bardziej równomierności* (patrz Def. 2.14) potrzebnej w dowodzie wzoru (231) z Tw. 4.2. Udowodnimy poniższy Lemat 4.4 posługując się przykładem analitycznym, a potem również zweryfikujemy go numerycznie.

Lemat 4.4. Załóżmy, że krzywa regularna $\gamma_q(t) = (t^4 + t, 0)$ nie jest próbkowana mniej lub bardziej równomiernie. Pokażemy, iż brak spełnienia warunku mniej lub bardziej równomierności powoduje, że Tw. 4.2 nie jest spełnione dla $\lambda \in [0, 1)$, ale pozostaje spełnione dla $\lambda = 1$. Tak więc

$$\boxed{f_i^q = \check{\gamma} \circ \psi_i - \gamma_q \neq O(\delta),}$$

Dowód. Dla podanej wyżej krzywej rozważmy następujące próbkowanie, które **nie jest mniej lub bardziej równomierne** ale jest próbkowaniem dopuszczalnym (patrz Def. 2.13), na odpowiadającym segmencie $[t_0, t_3] \subseteq (0, T)$ (Uwaga: Rozważany segment powstał w wyniku przesunięcia krzywej oryginalnej: $\gamma(0) = q_0$ a krzywa przesunięta $\check{\gamma}(t) = \gamma(t - \delta)$ więc $\check{\gamma}(-\delta) = \gamma(0)$, pomijamy m w indeksie dolnym):

$$t_0 = -\delta, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \delta^2 \quad \text{i} \quad t_3 = \delta. \quad (276)$$

Rozważmy krzywą regularną $\gamma_q(t) = (t^4 + t, 0) \in \mathbb{E}^2$ (z $t \in [t_0, 1]$) nie próbkowaną *mniej lub bardziej równomiernie* z przesuniętymi podprzedziałami $J_0 = [t_0 = -\delta_m, t_3 = \delta_m]$, $J_1 = [t_1 = 0, t_4 = 2\delta_m]$ i $I_0 = [-\delta_m, 0]$, gdzie węzły są rozmieszczone następująco $\mathcal{G} = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\} = \{-\delta_m, 0, \delta_m^2, \delta_m, 2\delta_m\}$. Asymptotyka $f_0^q(t) = (\check{\gamma}_0^H \circ \phi_0^H)(t) - \gamma_q(t)$ jest zbadana na podprzedziale I_0 . Parametryzacja wykładnicza (30) zastosowana do $\{\gamma_q(t_i)\}_{i=0}^4$ (z użyciem funkcji pakietu Mathematica: *Series* i z zastąpieniem wyższych rozwinięć przez $O[\]$) próbkowana przez \mathcal{G} daje $\hat{\mathcal{G}} = \{\hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3, \hat{t}_4\} = \{0, \delta^\lambda, \delta^\lambda + \delta^{2\lambda}, \delta^{2\lambda} + (1 - \delta\lambda)\delta^\lambda + \delta^\lambda, \delta^{2\lambda} + (1 - \delta\lambda)\delta^\lambda + 2\delta^\lambda\}$.¹²

(i) Biorąc pod uwagę (229) obliczamy $\phi_0^H[-\delta, -\delta] = \psi_0(-\delta)$ i $\phi_0^H[0, 0] = \psi_1(0)$, gdzie

$$\begin{aligned} \psi_0(-\delta) &= -\frac{\delta^{\lambda-2} \left(\delta^{\lambda+1} + 4\delta^\lambda + \delta^3\lambda + 2\delta^3 + \delta^2\lambda - 4\delta^2 - 6\delta \right)}{2(\delta + 1)}, \\ \psi_1(0) &= \frac{1}{4}\delta^{\lambda-2} \left(4\delta^\lambda + 6\delta^{\lambda+1} + 7\lambda\delta^3 - 7\delta^3 - 6\delta^2 \right). \end{aligned} \quad (277)$$

¹²pomijamy indeks m

Więc z (277) i $\phi_0^H(t_i) = \hat{t}_i$ kolejne różnice dzielone:

$$\begin{aligned}\phi_0^H[-\delta] &= 0, \quad \phi_0^H[-\delta, 0] = \delta^{\lambda-1}, \\ \phi_0^H[-\delta, -\delta, 0] &= \frac{\delta^{\lambda-3} \left(\delta^{\lambda+1} + 4\delta^\lambda + \delta^3\lambda + 2\delta^3 + \delta^2\lambda - 2\delta^2 - 4\delta \right)}{2(\delta+1)}, \\ \phi_0^H[-\delta, 0, 0] &= \frac{1}{4} \delta^{\lambda-3} \left(6\delta^{\lambda+1} + 4\delta^\lambda + 7\delta^3\lambda - 7\delta^3 - 6\delta^2 - 4\delta \right), \\ \phi_0^H[-\delta, -\delta, 0, 0] &= \frac{\delta^{\lambda-4} \left(8\delta^{\lambda+1} + 6\delta^{\lambda+2} - 4\delta^\lambda + 7\delta^4\lambda - 7\delta^4 + 5\delta^3\lambda - 17\delta^3 - 2\delta^2\lambda - 6\delta^2 + 4\delta \right)}{4(\delta+1)}.\end{aligned}\tag{278}$$

Korzystając z wzorów (278) i (258) (w odniesieniu do \mathcal{G} i $\bar{t} = -\delta/2 \in [-\delta, 0]$) zastosowanie funkcji pakietu *Mathematica*: *Factor* [$\phi_0(\bar{t}, \lambda)$], *Normal* oraz zastąpieniu wyższych potęg przez notację "dużego O" ¹³ daje:

$$\boxed{\phi_0^H[\bar{t}, \lambda] = -\frac{1}{32} \delta^{\lambda-1} \left(6\delta^{\lambda+1} + 12\delta^\lambda + 7\delta^3\lambda - 7\delta^3 - 6\delta^2 - 28\delta \right).}\tag{279}$$

(ii) Tak samo łącząc $\check{\gamma}_0(\hat{t}_0) = (-\delta + \delta^4, 0)$, $\check{\gamma}_{0,1}(\hat{t}_1) = \vec{0}$, $\check{\gamma}_{0,1}(\hat{t}_2) = (\delta^2 + \delta^8, 0)$, $\check{\gamma}_{0,1}(\hat{t}_3) = (\delta + \delta^4, 0)$ ¹⁴ $\check{\gamma}_1(\hat{t}_4) = (2\delta + 16\delta^4, 0)$ z $\gamma_0^H[\hat{t}_0, \hat{t}_0] = \check{\gamma}'_0(\hat{t}_0)$ i $\gamma_0^H[\hat{t}_1, \hat{t}_1] = \check{\gamma}'_1(\hat{t}_1)$ (patrz (225)), z zastosowaniem funkcji: *Collect*, *Together*, *PowerExpand*, *Normal* i *Simplify* otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\check{\gamma}_0^H[\hat{t}_0, \hat{t}_0] &= \frac{2\lambda^2 \delta^{-\lambda+3} + \lambda^2 \delta^3 + 12\delta + 7\delta^{\lambda+1} + \delta^{2\lambda+1} - 6\lambda \delta^{-\lambda+2} - 8\delta^{-\lambda+2}}{(\delta^\lambda + 1) (\delta^{2\lambda} - 2\lambda \delta^{\lambda+1} + 3\delta^\lambda + \delta^2 \lambda^2 - 3\delta\lambda + 2)} \\ &+ \frac{3\lambda \delta^{-\lambda+3} - 6\lambda \delta^2 - 5\delta^2 - \lambda \delta^{\lambda+2} - \delta^{\lambda+2} + 6\delta^{-\lambda+1} + 4\delta^{3-2\lambda} \lambda - 4\delta^{2-2\lambda}}{(\delta^\lambda + 1) (\delta^{2\lambda} - 2\lambda \delta^{\lambda+1} + 3\delta^\lambda + \delta^2 \lambda^2 - 3\delta\lambda + 2)},\end{aligned}$$

¹³W programie *Mathematica* realizuje to skrót /. $\{\delta^{\wedge}n_ /; n \geq 4 \rightarrow O(\delta)^n\}$.

¹⁴oznaczenie 0, 1 w indeksie dolnym odnosi się do różnic dzielonych wielomianu Lagrange'a, określonego na przedziale $\check{\gamma}_0 : [t_0, t_3]$ oraz $\check{\gamma}_1 = [t_1, t_4]$.

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_1^H[\hat{t}_1, \hat{t}_1] = & \frac{-12\delta^{-\lambda+2} + 14\lambda\delta^{-\lambda+3} - 4\lambda^2\delta^{-\lambda+4} + 6\delta - 13\delta^2 - 5\lambda^2\delta^3 + 10\lambda\delta^3}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{5\kappa_\lambda\delta^3 - \lambda^3\delta^4 + \lambda^2\delta^4 - 5\lambda\kappa_\lambda\delta^4 + 2\lambda^4\delta^5 - 2\lambda^3\delta^5 + \lambda^2\kappa_\lambda\delta^5}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{4\delta^{\lambda+1} + 4\lambda\delta^{\lambda+2} - 6\delta^{\lambda+2} - 2\lambda^2\delta^{\lambda+3} + 2\lambda\delta^{\lambda+3} + 4\kappa_\lambda\delta^{\lambda+3} - 2\lambda^3\delta^{\lambda+4}}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{2\lambda^2\delta^{\lambda+4} - 2\lambda\kappa_\lambda\delta^{\lambda+4} + \lambda\delta^{2\lambda+2} - \delta^{2\lambda+2}}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{\kappa_\lambda\delta^{2\lambda+3} + \lambda^3\delta^{5-2\lambda} - 5\lambda^2\delta^{4-2\lambda} + 8\lambda\delta^{3-2\lambda} - 4\delta^{2-2\lambda}}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)},
\end{aligned}$$

gdzie $\kappa_\lambda = (-1 + \lambda)\lambda$

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_0^H[\hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_1] = & \frac{\delta^{1-3\lambda} (4\delta^\lambda + 12\delta^{2\lambda} + 6\delta^{3\lambda} - 8\lambda\delta^{\lambda+1} - 12\delta^{\lambda+1} + 5\lambda^2\delta^{\lambda+2} + 14\lambda\delta^{\lambda+2})}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{-\lambda^3\delta^{\lambda+3} - 4\lambda^2\delta^{\lambda+3} - 7\lambda\delta^{2\lambda+1} - 13\delta^{2\lambda+1} + 2\lambda^2\delta^{2\lambda+2} + 5\lambda\delta^{2\lambda+2}}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{-6\lambda^3\delta^{2\lambda+3} + 6\lambda^2\delta^{2\lambda+3} + 3\lambda^4\delta^{2\lambda+4} - 3\lambda^3\delta^{2\lambda+4} + 3\lambda\delta^{3\lambda+1} - 6\delta^{3\lambda+1}}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{2\lambda^2\delta^{3\lambda+2} - 2\lambda\delta^{3\lambda+2} - 4\lambda^3\delta^{3\lambda+3} + 4\lambda^2\delta^{3\lambda+3} + \lambda\delta^{4\lambda+1} - \delta^{4\lambda+1} + \lambda^2\delta^{4\lambda+2}}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{-\lambda\delta^{4\lambda+2} + \lambda^3\delta^4 - 5\lambda^2\delta^3 + 8\lambda\delta^2 - 4\delta}{(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)},
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_0^H[\hat{t}_0, \hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_1] = & \frac{3\delta^3\kappa_\lambda + \delta^{\lambda+3}\kappa_\lambda + 3\lambda^4\delta^{-2\lambda+5} + 3\lambda^4\delta^{-\lambda+5} - \lambda^3\delta^{-3\lambda+4} + \lambda^3\delta^{-3\lambda+5}}{(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{-7\lambda^3\delta^{-2\lambda+4} - 3\lambda^3\delta^{-2\lambda+5} - 10\lambda^3\delta^{-\lambda+4} - 3\lambda^3\delta^{-\lambda+5} - 4\lambda^3\delta^4 + 2\lambda^2\delta^{-3\lambda+3}}{(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{-9\lambda^2\delta^{-3\lambda+4} + 6\lambda^2\delta^{-2\lambda+3} + 2\lambda^2\delta^{-2\lambda+4} + 5\lambda^2\delta^{-\lambda+3} + 10\lambda^2\delta^{-\lambda+4}}{(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{4\lambda^2\delta^4 + 2\delta^{-2\lambda+1} + 12\delta^{-\lambda+1} + 6\delta + 2\lambda\delta^{-3\lambda+2} + 14\lambda\delta^{-3\lambda+3} - 6\lambda\delta^{-2\lambda+2}}{(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{-15\delta^{-2\lambda+2} + 14\lambda\delta^{-2\lambda+3} - 3\lambda\delta^{-\lambda+2} - 17\delta^{-\lambda+2} + 2\lambda\delta^{-\lambda+3} + 4\lambda\delta^2}{(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
& + \frac{-7\delta^2 + \lambda\delta^{\lambda+2} - \delta^{\lambda+2} - 4\delta^{-3\lambda+1} - 4\delta^{3-4\lambda} + 4\delta^{2-4\lambda}}{(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 1)(\delta^\lambda - \delta\lambda + 2)(\delta\lambda - 2)}.
\end{aligned}$$

Funkcje *Mathematici* i przekształcenia użyte do wzoru na $\|f_0(\bar{t})\|$ prowadzą do:

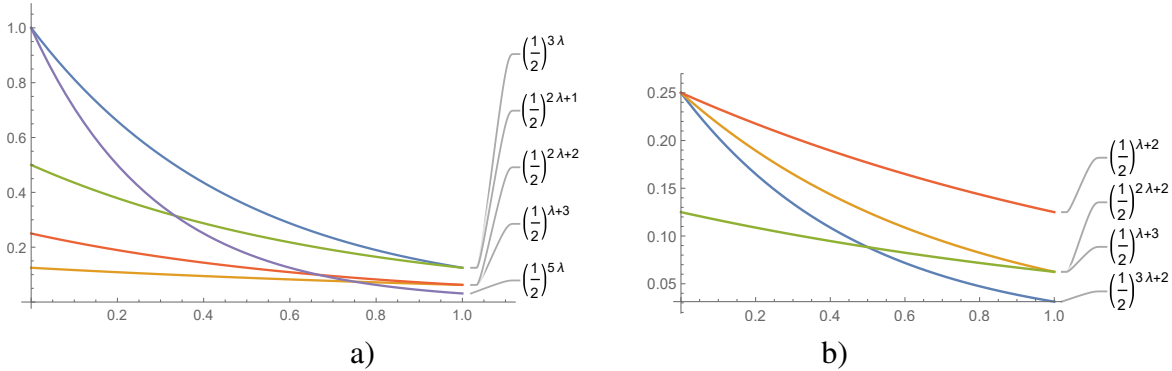
$$\begin{aligned}
&= \frac{4\delta^{3\lambda} - 2\delta^{4\lambda} - 12\delta^{5\lambda} - 6\delta^{6\lambda} + 8\lambda\delta^{\lambda+3} + 24\delta^{\lambda+3} - 20\lambda^2\delta^{\lambda+4} - 52\lambda\delta^{\lambda+4} + 8\lambda^3\delta^{\lambda+5}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{20\lambda^2\delta^{\lambda+5} - 4\delta^{2\lambda+1} - 8\lambda\delta^{2\lambda+2} - 56\delta^{2\lambda+2} + 19\lambda^2\delta^{2\lambda+3} + 84\lambda\delta^{2\lambda+3} + 68\delta^{2\lambda+3}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{-7\lambda^3\delta^{2\lambda+4} - 42\lambda^2\delta^{2\lambda+4} - 44\lambda\delta^{2\lambda+4} + 28\lambda^3\delta^{2\lambda+5} - 16\lambda^2\delta^{2\lambda+5} - 12\lambda^4\delta^{2\lambda+6}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{12\lambda^3\delta^{2\lambda+6} - 2\lambda\delta^{3\lambda+1} + 36\delta^{3\lambda+1} - 2\lambda^2\delta^{3\lambda+2} - 56\lambda\delta^{3\lambda+2} - 120\delta^{3\lambda+2} + \lambda^3\delta^{3\lambda+3}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{35\lambda^2\delta^{3\lambda+3} + 50\lambda\delta^{3\lambda+3} + 68\delta^{3\lambda+3} - 29\lambda^3\delta^{3\lambda+4} - 8\lambda\delta^{3\lambda+4} + 12\lambda^4\delta^{3\lambda+5}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{28\lambda^3\delta^{3\lambda+5} - 40\lambda^2\delta^{3\lambda+5} - 12\lambda^4\delta^{3\lambda+6} + 12\lambda^3\delta^{3\lambda+6} + 6\lambda\delta^{4\lambda+1} + 75\delta^{4\lambda+1} - 6\lambda^2\delta^{4\lambda+2}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{-28\lambda\delta^{4\lambda+2} - 88\delta^{4\lambda+2} + 7\lambda^3\delta^{4\lambda+3} + 16\lambda^2\delta^{4\lambda+3} - 10\lambda\delta^{4\lambda+3} + 28\delta^{4\lambda+3}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{-3\lambda^4\delta^{4\lambda+4} - 37\lambda^3\delta^{4\lambda+4} + 28\lambda^2\delta^{4\lambda+4} + 12\lambda\delta^{4\lambda+4} + 12\lambda^4\delta^{4\lambda+5} + 4\lambda^3\delta^{4\lambda+5}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{-16\lambda^2\delta^{4\lambda+5} + 3\lambda\delta^{5\lambda+1} + 41\delta^{5\lambda+1} - 5\lambda^2\delta^{5\lambda+2} + 14\lambda\delta^{5\lambda+2} - 28\delta^{5\lambda+2} + 10\lambda^3\delta^{5\lambda+3}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{2\lambda^2\delta^{5\lambda+3} - 16\lambda\delta^{5\lambda+3} + 4\delta^{5\lambda+3} - 3\lambda^4\delta^{5\lambda+4} - 13\lambda^3\delta^{5\lambda+4} + 12\lambda^2\delta^{5\lambda+4} + 4\lambda\delta^{5\lambda+4}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{-4\lambda\delta^{6\lambda+1} + 7\delta^{6\lambda+1} - 3\lambda^2\delta^{6\lambda+2} + 7\lambda\delta^{6\lambda+2} - 4\delta^{6\lambda+2} + 4\lambda^3\delta^{6\lambda+3} - 4\lambda\delta^{6\lambda+3}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{-\lambda\delta^{7\lambda+1} + \delta^{7\lambda+1} - \lambda^2\delta^{7\lambda+2} + \lambda\delta^{7\lambda+2}}{8\delta^2(\delta^\lambda + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 1)(\delta^\lambda - \lambda\delta + 2)(\delta\lambda - 2)}. \tag{280}
\end{aligned}$$

Uwzględniając, że $\lambda \in (0, 1)$, zastępując oszacowaniami asymptotycznymi "dużego O" człony w wyrażeniu oraz porządkując dzięki funkcji pakietu *Mathematica* *Min*, tak, żeby znaleźć

najwyższy człon* (patrz Rys. 47(a) i Rys. 47(b)):

$$\begin{aligned}
\|f_0^q(t)\| &= \frac{O(\delta^{\min(3\lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda)}) + O(\delta^{\min(\lambda+3, \lambda+4, \lambda+5)}) + O(\delta^{\min(2\lambda+1, 2\lambda+2, 2\lambda+3, 2\lambda+4)})}{8\delta^2 (\delta^\lambda + 1) (\delta^\lambda - \lambda\delta + 1) (\delta^\lambda - \lambda\delta + 2) (\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{O(\delta^{\min(2\lambda+4, 2\lambda+5, 2\lambda+6)}) + O(\delta^{3\lambda+1}) + O(\delta^{\min(3\lambda, 3\lambda+3, 3\lambda+4, 3\lambda+5, 3\lambda+6)})}{8\delta^2 (\delta^\lambda + 1) (\delta^\lambda - \lambda\delta + 1) (\delta^\lambda - \lambda\delta + 2) (\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{O(\delta^{\min(4\lambda+1, 4\lambda+2, 4\lambda+3, 4\lambda+4, 4\lambda+5)}) + O(\delta^{\min(5\lambda+1, 5\lambda+2, 5\lambda+3, 5\lambda+4)})}{8\delta^2 (\delta^\lambda + 1) (\delta^\lambda - \lambda\delta + 1) (\delta^\lambda - \lambda\delta + 2) (\delta\lambda - 2)} \\
&+ \frac{O(\delta^{\min(6\lambda+1, 6\lambda+2, 6\lambda+3)}) + O(\delta^{\min(7\lambda+1, 7\lambda+2)})}{8\delta^2 (\delta^\lambda + 1) (\delta^\lambda - \lambda\delta + 1) (\delta^\lambda - \lambda\delta + 2) (\delta\lambda - 2)} \\
&= \frac{O(\delta^{\min(3\lambda, \lambda+3, 2\lambda+1)})}{64\delta^3\lambda - 32\delta^2 + (120\delta^3\lambda - 80\delta^2)\delta^\lambda} = \frac{O(\delta^{\min(3\lambda, \lambda+3, 2\lambda+1)})}{\delta^{2+\lambda}} = O(\delta^{2\lambda-2}). \quad (281)
\end{aligned}$$

*Uwaga: Rys. 47(a) potwierdza wybór $\delta^{3\lambda}$ jako wartości najwyższej z licznika wyrażenia (281) oraz Rys. 47(b) wyznacza wartość $\delta^{2+\lambda}$ jako najwyższą z mianownika, co ostatecznie pozwala na przyjęcie wartości $O(\delta^{2\lambda-2})$ w oszacowaniu (281).



Rys. 47. Wykresy funkcji wykładniczej $\delta^{f(\lambda)}$ dla $\delta = \frac{1}{2}$ i $\lambda \in [0, 1]$, gdzie f jest funkcją z a) licznika b) mianownika wyrażenia (281).

Dla $\lambda = 0$ otrzymujemy:

$$f^q\left(\frac{-\delta}{2}\right) = \frac{1}{768\delta^2} - \frac{21}{1024\delta} - \frac{1175}{6144} + \frac{1227\delta}{4096} - \frac{815\delta^2}{8192} + \frac{1513\delta^3}{12288} + O(\delta^4) = O(\delta^{-2}) \neq O(\delta)!$$

Zanotujmy, że wstawiając $\lambda = 1$ do (280) otrzymujemy w wyniku:

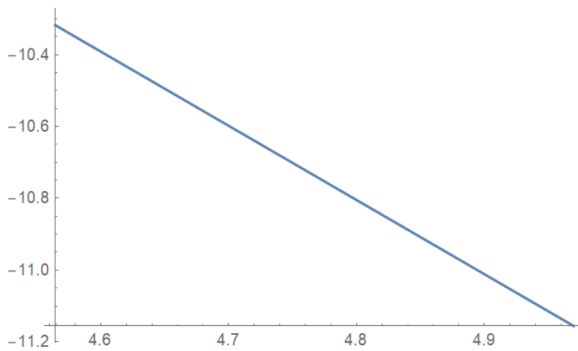
$$f^q\left(\frac{-\delta}{2}\right) = O(\delta^4).$$

Co potwierdza ostrość Twierdzenia 4.2 spełnionego dla $\lambda = 1$ i dla szerszej klasy próbekowań dopuszczalnych. \square

Kolejny przykład tym razem numeryczny pokazuje istotność wyboru próbkowania, (wybrane nie jest *mniej lub bardziej równomierne* na prędkość zbieżności interpolanta Hermita do krzywej testowej).

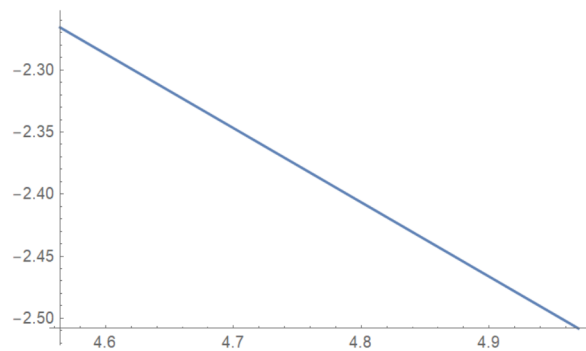
Przykład 14. Przyjmijmy, że chcemy interpolować punkty z krzywej γ_{sp} danej wzorem (9) próbkowanej *nie mniej lub bardziej równomiernie* według (29). Próbkowanie (29) nie spełnia warunku z Def. 2.14 i przedstawiony eksperyment pokazuje, że nie może być rozpatrywane w Tw. 4.2. Testy numeryczne, których wyniki pokazano w Tab. 18 wskazują nawet na rozbieżność (patrz także Rys. 48) dla niektórych $\lambda \in [0, 1)$ gdzie współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ dla $\check{\gamma}^H \circ \phi^H - \gamma_{sp}$ jest ujemny, a także na spowolnienie dla wyższych λ oraz potwierdzenie stawianej hipotezy dla $\lambda = 1$ i klasy próbkowań dopuszczalnych (szacowane $\bar{\alpha}(\lambda) = 4$). Zanotowany błąd oszacowania \mathcal{E}_{144} (patrz (60)) między $\check{\gamma}^H \circ \phi^H - \gamma_{sp}$ potwierdza konieczność próbkowania *mniej lub bardziej równomiernie*. Jedynie dla $\lambda = 1$ i klasy dopuszczalnych próbkowań w Tab. 18 widzimy ostre oszacowanie $\bar{\alpha}(1) = 3,98 \approx \alpha(1) = 4$ z bardzo małym błędem $\mathcal{E}_{144} = 6,99 \cdot 10^{-8}$.

FittedModel [[-0.87984 - 2.06766 xx]]



a)

FittedModel [[0.46261 - 0.597758 xx]]



b)

Rys. 48. Prosta regresji i jej równanie dla pary punktów $\{\log m, \log E_m\}_{m=96}^{144}$ wskazująca na rozbieżność interpolacji na podstawie ujemnego współczynnika $\alpha(\lambda)$ dla a) $\lambda = 0$, b) $\lambda = 0,5$.

Tab. 18: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \neq 1$ obliczony dla γ_{sp} próbkowanej według (29) dla $m \in \{96, \dots, 144\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (9)	-2,068	-1,621	-1,436	-0,598	0,068	0,536	3,980
\mathcal{E}_{144}	69713,7	5810,44	171,753	12,243	0,514	0,013	$6,99 \cdot 10^{-8}$

4.1.4 Konieczność założenia regularności krzywej γ

Przykład 15. W tym przykładzie przeprowadzony został eksperyment numeryczny oszacowania zbieżności interpolanta $\hat{\gamma}^H$ do krzywej nieregularnej (patrz Def. 2.11) γ_{nr_1} z (17). Zauważmy, że $\dot{\gamma}_{nr_1}(0) = (0, 0)$ Wyniki numeryczne zawarto w Tab. 19. W przypadku braku regularności zauważalne jest spowolnienie z 4 do 1,585 dla współczynnika $\alpha(1)$ dla

Tab. 19: Współczynnik $\alpha(\lambda)$ obliczony dla γ_{nr_1} próbkowanej przez (24), (167) i (168) dla $m \in \{21, \dots, 66\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	0,932	0,935	0,946	0,954	0,968	1,036	3,009
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (167)	0,932	0,935	0,946	0,954	0,968	1,036	1,997
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (168)	0,966	0,962	0,945	0,913	0,890	1,542*	1,585*

próbkowania (168) i spowolnienie do 1,997 dla próbkowania (167).

Przykład 16. W tym przykładzie przeprowadzony został eksperyment numeryczny oszacowania zbieżności krzywej nieregularnej (patrz Def. 2.11) cardioidy γ_{cd} z (15) do interpolanta $\hat{\gamma}^H$. Zauważmy, że $\dot{\gamma}_{cd}(0) = (0, 0)$. Wyniki numeryczne zawarto w Tab. 20.

Tab. 20: Współczynnik $\alpha(\lambda)$ obliczony dla γ_{cd} próbkowanej przez (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$.

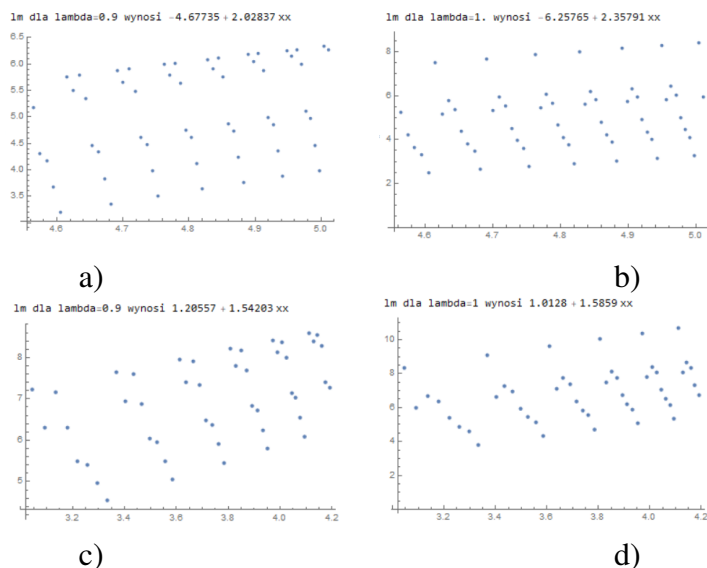
λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24) (jeden segm.)	1,985	1,986	1,988	1,993	2,017	2,015	2,997
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (167)	1,009	1,004	0,997	0,999	1,012	1,157	2,743*
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (168)	0,998	0,999	1,000	1,001	1,005	2,028	2,358

Przykładowe krzywe regresji z obu przykładów są zaprezentowane na Rys. 49

4.1.5 Testy numeryczne

W niniejszej sekcji weryfikujemy eksperymentalnie *ostrość* Tw. 4.2. Wszystkie testy numeryczne zostały przeprowadzone w *Mathematica 10.0*. Badania były wspierane przez zasoby obliczeniowe *PLGrid*.

Testowane krzywe są dwuwymiarowe lub trzywymiarowe. Krzywe dwuwymiarowe to γ_{sp} dana wzorem (9) oraz γ_c z (4) a trzywymiarowa - helikoida eliptyczna z (12), wszystkie regularnie próbkowane w odniesieniu do (23), (24) lub (27).



Rys. 49. Krzywa regresji dla przypadku próbkowania (168), krzywej γ_{cd} z (15) i a) $\lambda = 0,9$, b) $\lambda = 1$, oraz próbkowania (168), krzywej γ_{nr_1} z (17) i c) $\lambda = 0,9$, d) $\lambda = 1$.

Składnik i -ty błędu pomiędzy funkcjami ciągłymi γ i $\check{\gamma}^H \circ \phi^H$ na zbiorze zwartym \hat{I}_i jest zdefiniowany w (60). Całkowity błąd na $[0, T]$ jest brany jako maksymalna wartość \mathcal{E}_m z maksymalnych błędów na każdym przedziale \mathcal{E}_m^i i został obliczony z użyciem funkcji optymalizacji *MaxValue* i *Max* pakietu Mathematica. Ze zbiorów błędów absolutnych $\{\mathcal{E}_m\}_{m=m_{min}}^{m_{max}}$ oszacowanie numeryczne $\bar{\alpha}(\lambda)$ rzeczywistego rzędu zbieżności $\alpha(\lambda)$ jest następnie obliczone z użyciem liniowej regresji tak jak miało to miejsce w poprzednim rozdziale.

Przykład 17. Ostrość Tw. 4.2 jest weryfikowana najpierw dla krzywej spiralnej γ_{sp} zdefiniowanej w (9) i próbkowanej według (23), (24) i (27). Aby oszacować $\alpha(\lambda)$ z $\bar{\alpha}(\lambda)$ regresja liniowa jest stosowana dla $96 \leq m \leq 144$. Wygenerowane numeryczne wyniki są zaprezentowane w Tab. 21. Widoczne jest to, że są one zgodne z asymptotyką ustaloną w Tw. 4.2.

Tab. 21: Obliczony współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda) = 4$ (dla $\lambda = 1$ lub $t_i = \frac{iT}{m}$) i $\alpha(\lambda) = 1$ dla $\lambda \in [0, 1)$ dla γ_{sp} próbkowanej przez (23), (24) i (27) gdy $m \in \{96, \dots, 144\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	0,968	0,969	0,970	0,973	0,979	1,021	3,918
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	0,969	0,970	0,974	0,978	0,986	1,038	3,987
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 4.2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (27)	3,995	3,993	3,989	3,939	3,934	3,933	3,933
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 4.2	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0

Warto podkreślić, że przyspieszony czwarty rząd zbieżności otrzymany dla próbkowania równomiernego (patrz (255)) jak i dla $\lambda = 1$ (patrz (230)) został także potwierdzony numerycznie jak to wskazuje Tab. 21.

Przykład 18. W następnym kroku, ostrość Tw. 4.2 jest testowana dla krzywej kubicznej γ_c zdefiniowanej wzorem (4) i próbkowanej wzdłuż (23), (24) lub (27). Do obliczenia numerycznego $\alpha(\lambda)$ z $\bar{\alpha}(\lambda)$ użyto metody regresji liniowej z m zmieniającym się w granicach $96 \leq m \leq 144$. Ponownie wyniki zaprezentowane w Tab. 22 potwierdzają ostrość asymptotyki udowodnionej w Tw. 4.2. Ponadto przyspieszony rząd zbieżności ustalony dla albo

Tab. 22: Obliczony $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ dla γ_c próbkowany (23), (24) i (27) dla $m \in \{96, \dots, 144\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	0,981	0,981	0,982	0,983	0,987	1,002	3,997
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	0,980	0,981	0,984	0,986	0,990	1,012	3,997
$\alpha(\lambda)$ z Tw. 4.2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (27)	*	3,995	3,997	3,997	3,997	3,997	3,996
$\alpha(\lambda)$ z Tw. 4.2	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0

*Błąd maszynowy $\hat{\gamma}^H = \gamma_c$.

jednorodnego próbkowania (patrz (255)), albo dla $\lambda = 1$ (patrz (230)) został także numerycznie potwierdzony ponownie (patrz Tab. 22).

Przykład 19. W ostatnim przykładzie w eksperymencie numerycznym testowana jest ostrość Tw. 4.2 dla kwadratowej helikoidy eliptycznej (patrz (12)) próbkowanej w powiązaniu z (23), (24) lub (27). Do zbadania numerycznego $\alpha(\lambda)$ z $\bar{\alpha}(\lambda)$ użyto funkcji regresji liniowej dla m zmieniającym się w granicach $110 \leq m \leq 162$. Kiedy (231) ma asymptotyczny charakter (t.j. zachodzi dla wystarczająco dużych m) dla pewnych wartości parametru $\lambda \in [0, 1]$ mogą być użyte inne przedziały wartości. Wyniki zaprezentowane w Tab. 23 potwierdzają asymptotykę z (231). Dodatkowo, przyspieszenie do czwartego rzędu zbieżności zachodzi tak dla równomiernego próbkowania (patrz (255)) jak i dla $\lambda = 1$ (patrz (230)).

4.2 Analiza możliwości szacowania długości krzywych z pomocą przedziałowo-kubicznej interpolacji klasy C^1 .

Interpolant klasy C^1 jest bardziej gładki na punktach łączenia, w związku z tym oszacowanie długości jest dokładniejsze niż w przypadku interpolacji klasy C^0 . Wciąż jednak istnieje ten

Tab. 23: Obliczony współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ dla krzywej γ_{qh} próbkowanej jak w (23), (24) i (27) dla $m \in \{110, \dots, 162\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	0,969	0,961	0,963	0,966	0,973	1,007	4,052*
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	0,965	0,967	0,972	0,976	0,983	1,022	3,805**
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 4.2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (27)	4,000	3,895	3,872	3,864	3,866	3,875	3,882
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 4.2	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0

* $69 \leq m \leq 120$ ** $160 \leq m \leq 200$

sam problem, co w przypadku interpolacji przedziałowo-kubicznej klasy C^0 , z funkcją ψ i tym, żeby była reparametryzacja. Są znane badania dotyczące oszacowania długości i jej zbieżności przy zastosowaniu interpolanta zbudowanego w oparciu o parametryzację długością cięciwy - dla $\lambda = 1$ (patrz [33] - przypadek generuje ψ , które jest reparametryzacja). W tym rozdziale także skupiono się na wyznaczeniu warunków, przy których ψ jest parametryzacja.

4.2.1 Asymptotyczne warunki wystarczające by $\dot{\phi}^H > 0$ (parametryzacja).

Dla pewnych praktycznych zastosowań (na przykład dla oszacowania długości) interpolant $\hat{\gamma}$ zdefiniowany na danych zredukowanych wymaga przedziałowej reparametryzacji $\phi : [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$. Dla $\lambda = 1$ wyniki opublikowane w [33] (lub w [17]) dla ψ_i zdefiniowanej jak w (227) (i dla ϕ_i^H z (229)) wskazują na to iż jest ona reparametryzacja. Tymczasem pozostałe przypadki dla $\lambda \in [0, 1)$ tworzą nieiniektywne odwzorowanie (patrz [3], [34] lub [30]), które wymaga opisanie wystarczającymi warunkami, narzuconymi na mniej lub bardziej równomierne próbkowanie $\{t_i\}_{i=0}^m$ tak by $\phi_i^H : I_i \rightarrow \hat{I}_i$ była reparametryzacja. To definiuje reparametryzację przedziałową klasy C^∞ z $[0, T]$ na $[0, \hat{T}]$. **Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w [3] oraz [5] i [6].** Zauważyć należy, że każde dowolne dopuszczalne próbkowanie $\{t_i\}_{i=0}^m$ na każdym $J_{i,k} = [t_{i+k}, t_{i+k+3}]$ (z $k = 0, 1$) można zapisać jako:

$$\boxed{t_{i+1} - t_i = M_{im} \delta_m, \quad t_{i+2} - t_{i+1} = N_{im} \delta_m, \quad t_{i+3} - t_{i+2} = P_{im} \delta_m \quad \text{i} \quad t_{i+4} - t_{i+3} = R_{im} \delta_m,} \quad (282)$$

gdzie $0 < M_{im}, N_{im}, P_{im}, R_{im} \leq 1$. Jeśli dodatkowo mniej lub bardziej równomierność jest wywołana z β zdefiniowaną w Def. 2.14 wtedy $\beta \leq M_{im}, N_{im}, P_{im}, R_{im} \leq 1$ czyli wtedy każda czwórka $\tau_{\mathcal{J}} = (M_{im}, N_{im}, P_{im}, R_{im})$ określona jest na zbiorze zwartym $D_{\beta_0} = [\beta_0, 1]^4$. Aby ϕ_i^H była reparametryzacja wystarczy założyć, że $\dot{\phi}^H(t) > 0$ na I_i . Biorąc pod uwagę, że $\dot{\phi}_i^H(t) =$

$a_it^2 + b_it + c_i$ jest funkcją kwadratową, poniżej sformułowane są cztery warunki wystarczające wymuszające $\dot{\phi}_i^H > 0$ na I_i ($a_i \neq 0$):

$$a_i < 0 \quad \text{i} \quad \dot{\phi}_i^H(t_i) > 0 \quad \text{i} \quad \dot{\phi}_i^H(t_{i+1}) > 0, \quad (283)$$

$$a_i > 0 \quad \text{i} \quad \dot{\phi}_i^H(t_i) > 0 \quad \text{i} \quad -\frac{b_i}{2a_i} < t_i, \quad (284)$$

$$a_i > 0 \quad \text{i} \quad \dot{\phi}_i^H(t_{i+1}) > 0 \quad \text{i} \quad -\frac{b_i}{2a_i} > t_{i+1}, \quad (285)$$

$$a_i > 0 \quad \text{i} \quad \dot{\phi}_i^H\left(-\frac{b_i}{2a_i}\right) > 0. \quad (286)$$

Łącząc wzór Newtona na pochodną (176) z postacią $a_it^2 + b_it + c_i$ otrzymujemy (na I_i):

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i^H(t) &= 3t^2\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] + t(2\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}] - 2\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t_{i+1} + 2t_i)) \\ &\quad + \phi_i^H[t_i, t_i] - 2\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}]t_i + \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](2t_it_{i+1} + t_i^2), \end{aligned} \quad (287)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_i &= 3\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}], \quad b_i = 2\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}] - 2\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t_{i+1} + 2t_i), \\ c_i &= \phi_i^H[t_i, t_i] - 2\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}]t_i + \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](2t_it_{i+1} + t_i^2). \end{aligned} \quad (288)$$

Dalej z (227), (229) otrzymujemy następujące różnice dzielone dla wielomianu Hermita¹⁵:

$$\begin{aligned} \phi_i^H[t_i, t_i] &= \dot{\phi}_i^H(t_i) = \delta_m^{\lambda-1} \left\{ M_i^{\lambda-1} \left[1 + \frac{M_i}{M_i + N_i} + \frac{M_i}{M_i + N_i + P_i} \right] \right. \\ &\quad \left. - N_i^{\lambda-1} \left[\frac{M_i}{M_i + N_i} + \frac{M_i(M_i + 2N_i + P_i)}{(N_i + P_i)(M_i + N_i + P_i)} \right] \right. \\ &\quad \left. + P_i^{\lambda-1} \frac{M_i(M_i + N_i)}{(N_i + P_i)(M_i + N_i + P_i)} \right\} + O(\delta_m^{\lambda+1}) \\ &= \theta_{1,\lambda}(M_i, N_i, P_i) \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}) = N_i^{\lambda-1} \hat{\theta}_{1,\lambda}(M_i, N_i, P_i) \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}), \end{aligned} \quad (289)$$

$$\phi_i^H[t_i, t_{i+1}] = \delta_m^{\lambda-1} M_i^{\lambda-1} = \theta_{2,\lambda}(M_i) \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}), \quad (290)$$

¹⁵Drugi symbol "m" w indeksie dolnym w M, N, P, R ze wzoru (282) został pominięty.

$$\begin{aligned}
\phi_i^H[t_{i+1}, t_{i+1}] &= \dot{\phi}_i^H(t_{i+1}) \\
&= \delta_m^{\lambda-1} \left\{ N_i^{\lambda-1} \left[1 + \frac{N_i}{N_i + P_i} + \frac{N_i}{N_i + P_i + R_i} \right] \right. \\
&\quad \left. - P_i^{\lambda-1} \left[\frac{N_i}{P_i + N_i} + \frac{N_i(P_i + N_i)}{(P_i + R_i)(R_i + N_i + P_i)} + \frac{N_i}{R_i + N_i + P_i} \right] \right. \\
&\quad \left. + R_i^{\lambda-1} \frac{N_i(P_i + N_i)}{(P_i + R_i)(R_i + N_i + P_i)} \right\} + O(\delta_m^{\lambda+1}) \\
&= \theta_{3,\lambda}(N_i, P_i, R_i) \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}) \\
&= N_i^{\lambda-1} \hat{\theta}_{3,\lambda}(N_i, P_i, R_i) \delta_m^{\lambda-1} + O(\delta_m^{\lambda+1}). \tag{291}
\end{aligned}$$

Co więcej, trzecie różnice dzielone: $\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}] = (\phi_i^H[t_i, t_{i+1}] - \phi_i^H[t_i, t_i])(t_{i+1} - t_i)^{-1}$ i $(\phi_i^H[t_{i+1}, t_{i+1}] - \phi_i^H[t_i, t_{i+1}])(t_{i+1} - t_i)^{-1} = \phi_i^H[t_i, t_{i+1}, t_{i+1}]$ można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}] &= \delta_m^{\lambda-2} \left\{ N_i^{\lambda-1} \left[\frac{1}{N_i + M_i} + \frac{2N_i + M_i + P_i}{(P_i + N_i)(M_i + N_i + P_i)} \right] \right. \\
&\quad \left. - M_i^{\lambda-1} \left[\frac{1}{M_i + N_i} + \frac{1}{M_i + N_i + P_i} \right] \right. \\
&\quad \left. - P_i^{\lambda-1} \frac{N_i + M_i}{(P_i + N_i)(M_i + N_i + P_i)} \right\} + O(\delta_m^\lambda) \\
&= \theta_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i) \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^\lambda) = (1/M_i) N_i^{\lambda-1} \hat{\theta}_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i) \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^\lambda), \tag{292}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_i^H[t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] &= \delta_m^{\lambda-2} \left\{ N_i^{\lambda-1} \left[\frac{2N_i + P_i}{M_i(N_i + P_i)} + \frac{N_i}{M_i(N_i + P_i + R_i)} \right] \right. \\
&\quad \left. - P_i^{\lambda-1} \left[\frac{N_i}{M_i(P_i + N_i)} + \frac{N_i(2P_i + N_i + R_i)}{M_i(P_i + R_i)(R_i + N_i + P_i)} \right] \right. \\
&\quad \left. + R_i^{\lambda-1} \frac{N_i(P_i + N_i)}{M_i(P_i + R_i)(R_i + N_i + P_i)} - M_i^{\lambda-1} \frac{1}{M_i} \right\} + O(\delta_m^\lambda) \\
&= \theta_{5,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^\lambda), \tag{293}
\end{aligned}$$

i ostatecznie czwarta różnica dzielona wyniesie $\phi[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] =$

$$\begin{aligned}
&\delta_m^{\lambda-3} \left\{ R_i^{\lambda-1} \frac{N_i(P_i + N_i)}{M_i^2(P_i + R_i)(R_i + N_i + P_i)} + N_i^{\lambda-1} \left[\frac{2N_i^2 + N_i P_i + N_i M_i}{M_i^2(N_i + P_i)(N_i + M_i)} + \frac{N_i}{M_i^2(N_i + P_i + R_i)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2N_i + M_i + P_i}{M_i(P_i + N_i)(M_i + N_i + P_i)} \right] - M_i^{\lambda-1} \left[\frac{N_i}{M_i^2(M_i + N_i)} - \frac{1}{M_i(M_i + N_i + P_i)} \right] \right. \\
&\quad \left. - P_i^{\lambda-1} \left[\frac{N_i(M_i + N_i + P_i) - M_i(N_i + M_i)}{M_i^2(P_i + N_i)(M_i + N_i + P_i)} + \frac{N_i(2P_i + N_i + R_i)}{M_i^2(P_i + R_i)(R_i + N_i + P_i)} \right] \right\} + O(\delta_m^{\lambda-1}) \\
&= \theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) \delta_m^{\lambda-3} + O(\delta_m^{\lambda-1}). \tag{294}
\end{aligned}$$

Wszystkie funkcje $\theta_{i,\lambda}$ (i $\hat{\theta}_{i,\lambda}$, $N_i^{\lambda-1}$, $1/M_i$, $1/M_i^2$ i M_i) są ciągłe i zdefiniowane na zwartym

zbiorze D_{β_0} . Zatem wszelkie nierówności, związane z tymi funkcjami dodatnie lub ujemne, są w rzeczywistości oddzielone od zera. Każdy składnik w (289), (290), (291), (292), (293) lub w (294) oznaczony jako $\theta_{i,\lambda}$ reprezentuje współczynniki stojące wzdłuż odpowiednich najwolniejszych wyrażień. W ten sposób z pomocą wzorów (287), (288), (289), (291) i (294) asymptotyczny odpowiednik (283) to:

$$\boxed{\theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) < 0, \quad \theta_{1,\lambda}(M_i, N_i, P_i) > 0 \quad \text{i} \quad \theta_{3,\lambda}(n_i, p_i, r_i) > 0} \quad (295)$$

na D_{β_0} . We wzorze (284) mamy $a_i > 0$ a warunek $-b_i/2a_i < t_i$ z (288) zostaje przekształcony na:

$$\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t_{i+1} - t_i) - \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}] < 0, \quad (296)$$

co następnie dzięki (282), (292), (294) prowadzi do asymptotycznej postaci wzoru (284):

$$\boxed{\theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) > 0, \quad \theta_{1,\lambda}(M_i, N_i, P_i) > 0, \quad M_i \theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) - \theta_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i) < 0.} \quad (297)$$

Ponownie została użyta tu zwartość D_{β_0} i ciągłość wszystkich lewych stron (297). Podobnie, odnośnie warunku $-b_i/2a_i > t_{i+1}$ (gdz $a_i > 0$) wraz ze wzorem (288) mamy:

$$2\phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t_{i+1} - t_i) + \phi_i^H[t_i, t_i, t_{i+1}] < 0. \quad (298)$$

Jak poprzednio dzięki (282), (292), (294), (298), nierówności z (285) asymptotycznie można zapisać:

$$\boxed{\theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) > 0, \quad \theta_{3,\lambda}(N_i, P_i, R_i) > 0, \quad 2M_i \theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) + \theta_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i) < 0.} \quad (299)$$

Ostatecznie, warunek (286) ze skomplikowanymi obliczeniami drugiej nierówności w programie *Mathematica* i $\theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) > 0$ asymptotycznie jest reprezentowany jako:

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) > 0, \\ &4M_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1} + \left(\frac{N_i}{N_i + P_i} + \frac{N_i}{N_i + P_i + R_i}\right) \left(P_i^{\lambda-1} - N_i^{\lambda-1}\right) \\ &+ \frac{N_i(N_i + P_i)}{(P_i + R_i)(N_i + P_i + R_i)} \left(P_i^{\lambda-1} - R_i^{\lambda-1}\right) - \frac{(\theta_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i))^2}{\theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i)} > 0. \end{aligned}} \quad (300)$$

Wszystkie warunki algebraiczne (295), (297), (299) lub (300) (na każdym I_i) zależą od

czterech parametrów $(M_i, N_i, P_i, R_i) \in D_{\beta_0}$. Zweryfikowanie tych ograniczeń może zostać przedstawione geometrycznie w 3D z pomocą jednorodnego przekształcenia klasy $C^0 H$: $D_{\beta_0} \rightarrow H(D_{\beta_0}) = D_{\beta_0}^H = [\beta_0, 1/\beta_0]^3$:

$$x = M_i/N_i, \quad y = P_i/N_i, \quad z = R_i/N_i. \quad (301)$$

Nierówności z (283), (284), (285) i (286) (z pomocą uproszczeń zrealizowanych z pomocą funkcji pakietu *Mathematica: Simplify i Together*) są reprezentowane dla $a < 0$ jako:

$$\begin{aligned} & (z^{\lambda-1} - y^{\lambda-1}) \frac{(y+1)}{(y+z)(z+1+y)} + (1 - x^{\lambda-1}) \left[\frac{-x^2 + y + 1}{(x+y+1)(x+1)} \right] \\ & + (1 - y^{\lambda-1}) \left[\frac{y+1-x^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{1}{z+1+y} \right] < 0. \end{aligned} \quad (302)$$

Podobnie jest dla $\dot{\phi}_i^H(t_i) > 0$:

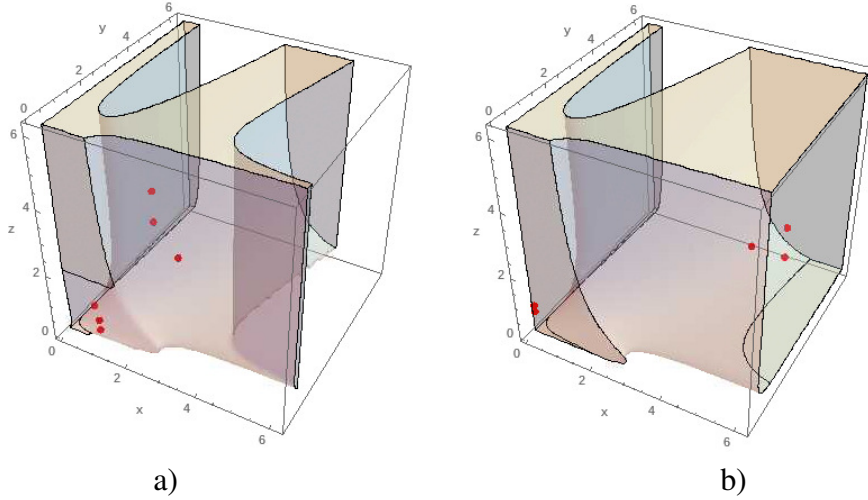
$$x^{\lambda-1} + \left(\frac{x(2+2x+y)}{(x+1+y)(x+1)} \right) (x^{\lambda-1} - 1) + (y^{\lambda-1} - 1) \frac{x(x+1)}{(1+y)(x+1+y)} > 0 \quad (303)$$

oraz dla $\dot{\phi}_i^H(t_{i+1}) > 0$:

$$1 + \frac{2+2y+z}{(1+y+z)(1+y)} (1 - y^{\lambda-1}) + \frac{y+1}{(y+z)(1+y+z)} (z^{\lambda-1} - y^{\lambda-1}) > 0. \quad (304)$$

Nierówności (283) zostały przekształcone na (302), (303) i (304) oraz przedstawione na Rys. 50 dzięki programowi *Mathematica* dla przypadków gdy $\lambda=0,7$ i $\lambda=0,9$. Mają one postać bryły 3D $D_{\beta_0}^\lambda \subset D_{\beta_0}^H = [\beta_0, \frac{1}{\beta_0}]^3$ (wykreślone na Rys. 50 dla $\beta_0=0,16$). Wszystkie punkty $(x,y,z) \in D_{\beta_0}^\lambda$ (zobacz (282) i (301)) odpowiadają β_0 -mniej lub bardziej równomiernym próbkowaniom, które zapewniają asymptotycznie, że ϕ_i^H jest reparametryzacją. W szczególności, próbkowanie (23) z $\beta = \frac{1}{3}$ (mapowane na (308)) spełnia (302), (303) i (304) razem z $\beta_0=0,16 \leq \beta = \frac{1}{3}$. Zatem wszystkie punkty z (308) są zawarte w $D_{\beta_0}^{\lambda=0,7}$ (zobacz Rys. 50a)). Analogicznie, próbkowanie (24) z $\beta = \frac{1}{5}$ (przekształcane na (309)) wypełnia (302), (303), (304) i $\beta_0=0,16 \leq \beta = \frac{1}{5}$. Stąd wszystkie punkty (309) należą do $D_{\beta_0}^{\lambda=0,9}$ (zobacz Rys. 50b)).

Następnie, dla $-b/2a < t_i$ zauważmy pierwsze, że różnice dzielone (292), (294) i (296) oraz wyrażenie $\left[\theta_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) \delta_m^{\lambda-3} + O(\delta_m^{\lambda-1}) \right] M_i \delta_m - \theta_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i) \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^\lambda) < 0$



Rys. 50. Warunek (283) (mapowany na (302), (303) i (304)) geometrycznie zobrazowany w 3D jako bryły $D_{\beta_0}^\lambda \subset D_{\beta_0}^H$, gdzie $\beta_0=0,16$ i a) $\lambda=0,7$ z punktami reprezentantami próbkowania (23) lub b) $\lambda=0,9$ z punktami reprezentantami próbkowania (24) zawartymi w $D_{\beta_0=0,16}^\lambda$.

prowadzą do:

$$N_i^{\lambda-1} \frac{1}{m} (\hat{\theta}_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) - \hat{\theta}_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i)) \delta_m^{\lambda-2} + O(\delta_m^\lambda) < 0.$$

Ostatnie wyrażenie $\hat{\theta}_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) - \hat{\theta}_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i) < 0$, w wyniku obliczeń, redukuje nierówność z (284) do następujących wyrażeń zależnych od zmiennych (x, y, z) :

$$\boxed{(x^{\lambda-1} - 1) \frac{-1+2x-y+xy+3x^2}{(1+x)(1+x+y)} + (y^{\lambda-1} - 1) \left(\frac{-1+x-y+2x^2}{(1+y)(1+x+y)} - \frac{1}{1+y+z} \right) + (z^{\lambda-1} - y^{\lambda-1}) \frac{1+y}{(y+z)(1+y+z)} < 0.} \quad (305)$$

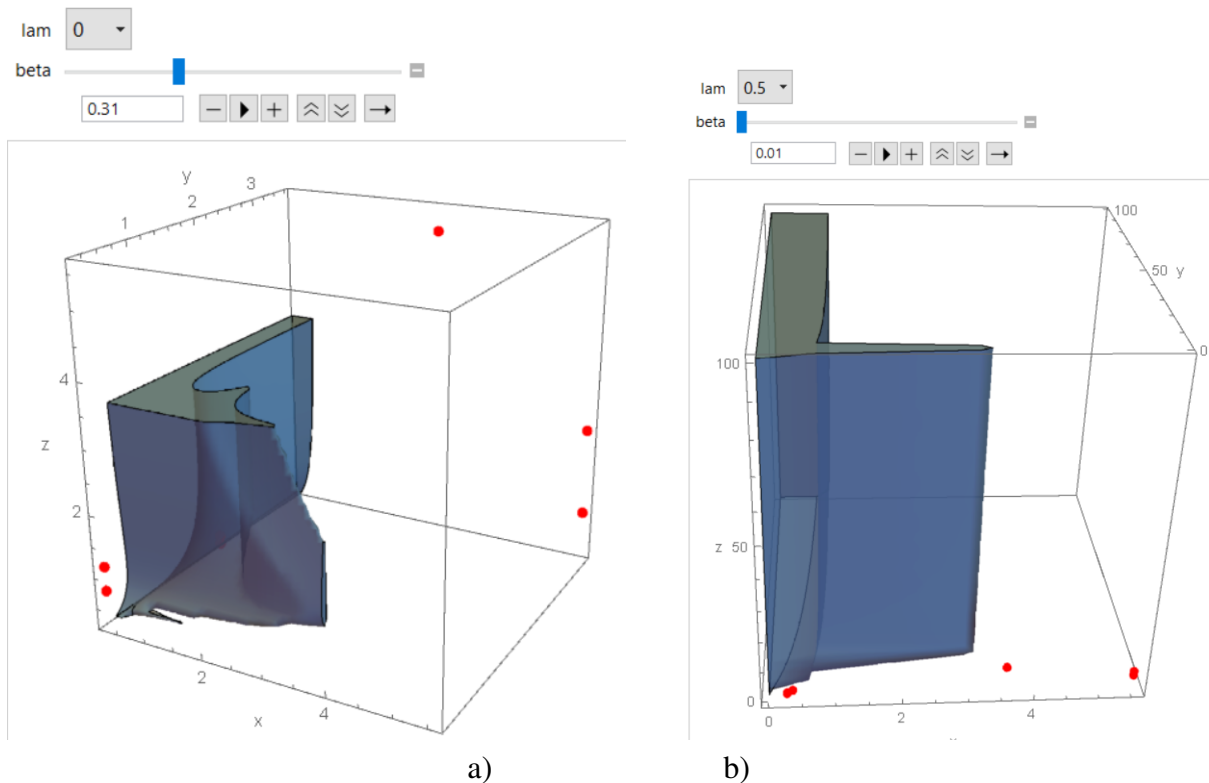
Podobnie, dla $-(b_i/2a_i) > t_{i+1}$ z (292), (294) i (298) nierówność $2\hat{\theta}_{6,\lambda}(M_i, N_i, P_i, R_i) + \hat{\theta}_{4,\lambda}(M_i, N_i, P_i) < 0$ można zapisać jako:

$$\boxed{(1 - x^{\lambda-1}) \frac{2+2x+2y+xy}{(1+x)(1+x+y)} + (1 - y^{\lambda-1}) \left(\frac{2+x+2y-x^2}{(1+y)(1+x+y)} + \frac{2}{1+y+z} \right) + (z^{\lambda-1} - y^{\lambda-1}) \frac{2(1+y)}{(y+z)(1+y+z)} < 0} \quad (306)$$

i ostatecznie dla $\dot{\phi}_i^H(-b_i/2a_i) > 0$ z (300) jest:

$$\frac{4x^{\lambda-1} - 1 - g(y) \frac{2+2y+z}{(1+y)(1+y+z)} + (y^{\lambda-1} - z^{\lambda-1}) \frac{1+y}{(y+z)(1+y+z)} \left(g(x) \frac{2+2x+y}{(1+x)h_2(x,y)} + g(y) \frac{1+x}{(1+y)h_2(x,y)} \right)^2}{h(z,y) \frac{1+y}{(y+z)x^2 h_2(y,z)} + f(x) \frac{1+y-x^2}{(1+x)x^2 h_2(x,y)} + g(y) \left(\frac{1+y-x^2}{(1+y)x^2 h_2(x,y)} + \frac{1}{x^2 h_2(y,z)} \right)} > 0, \quad (307)$$

gdzie $g(t) = 1 - t^{\lambda-1}$, $h_1(t_1, t_2) = t_1^{\lambda-1} - t_2^{\lambda-1}$ i $h_2(t_1, t_2) = 1 + t_1 + t_2$. Zauważone zostało, że dla danego mniej lub bardziej równomiernego próbkowania otrzymano $\beta \leq x, y, z \leq (1/\beta)$. Także z pomocą programu *Mathematica* można przetestować spełnienie odpowiednich kombinacji nierówności z (302), (303), (304), (305), (306) lub (307) jak określono w (283), (284), (285) i (286) aby zweryfikować czy $\dot{\phi}_i^H : I_i \rightarrow \hat{I}_i$, dla danego $\lambda \in [0, 1)$, definiuje asymptotycznie parametryzację. Prosta wizualizacja w programie *Mathematica* dla (283) została zaprezentowana na Rys.51.



Rys. 51. Obszar parametryzacji dla (283) próbkowany (26) (czerwone kropki) z $\beta = 0,31$ i Q_m oraz a) $\lambda = 0$, b) $\lambda = 0,5$.

Zestawiamy teraz dotychczas ustalone nierówności, przeformułowując dostateczne warunki (patrz (283)-(286)) na ich asymptotyczne odpowiedniki, tak by $\dot{\phi}_i^H > 0$ dla Q_m ([5] i [6]):

Twierdzenie 4.5. *Założono dowolne $\lambda \in [0, 1]$ w (30) i rodzinę β_0 -mniej lub bardziej równomiernych próbkowań (patrz Def. 2.14) reprezentowaną przez (282). Wystarczające warunki (283), (284), (285) i (286) gwarantujące, że funkcja ϕ_i^H w (228) jest reparametryzacją naturalną są przekształcalne na ich odpowiedni zestaw nierówności (302), (303), (304), (305), odpowiednio (na $[\beta_0, 1]^4$). Dodatkowo, jeśli użyto homogenicznego mapowania (301) wtedy asymptotycznie (283) przechodzi na (302), (303), (304) i (284) na (302), (303), (305) i (285) przekształcane jest na (302), (304), (306) oraz (286) jest reprezentowane przez (302), (307) (na $[\beta_0, 1/\beta_0]^3$).*

Dla danego β_0 -mniej lub bardziej równomiernego próbkowania spełnienie warunków (302)-(307) może być zwizualizowane (lub zweryfikowane algebraicznie) na $D_{\beta_0}^H$ - patrz Rys. 50. Możliwa jest też weryfikacja iniekcyjności ϕ_i^H z pomocą (295), (297), (299) lub (300) na D_{β_0} .

4.2.2 Testy numeryczne

Poniższe przykłady pozwalają zaprezentować graficznie spełnialność warunków z Tw. 4.5 przez dwie rodziny próbkowań mniej lub bardziej równomiernych.

Przykład 20. Ten przykład wprowadza dwie rodziny próbkowań (23) i (24), dla których przynajmniej jeden z wystarczających warunków na $\phi^H > 0$, określonych wyżej może lub nie, istnieć asymptotycznie przy różnych $\lambda \in [0, 1]$. Spełnienie tych przekształconych nierówności (283), (284), (285) lub (286)) na odpowiednie warunki (302) - (307) jest testowane w programie *Mathematica* (dla dużych m).

Oznaczono tu przez \mathcal{T}_1 rodzinę *mniej lub bardziej równomiernego próbkowania* danego wzorem (23), dla którego $K_l = \frac{1}{2}$, $K_u = \frac{3}{2}$ i $\beta = \frac{1}{3}$ (patrz Def. 2.14). Po skorzystaniu z (282) i (301), istnieje następująca zwarta reprezentacja \mathcal{T}_1^C obliczona z \mathcal{T}_1 (przy dowolnym m):

$$\mathcal{T}_1^C = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3} \right), \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (3, 1, 3) \right\}. \quad (308)$$

Drugą rodziną *mniej lub bardziej równomiernego próbkowania* (danego wzorem (24)) oznaczono \mathcal{T}_2 z $K_l = \frac{1}{3}$, $K_u = \frac{5}{3}$ i $\beta = \frac{1}{3}$ (patrz Def. 2.14). Podobnie do (308), próbkowanie

(24) zmieniono (z pomocą (282) i (301)) na zwartą formę asymptotyczną \mathcal{T}_2^C :

$$\mathcal{T}_2^C = \left\{ \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1\right), (4, 5, 1), (5, 5, 1), (5, 5, 2) \right\}. \quad (309)$$

Tab. 24 i Tab. 25 ilustrują weryfikację warunków (283), (284), (285) i (286) przekształconych na ich asymptotyczne odpowiedniki (302) – (307) (oznaczone przez [283]*, [284]*, [285]* i [286]*). Przeprowadzone eksperymenty zostały zrealizowane dla \mathcal{T}_1 i \mathcal{T}_2 (zredukowanych odpowiednio do (308) lub (309)) z różnymi $\lambda \in \{0,3; 0,9\}$. Litera *P* oznacza *prawdę*, litera *F* - *falsz*. Tab. 24 pokazuje, że dla $\lambda = 0,9$ z (30) dla \mathcal{T}_1 zachodzi $\dot{\phi}^H > 0$ (dla dowolnej krzywej regularnej γ i wystarczająco dużego m) i faktycznie każdy wiersz w Tab. 24 ma przynajmniej jedną wartość *P*. Przeciwnie, dla $\lambda = 0,3$ trzech reprezentantów \mathcal{T}_1^C (t.j. $(1, 1/3, 1/3)$, $(1, 1/3, 2/3)$ i $(3, 1, 3)$) nie spełnia żadnego z warunków wystarczających gwarantujących, że $\dot{\phi}^H > 0$ (dla dużych m). Każdy punkt reprezentujący \mathcal{T}_2^C spełnia te same warunki wystarczające (283)* zapewniając $\dot{\phi}^H > 0$ asymptotycznie dla $\lambda = 0,9$. Wyraźnie, wszystkie przekształcone wystarczające warunki spełnione są dla wszystkich m . Analiza przygotowana w tym rozdziale polega na zaniedbaniu wszystkich szybszych terminów asymptotycznych (występujące w jakimkolwiek wystarczającym warunku) niosących prawdopodobnie ujemne znaki. Taka sytuacja może mieć miejsce, kiedy wszystkie pominięte szybsze asymptotyczne człony są zdominowane przez najwolniejszy człon asymptotyczny (czyli dla wystarczająco dużego m). \square

Tab. 24: Warunki [283]*, [284]*, [285]*, [286]* dla (23) z $\lambda = 0,3$ i $\lambda = 0,9$.

λ	$\lambda = 0,3$				$\lambda = 0,9$			
Warunki	[283]*	[284]*	[285]*	[286]*	[283]*	[284]*	[285]*	[286]*
Próbkowanie \mathcal{T}_1^C								
$(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3})$	F	F	F	P	F	F	F	P
$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	F	F	F	F	P	F	F	F
$(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	F	F	F	F	P	F	F	F
$(1, 3, 2)$	F	F	F	P	F	F	F	P
$(1, 3, 3)$	F	F	F	P	F	F	F	P
$(3, 1, 3)$	F	F	F	F	P	F	F	F

Przykład 21. W tym przykładzie przebadany zostanie znak całkowitej pochodnej krzywej $\dot{\phi}_0^H$ na I_0 bez analizowania jej najwolniejszego asymptotycznego składnika - patrz (302) - (307). Aby to zrobić jako krzywa została rozważona linia prosta $\gamma(t) = (t, 0) \in \mathbb{E}^2$ próbkowana mniej

Tab. 25: Warunki [283]*, [284]*, [285]*, [286]* dla (24) z $\lambda = 0,3$ i $\lambda = 0,9$.

λ	$\lambda = 0,3$				$\lambda = 0,9$			
Warunki	[283]*	[284]*	[285]*	[286]*	[283]*	[284]*	[285]*	[286]*
Próbkowanie \mathcal{F}_2^C								
$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5})$	F	F	F	F	P	F	F	F
$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1)$	F	F	F	F	P	F	F	F
$(4, 5, 1)$	F	F	F	F	P	F	F	F
$(5, 5, 1)$	F	F	F	F	P	F	F	F
$(5, 5, 2)$	F	F	F	F	P	F	F	F

lub bardziej równomiernie przez (24) które na J_0 i J_1 przyjmuje wartości $t_0 = 0, t_1 = \frac{4}{3m}, t_2 = \frac{5}{3m}, t_3 = \frac{10}{3m}$ i $t_4 = \frac{11}{3m}$. Parametryzacja wykładnicza (30) zastosowana do $\{\mathcal{N}(t_i)\}_{i=0}^4$ daje $\hat{t}_0 = 0, \hat{t}_1 = (\frac{4}{3m})^\lambda, \hat{t}_2 = (\frac{4}{3m})^\lambda + (\frac{1}{3m})^\lambda$ i $\hat{t}_3 = (\frac{4}{3m})^\lambda + (\frac{5}{3m})^\lambda + (\frac{1}{3m})^\lambda$. Dla rzadkich danych zredukowanych Q_6 (t.j. z $m = 6$) krzywa kubiczna ψ_0 i ψ_1 zdefiniowana na J_0 i J_1 pokrywa się z (po obliczeniach w pakiecie *Mathematica*):

$$\begin{aligned}\psi_0(t) &= \frac{1}{25} 2^{-\lambda-1} 3^{1-2\lambda} \left(486 \left(-22 + 3 \cdot 4^\lambda + 2 \cdot 5^\lambda \right) t^2 - 54 \left(-106 + 19 \cdot 4^\lambda + 6 \cdot 5^\lambda \right) t \right. \\ &\quad \left. + 5 \left(-92 + 33 \cdot 4^\lambda + 4 \cdot 5^\lambda \right) \right), \\ \psi_1(t) &= \frac{1}{35} 2^{-\lambda} 3^{1-2\lambda} \left(-1944 \left(-5 + 5^\lambda \right) t^2 + 1620 \left(-5 + 5^\lambda \right) t - 283 \cdot 5^\lambda + 1625 \right).\end{aligned}$$

Ponieważ $\phi_0^H(0) = 0$ i $\phi_0^H[0,0] = \psi_0(0)$ i $\phi_0^H[t_1,t_1] = \psi_1(t_1)$ różnice dzielone dla funkcji $\phi_0^H(t) = \phi_0^H[0,0]t + \phi_0^H[0,0,t_1]t^2 + \phi_0^H[0,0,t_1,t_1]t^2(t-t_1)$ przedstawiane jest (z pomocą pakietu *Mathematica*) jako:

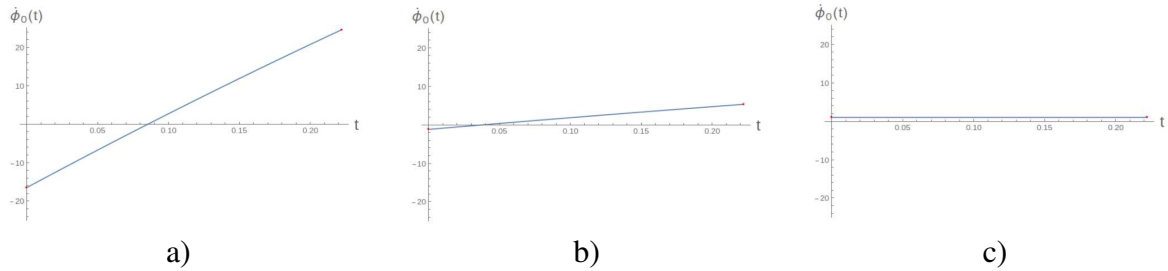
$$\begin{aligned}\phi_0^H[0,t_1] &= \left(\frac{9}{2}\right)^{1-\lambda}, \quad \phi_0^H[0,0] = \left(\frac{2}{5}\right)^{1-\lambda} 3^{1-2\lambda} - \frac{23}{5} 2^{1-\lambda} 3^{1-2\lambda} + \frac{11}{5} 2^{\lambda-1} 3^{2-2\lambda}, \\ \phi_0^H[t_1,t_1] &= \psi_1(t_1) = \frac{61}{7} 2^{-\lambda} 3^{1-2\lambda} - \frac{19}{7} 2^{-\lambda} 3^{1-2\lambda} 5^{\lambda-1}, \\ \phi_0^H[0,0,t_1] &= -2^{-\lambda-1} 5^{\lambda-1} 27^{1-2\lambda} \left(\left(\frac{4}{5}\right)^\lambda 9^{2\lambda+1} - 46 \left(\frac{81}{5}\right)^\lambda + 2 \cdot 81^\lambda \right), \\ \phi_0^H[0,t_1,t_1] &= \frac{2^{-\lambda-2} 3^{3-2\lambda}}{35} \left(610 - 105 \cdot 4^\lambda - 38 \cdot 5^\lambda \right), \\ \phi_0^H[0,0,t_1,t_1] &= \frac{1}{7} 2^{-\lambda-3} 3^{5-6\lambda} 5^{\lambda-1} \left(7 \left(\frac{4}{5}\right)^\lambda 3^{4\lambda+1} - 34 \left(\frac{81}{5}\right)^\lambda - 10 \cdot 81^\lambda \right).\end{aligned}$$

Analogicznie (korzystając z uproszczeń w pakiecie *Mathematica*) otrzymano:

$$\dot{\phi}_0^H(t) = 3 \left(-\frac{17}{35} 2^{-\lambda-2} 3^{5-2\lambda} + \frac{1}{5} 2^{\lambda-3} 3^{6-2\lambda} - \frac{1}{7} 2^{-\lambda-2} 3^{5-2\lambda} 5^\lambda \right) t^2$$

$$\begin{aligned}
& +2 \left(\frac{113}{35} 2^{-\lambda-1} 3^{4-2\lambda} - \frac{7}{5} 2^{\lambda-2} 3^{4-2\lambda} - \frac{1}{7} 2^{-\lambda-1} 3^{5-2\lambda} 5^{\lambda-1} \right) t \\
& + \left(\frac{2}{5} \right)^{1-\lambda} 3^{1-2\lambda} - \frac{23}{5} 2^{1-\lambda} 3^{1-2\lambda} + \frac{11}{5} 2^{\lambda-1} 3^{2-2\lambda}.
\end{aligned}$$

Rys. 52 prezentuje całkowitą pochodną $\dot{\phi}_0^H$ wykreśloną na $I_0=[0, \frac{2}{9}]$ dla $\lambda \in \{0; 0,5; 1\}$. Tylko dla $\lambda = 1$ jest $\dot{\phi}_0^H > 0$. Jak już dowiedziono dla $m = 6$, podobne obliczenia przeprowadzone



Rys. 52. Wykres $\dot{\phi}_0^H(\lambda)$ na I_0 i $m = 6$ dla a) $\lambda = 0$, b) $\lambda = 0,5$ i c) $\lambda = 1$.

dla różnych $\lambda \in [0, 1]$ i dużych $m \in \{50, 100, 150\}$ w programie *Mathematica* doprowadziły do dokładnych analitycznych wyrażeń $\dot{\phi}_0^H(t)$. Pozwala to na podział $I_0 = [0, \frac{4}{3m}]$ na podobszary I_0^- i I_0^+ na których albo $\dot{\phi}_0^H < 0$ albo $\dot{\phi}_0^H > 0$ - patrz Tab. 26. Przypadek dla $\lambda = 0,7$ i $\lambda = 0,9$ daje w wyniku $\dot{\phi}_0^H > 0$ wewnątrz I_0 i dla $m = 50, 100, 150$ jest to asymptotyczny charakter $\dot{\phi}_0^H > 0$. Zauważalnie, wyniki dla $\lambda = 0,9$ w Tab. 25 i Tab. 26 są zgodne. Jednak wszystkie wartości z Tab. 25 zostały dowiedzione, że są zgodne asymptotycznie (patrz Rozdział 4.2.1). Bazują one także na dużo prostszych obliczeniach algebraicznych (to jest nierównościach [283]*, [284]*, [285]*, [286]*) w przeciwieństwie do standardowej długiej procedury obliczania jawnej formuły $\dot{\phi}_0^H$ przedstawionej w tym przykładzie. \square

Tab. 26: Znak $\dot{\phi}_0^H(t)$ dla próbkowania (24) na $I_0 = [0, t_1]$.

Int \ λ m	0	0,3	0,5	0,7	0,9
	$[0, \frac{0,51}{m})$ $(\frac{0,51}{m}, \frac{4}{3m}]$	$[0, \frac{0,39}{m})$ $(\frac{0,39}{m}, \frac{4}{3m}]$	$[0, \frac{0,23}{m})$ $(\frac{0,23}{m}, \frac{4}{3m}]$	$[0, \frac{4}{3m}]$	$[0, \frac{4}{3m}]$
50	- +	- +	- +	+	+
100	- +	- +	- +	+	+
150	- +	- +	- +	+	+

4.3 Podsumowanie

Zawarte w tym rozdziale wyniki zostały opublikowane w artykułach [4], [5] oraz [6]. W rozdziale tym została zaprezentowana przedziałowo-kubiczna zmodyfikowana interpolacja Hermita oraz:

- podano i udowodniono twierdzenie o rzędzie zbieżności i jego ostrości dla przedziałowo-kubicznej zmodyfikowanej interpolacji Hermita wraz z parametryzacją wykładniczą oraz dla próbkowania mniej lub bardziej równomiernego.
- zostały też postawione pewne pytania analogiczne do tych zawartych w Rozdziale 2 o konieczność założenia mniej lub bardziej równomierności oraz regularności krzywych. Wykazano teoretycznie i eksperymentalnie konieczność stosowania próbkowania mniej lub bardziej równomiernego aby zachować zbieżność interpolacji i jej zakładany stopień. W przypadku regularności załączone opisy eksperymentów potwierdzają konieczność jej uwzględnienia.
- zaprezentowano przykłady krzywych i próbkowań, potwierdzające zbieżność założoną w Tw. 4.2.
- przedstawiono warunki wystarczające na istnienie reparametryzacji ψ , niezbędnej w szacowaniu długości krzywych oraz przekształcono je do postaci umożliwiającej wizualizację 3D.
- zwizualizowano te warunki i sprawdzono ich spełnienie dla przykładowych próbkowań przytoczonych w tej pracy.

Rozważania dotyczące interpolacji przedziałowo-kubicznej Hermita pozwalają zamodelować rzeczywiste obiekty, w których nie tylko położenie ale i prędkość jest istotnym elementem. Klasa C^1 gwarantuje ciągłość nie tylko położenia obiektu ale i ciągłość jego prędkości np. jeśli opisywalibyśmy tor lotu samolotu jest oczywiste, że zakładając przelot przez kolejne punkty nie może nagle następować wzrost prędkości np o 20 km/h (brak ciągłości pierwszej pochodnej). W ostatnim rozdziale zostaną pokazane pewne praktyczne zastosowania, które pozwolą zobaczyć istotność stosowania tej klasy interpolantów.

Istnieje jednak konieczność stosowania także ciągłości drugiej pochodnej oraz uwzględniania nie tylko informacji o pochodnych na konkretnych podprzedziałach, ale i na całym rozważanym przedziale. Tutaj z pomocą przychodzą nam przedziałowo kubiczne funkcje klasy C^2 tzw. splajny. W tej pracy zostały przebadane zmodyfikowany kubiczny splajn zupełny oraz kubiczny splajn naturalny.

5 Interpolacja przedziałowo-kubiczna splajnami klasy C^2 i parametryzacja wykładnicza

Splajny są krzywymi wielomianowymi interpolującymi modelowane krzywe [2]. Wyodrębniono ich wiele typów na podstawie warunków narzuconych w punktach brzegowych lub np. stopnia, gładkości w punktach styku. I tak np: splajn naturalny charakteryzuje się ciągłością drugiej pochodnej wewnątrz przedziału i zerowaniem tejże w punktach końcowych, splajn tzw. clamped ma ciągłą drugą pochodną wewnątrz przedziału interpolacji i ustalone wartości pochodnych na końcach przedziału, Hermita ma konkretne wartości pierwszej pochodnej w każdym punkcie, splajn typu "not-a-knot" to taki, w którym druga i trzecia pochodna na pierwszym i ostatnim punkcie wewnątrz przedziału są ciągłe, a on jest taki sam na pierwszych dwóch i ostatnich dwóch przedziałach, splajn zupełny (z ang. complete), w którym znana jest wartość pierwszej pochodnej na końcach przedziału.

Tak, więc w przypadku konstrukcji splajnów mamy dane prędkości lub przyśpieszenie na początku i końcu całego przedziału, a kolejne prędkości na podprzedziałach obliczamy rozwiązując globalny układ równań, gdzie niewiadomymi są wszystkie prędkości wewnętrzne.

Interpolanty z poprzednich rozdziałów $\hat{\gamma}_r$ ($r = 2, 3$) nie są gładkie w punktach połączeń tzn. tam gdzie dwa lokalne sąsiadujące kawałkami kwadratowe (-kubiczne) wielomiany są ze sobą sklezione. Rozwiązaniem gwarantującym gładkość klasy C^2 (np. wymaganą do oszacowania przyspieszenia ($\dot{\gamma}(t)$)) jest odwołanie się do różnych mieszanych interpolantów opartych o splajny kubiczne klasy C^2 - $\hat{\gamma}_3^S$ (zobacz [24]) bazujące Jeden z nich określony jako *zupełny splajn kubiczny* $\hat{\gamma}_3^C$ (patrz [24]) wymaga znajomości prędkości początkowej $\vec{v}_0 = \dot{\gamma}(0)$ i końcowej $\vec{v}_n = \dot{\gamma}(T)$, które nie są znane dla Q_m . Wyniki z [9] wskazują jak odgadywać takie brakujące prędkości i uzyskiwać identyczne rzędy zbieżności przybliżania γ jak w Tw. 3.4 i Tw. 4.2. Alternatywne podejście odwołuje się do tzw. *splajna naturalnego* $\hat{\gamma}_3^N$ (zobacz [24]), gdzie brakujące informacje o prędkościach \vec{v}_0 i \vec{v}_m są zastąpione przez dodatkowe z *góry przyjęte* założenie nałożone na początkowe i końcowe przyśpieszenie $\ddot{\gamma}_3^N(0) = \ddot{\gamma}_3^N(T) = 0$.

W tym rozdziale **zostały opisane wyniki obliczeń i eksperymentów dla wspomnianych powyżej dwóch typów splajnów tj.: splajna naturalnego i zupełnego**. Rezultaty zostały

zaprezentowane na konferencjach ICNAAM'2015, ICNAAM'2016 oraz ESM'23.

Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie o zbieżności dla zmodyfikowanego splajna zupełnego i hipoteza o rzędzie zbieżności splajna naturalnego oraz testy numeryczne potwierdzające w obu przypadkach twierdzenie i założenia hipotezy. Dla zmodyfikowanego splajna zupełnego została zweryfikowana numerycznie hipoteza o konieczności mniej lub bardziej równomierności oraz regularności krzywej. Część teoretyczna oraz eksperymenty z tego rozdziału zostały opublikowane w [9], [11] oraz [12] a także złożone do czasopisma (dowód twierdzenia o zbieżności).

5.1 Szacowanie γ przy użyciu przedziałowo-kubicznego zmodyfikowanego splajna zupełnego $\hat{\gamma}^{MC}$ klasy C^2

Pierwszym rodzajem splajna, którego asymptotykę będziemy rozważać jest splajn zupełny (z ang. complete spline). Splajn zupełny charakteryzuje się tym, że oprócz danych interpolacyjnych znamy pochodne w punkcie początkowym q_0 i końcowym q_n . W tej pracy została przyjęta jego zmodyfikowana wersja. Mianowicie, nieznane prędkości na końcach przedziału przybliżamy przez pochodne wielomianu Lagrange'a opartego odpowiednio na pierwszej i ostatniej czwórce punktów: $Q_4 = \{q_i\}_{i=1}^3$ i $Q_m = \{q_i\}_{i=m-3}^m$. Szczegółowy opis podany jest poniżej.

5.1.1 Konstrukcja zmodyfikowanego splajna zupełnego

Splajn zmodyfikowany zupełny $\hat{\gamma}_{3,i}^{MC}(\hat{t}_i)$ tworzony jest w oparciu o następujące warunki:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{3,i}^{MC}(\hat{t}_i) &= q_i, & \hat{\gamma}_{3,i}^{MC}(\hat{t}_{i+1}) &= q_{i+1}, \\ \hat{\gamma}'_{3,i}{}^{MC}(\hat{t}_i) &= \vec{v}_i, & \hat{\gamma}'_{3,i}{}^{MC}(\hat{t}_{i+1}) &= \vec{v}_{i+1},\end{aligned}\tag{310}$$

gdzie $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_m$ to nieznane wartości takie, że: $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$. Prędkości wewnętrzne $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{m-1}\}$ obliczane są z warunków dla $\hat{\gamma}_3^{MC}$ w punktach połączeń $\{q_1, \dots, q_{m-1}\}$:

$$\hat{\gamma}'_{3,i-1}{}^{MC}(\hat{t}_i) = \hat{\gamma}'_{3,i}{}^{MC}(\hat{t}_i),\tag{311}$$

Pierwszą i ostatnią pochodną v_0 i v_m przybliżamy według następującego schematu:

- Punkty $\{q_i\}_{i=0}^3$ są interpolowane przez $\hat{\gamma}_{3,0}^L : [\hat{t}_0^\lambda, \hat{t}_3^\lambda] \rightarrow \mathbb{E}^n$ spełniającego (dla $i=0, 1, 2, 3$):

$$\hat{\gamma}_{3,0}^L(\hat{t}_i^\lambda) = q_i.$$

- Punkty $\{q_i\}_{i=m-3}^m$ są interpolowane przez $\hat{\gamma}_{3,m-3}^L : [\hat{t}_{m-3}^\lambda, \hat{t}_m^\lambda] \rightarrow \mathbb{E}^n$ spełniającego (dla $i=0, 1, 2, 3$):

$$\hat{\gamma}_{3,m-3}^L(\hat{t}_{m-3+i}^\lambda) = q_{m-3+i}.$$

- $\vec{v}_0 \approx \hat{\gamma}_{3,0}^{L'}(0)$ i $\vec{v}_m \approx \hat{\gamma}_{3,m-3}^{L'}(\hat{t}_m)$.

- Konstrukcja $\psi_3^{MC} : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ przebiega analogicznie, z tym, że q_i zastępujemy \hat{t}_i .

5.1.2 Oszacowanie rzędu zbieżności trajektorii krzywej interpolowanej zmodyfikowanym splajnem zupełnym

Głównym wynikiem tego rozdziału zgłoszonym do publikacji wraz z dowodem oraz też zweryfikowanym numerycznie w artykule [9] jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. *Niech γ będzie krzywą regularną klasy $C^4([0, T])$ w \mathbb{E}^n próbkowaną mniej lub bardziej równomiernie z parametryzacją węzłów jak w (30). Przybliżamy $(\dot{\gamma}(t_0), \dot{\gamma}(T))$ jako $\vec{v}_0^a = \hat{\gamma}_{3,0}^L(0)$ i $\vec{v}_m^a = \hat{\gamma}_{3,m-3}^L(\hat{t}_m)$, gdzie $\hat{\gamma}_{3,i}^L$ to kubiczny interpolant Lagrange'a zbudowany na pierwszym i ostatnim przedziale tj.: $[\hat{t}_0, \hat{t}_3]$ oraz $[\hat{t}_{m-3}, \hat{t}_m]$. Załóżmy także, że $\hat{\gamma}_3^{MC} : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ oznacza zmodyfikowany zupełny splajn kubiczny oparty o Q_m , oszacowane prędkości $(\vec{v}_0^a, \vec{v}_m^a)$ i parametryzację wykładniczą (30). Wtedy istnieje kawałkami klasy C^∞ mapowanie $\psi^{MC} : [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$ takie, że na $[0, T]$ mamy dla wszystkich $\lambda \in [0, 1)$:*

$$\hat{\gamma}_3^{MC} \circ \psi^{MC} - \gamma = O(\delta_m) \quad (312)$$

lub dla $\lambda = 1$:

$$\hat{\gamma}_3^{MC} \circ \psi^{MC} - \gamma = O(\delta_m^4). \quad (313)$$

Należy zauważyć, że ψ_3^{MC} może nie być reparametryzacją (dodatkowa analiza jest potrzebna).

Dowód. Podstawienie w równaniu (311) dwóch równań na pochodne $\gamma_{3,i}^{MC}(\hat{t}_i) = 2c_{3,i}$ i $\gamma_{3,i-1}^{MC}(\hat{t}_i) = 2c_{3,i-1} + 6c_{4,i-1}(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1})$ prowadzi do układu równań:

$$\vec{v}_{i-1}\Delta\hat{t}_i + 2(\Delta\hat{t}_{i-1} + \Delta\hat{t}_i)\vec{v}_i + \vec{v}_{i+1}\Delta\hat{t}_{i-1} = b_i, \quad (314)$$

gdzie

$$b_i = 3 \left(\Delta\hat{t}_i \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta\hat{t}_{i-1}} + \Delta\hat{t}_{i-1} \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta\hat{t}_i} \right).$$

Analogiczne wzory jak w (310) oraz (56) zachodzą także dla funkcji $\psi_{3,i}^{MC}(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_{3,i}^{MC}(t_i) &= \hat{t}_i, & \psi_{3,i}^{MC}(t_{i+1}) &= \hat{t}_{i+1}, \\ \psi_{3,i}^{MC}(t_i) &= v_i, & \psi_{3,i}^{MC}(t_{i+1}) &= v_{i+1}, \end{aligned} \quad (315)$$

oraz uwzględniając te same współczynniki co w (52) mamy analogiczny układ równań:

$$v_{i-1}\Delta t_i + 2(\Delta t_{i-1} + \Delta t_i)v_i + v_{i+1}\Delta t_{i-1} = b_i, \quad (316)$$

gdzie $b_i = 3 \left(\Delta t_i \frac{\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}}{\Delta t_{i-1}} + \Delta t_{i-1} \frac{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i}{\Delta t_i} \right)$.

W postaci macierzowej układy (314) i (316) wyglądają następująco:

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{t}_1 & 2(\Delta\hat{t}_0 + \Delta\hat{t}_1) & \Delta\hat{t}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta\hat{t}_2 & 2(\Delta\hat{t}_1 + \Delta\hat{t}_2) & \Delta\hat{t}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\hat{t}_3 & 2(\Delta\hat{t}_2 + \Delta\hat{t}_3) & \Delta\hat{t}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta\hat{t}_{m-1} & 2(\Delta\hat{t}_{m-2} + \Delta\hat{t}_{m-1}) & \Delta\hat{t}_{m-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_{m-1} \\ \vec{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{m-2} \end{bmatrix} \quad (317)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta t_1 & 2(t_2 - t_0) & \Delta t_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta t_2 & 2(t_3 - t_1) & \Delta t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t_3 & 2(t_4 - t_2) & \Delta t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta t_{m-1} & 2(t_m - t_{m-2}) & \Delta t_{m-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{m-2} \end{bmatrix} \quad (318)$$

Uwzględniając to, że macierz jest trójkątowa i diagonalnie dominująca (patrz [24]),

układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Oszacowanie na prędkości wewnętrzne (rozszerzone do wersji wektorowej) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-1}$ na podstawie [24] jest określone jako:

$$\boxed{\max_{0 \leq i \leq m} \|\vec{v}_i\| \leq \max\{\|\vec{v}_0\|, \max_{1 < i < m-1} \frac{\|b_i\|}{\Delta t_{i-1} + \Delta t_i}, \|\vec{v}_m\|\}} \quad (319)$$

Tutaj zostanie ono wyprowadzone. Jeśli mamy taki indeks j , że $\|\vec{v}_j\| \stackrel{def}{=} \max_i \|\vec{v}_{j,i}\|$, wtedy z j -tego równania można zapisać z (316) lub (314):

$$\begin{aligned} \|2\vec{v}_j\| &= \left\| b_j - \vec{v}_{j-1} \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j} - \vec{v}_{j+1} \frac{\Delta t_{j-1}}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j} \right\| \\ &\leq \|b_j\| + \left\| \vec{v}_{j-1} \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j} - \vec{v}_{j+1} \frac{\Delta t_{j-1}}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j} \right\| = \|3 \frac{(\Delta t_j \frac{\hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}}{\Delta t_{j-1}} + \Delta t_{j-1} \frac{\hat{t}_{j+1} - \hat{t}_j}{\Delta t_j})}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j}\| + \|\vec{v}_j\| \end{aligned} \quad (320)$$

Odejmując stronami v_j wystarczy oszacować prawą stronę nierówności dla $\hat{\gamma}$ i ψ :

$$\|\vec{v}_{j\gamma}\| \leq 3 \left\| \frac{\Delta \hat{t}_j \overbrace{\frac{q_j - q_{j-1}}{\Delta \hat{t}_{j-1}}}^{*\gamma} + \Delta \hat{t}_{j-1} \overbrace{\frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta \hat{t}_j}}^{*\gamma}}{\Delta \hat{t}_{j-1} + \Delta \hat{t}_j} \right\| \quad \|\mathbf{v}_{j\psi}\| \leq 3 \left\| \frac{\Delta t_j \overbrace{\frac{\hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}}{\Delta t_{j-1}}}^{*\psi} + \Delta t_{j-1} \overbrace{\frac{\hat{t}_{j+1} - \hat{t}_j}{\Delta t_j}}^{*\psi}}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j} \right\|$$

W powyższych wzorach należy oszacować wyrażenia oznaczone $*\psi$ i $*\gamma$, a więc:

$$\begin{aligned} \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta \hat{t}_j} &= \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{\hat{t}_{j+1} - \hat{t}_j} = \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|^\lambda} = \frac{(t_{j+1} - t_j) [\dot{\gamma}(t_j) + \frac{(t_{j+1} - t_j)}{2} \ddot{\gamma}(t_j) + O((t_{j+1} - t_j)^2)]}{(t_{j+1} - t_j)^\lambda [1 + O((t_{j+1} - t_j)^2)]} \\ &= \|(t_{j+1} - t_j)^{1-\lambda} \|\| [\dot{\gamma}(t_j) + \frac{(t_{j+1} - t_j)}{2} \ddot{\gamma}(t_j) + O((t_{j+1} - t_j)^2)] [1 + O((t_{j+1} - t_j)^2)] \| \\ &= (t_{j+1} - t_j)^{1-\lambda} (1 + O((t_{j+1} - t_j)^2)) + O((t_{j+1} - t_j)^4) = O(\delta^{1-\lambda}) + O(\delta^{3-\lambda}). \end{aligned} \quad (321)$$

Tak więc:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{t}_{j+1} - \hat{t}_j}{t_{j+1} - t_j} &= \frac{\|(t_{j+1} - t_j)\|^\lambda \|\gamma'(t_j) + \frac{t_{j+1} - t_j}{2} \gamma''(t_j) + O((t_{j+1} - t_j)^2)\|^\lambda}{t_{j+1} - t_j} = \\ &= \frac{(t_{j+1} - t_j)^{\frac{\lambda}{2}} \left[\overbrace{(\gamma'(t_j))^2}^{=1} + \overbrace{\frac{t_{j+1} - t_j}{2} \gamma'(t_j) \gamma''(t_j)}^{=0} + \overbrace{\frac{(t_{j+1} - t_j)^2}{4} (\gamma''(t_j))^2}^{=0} + O((t_{j+1} - t_j)^2) \right]^{\frac{\lambda}{2}}}{t_{j+1} - t_j} \\ &= (t_{j+1} - t_j)^{\lambda-1} (1 + O((t_{j+1} - t_j)^2))^{\frac{\lambda}{2}} \stackrel{2.6}{=} (t_{j+1} - t_j)^{\lambda-1} (1 + O((t_{j+1} - t_j)^2)) = O(\delta^{\lambda-1}) \end{aligned} \quad (322)$$

$$\|\vec{v}_{j\hat{\gamma}}\| \leq 3 \left\| \frac{\overbrace{\Delta\hat{t}_i}^{O(1)}}{\Delta\hat{t}_{i-1} + \Delta\hat{t}_i} O(\delta^{1-\lambda}) \right\| \quad \|v_{j\psi}\| \leq 3 \left\| \frac{\overbrace{\Delta t_j}^{O(1)}}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j} O(\delta^{\lambda-1}) \right\|$$

Pochodne na końcach przedziału dla $\hat{\gamma}$ i ψ to: $v_{0\hat{\gamma}} = \hat{\gamma}_0^L(\hat{t}_0) = O(\delta^{1-\lambda})$ i $v_{m\hat{\gamma}} = \hat{\gamma}_{m-3}^L(\hat{t}_m) = O(\delta^{1-\lambda})$ oraz $v_{0\psi} = \psi_0^L(t_0) = O(\delta^{\lambda-1})$ i $v_{m\psi} = \psi_{m-3}^L(t_m) = O(\delta^{\lambda-1})$.

Biorąc pod uwagę, że w wierszu pierwszym i ostatnim macierzy do oszacowania są uwzględnione pochodne na końcach przedziału to możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_{j\hat{\gamma}}\| &\leq \max\{\|v_{0\hat{\gamma}}\|, O(\delta^{1-\lambda}), \|v_{m\hat{\gamma}}\|\} = O(\delta^{1-\lambda}), \\ \|v_{j\psi}\| &\leq \max\{\|v_{0\psi}\|, O(\delta^{\lambda-1}), \|v_{m\psi}\|\} = O(\delta^{\lambda-1}). \end{aligned}$$

Oszacowanie $f_i(t) = (\check{\gamma}_{3,i}^{MC} \circ \psi_{3,i}^{MC})(t) - \gamma(t)$ wymaga także oszacowania pochodnych na podstawie Lematu Hadamarda (patrz Lem. 2.5) dla drugiej pochodnej złożenia funkcji¹⁶:

$$(\check{\gamma}_{3,i} \circ \psi_{3,i})^{(2)}(t) = \check{\gamma}_{3,i}''(\psi_{3,i})^2 + \check{\gamma}_{3,i}'\check{\psi}_{3,i}. \quad (323)$$

gdzie ze wzorów Newtona na pochodne jest:

$$\begin{aligned} \check{\gamma}_{3,i}'(\hat{t}) &= O(\delta^{1-\lambda}) + O(\delta^{1-2\lambda})O(\delta^\lambda) + O(\delta^{1-3\lambda})O(\delta^{2\lambda}) = O(\delta^{1-\lambda}) \\ \check{\gamma}_{3,i}''(\hat{t}) &= O(\delta^{1-2\lambda}) + O(\delta^{1-3\lambda})O(\delta^\lambda) = O(\delta^{1-2\lambda}) \end{aligned} \quad (324)$$

i

$$\begin{aligned} \check{\psi}_{3,i}(t) &= O(\delta^{\lambda-1}) + O(\delta^{\lambda-2})O(\delta) + O(\delta^{\lambda-3})O(\delta^2) = O(\delta^{\lambda-1}), \\ \check{\psi}_{3,i}(t) &= O(\delta^{\lambda-2}) + O(\delta^{\lambda-3})O(\delta) = O(\delta^{\lambda-2}), \end{aligned} \quad (325)$$

Wracając do (323):

$$\begin{aligned} f_i(t) &= (t-t_i)(t-t_{i+1})[(\check{\gamma}_{3,i} \circ \psi_{3,i})^{(2)}(t) - \check{\gamma}(t)] \\ &= O(\delta^2) \cdot O((\check{\gamma}_{3,i} \circ \psi_{3,i})^{(2)}(t) - \check{\gamma}(t)) = O(\delta^2)[\check{\gamma}_{3,i}''(\psi_{3,i})^2 + \check{\gamma}_{3,i}'\check{\psi}_{3,i} - \check{\gamma}(t)] \\ &= O(\delta^2)[O(\delta^{1-2\lambda})O(\delta^{2\lambda-2}) + O(\delta^{1-\lambda})O(\delta^{\lambda-2}) + O(1)] = O(\delta). \end{aligned} \quad (326)$$

Dowód jest zakończony. \square

¹⁶dla czytelności pomijamy w indeksie górnym oznaczenie MC

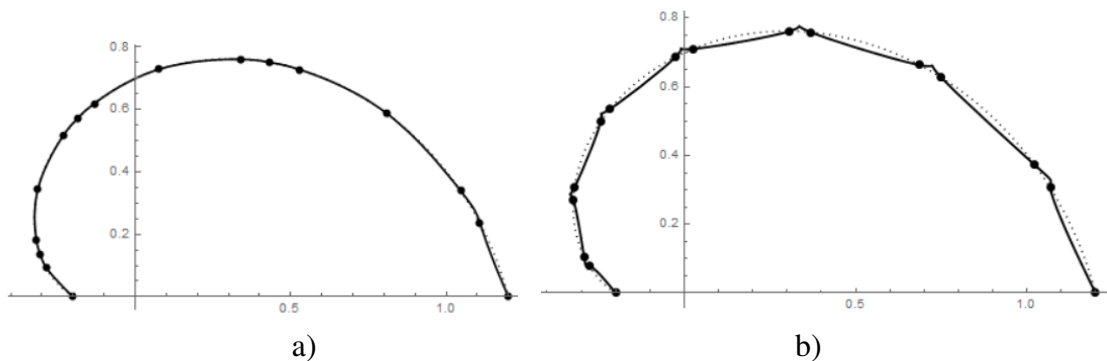
Dowód dla przypadku $\lambda = 1$ i kubicznego splajna zupełnego został opisany w [27].

5.1.3 Oszacowanie trajektorii zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym - testy numeryczne

W tej sekcji została przeprowadzona weryfikacja numeryczna asymptotyki $\alpha(\lambda)$ (i jej *ostrości*) określonych w Tw. 5.1.

Wszystkie testy w tym rozdziale zostały obliczone w programie Mathematica 8.0¹⁷ (patrz także [21]). Próbkowania, które zostały wykorzystane w eksperymentach to (23) i (24), a krzywe to *spirala* γ_{sp} i *krzywa kubiczna* γ_c z \mathbb{E}^2 oraz *helikoida* γ_h w \mathbb{E}^3 . Dla porównania rzędów zbieżności w Tabelach zostały umieszczone wyniki $\alpha_H(\lambda)$ dla zmodyfikowanego interpolanta Hermita $\hat{\gamma}_3^H$ opisanego w Rozdziale 4 (patrz [5] i [6]) (tutaj $\alpha_H(1) = 4$ i $\alpha_H(\lambda) = 1$ dla $\lambda \in [0, 1)$).

Przykład 22. Rozważmy spiralę γ_{sp} daną wzorem (9).



Rys. 53. Spirala γ_{sp} z (9) dla: a) (23) b) (24) dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$ ($m = 15$ i $\lambda = 0$).

Krzywa regresji liniowej i jej współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ dla interpolacji $\hat{\gamma}^{MC}$ (dla różnych $\lambda \in [0, 1]$) są obliczone dla $m_{min} = 60 \leq m \leq m_{max} = 120$. Wyniki numeryczne zawarte w Tab. 27 potwierdzają ostrość z (312) i (313) dla $\lambda \in \{0; 0, 1; 0, 3; 0, 5; 0, 7\}$ i szybciej (choć wciąż zgodnie z Tw. 5.1) $\alpha(\lambda)$ dla $\lambda \approx 1$. Dla porównania, Tab. 27 zawiera też wyniki dla oszacowania współczynnika regresji w przypadku zmodyfikowanej interpolacji Hermite $\hat{\gamma}_3^H$ bazującej na tych samych danych zredukowanych Q_m i parametryzacji wykładniczej.

Kolejny przykład opisuje oszacowanie rzędu zbieżności trajektorii dla helikoidy trzywymiarowej γ_h .

¹⁷ Obliczenia zostały wsparte w części przez zasoby ACK Cyfronet AGH.

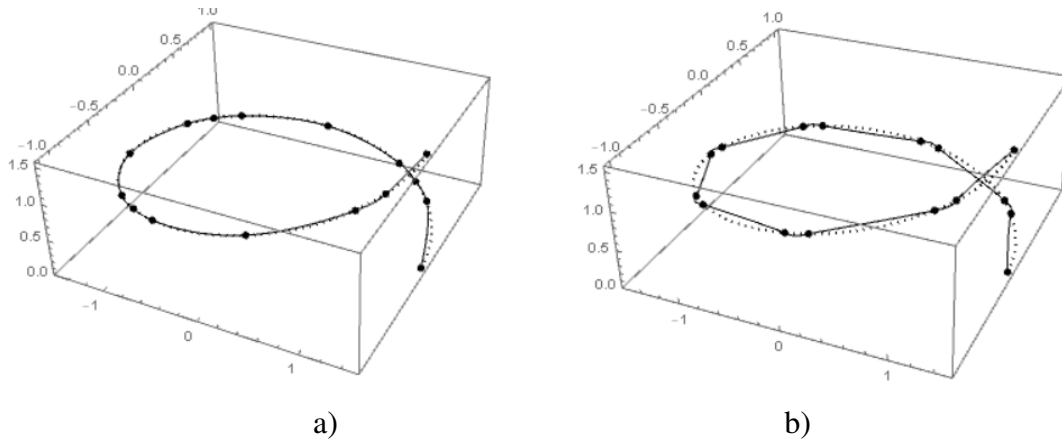
Tab. 27: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ w (312) i (313) dla γ_{sp} ze wzoru (3) i dla różnych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,007	1,009	1,013	1,022	1,041	1,146	4,254
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,012	1,013	1,016	1,025	1,051	1,209	3,991
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}_H(\lambda)$ dla (23)	1,007	1,008	1,013	1,021	1,037	1,128	3,919
$\bar{\alpha}_H(\lambda)$ dla (24)	1,001	1,002	1,011	1,048	1,049	4,830	4,058

Tab. 28: Współczynnik regresji $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ ze wzorów (312) i (313) dla γ_h z (5) i różnych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,000	1,000	1,000	1,001	1,001	1,007	3,995
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,000	1,000	1,000	1,001	1,002	1,013	3,999
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}_H(\lambda)$ dla (23)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	1,005	3,983
$\bar{\alpha}_H(\lambda)$ dla (24)	1,000	1,000	1,000	1,003	1,004	1,032	3,988

Przykład 23. Niech $\gamma_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie określona jak w (5). Rysunek przedstawia jakość dopasowania krzywej zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym $\hat{\gamma}^{MC}$ dla $\lambda = 0,3$. Obliczone numerycznie współczynniki $\bar{\alpha}(\lambda)$ (patrz Tab. 28) potwierdzają oszacowania z

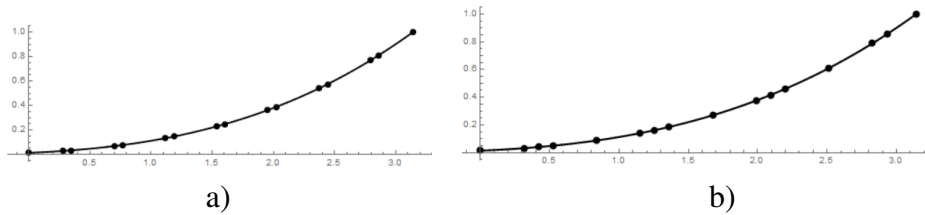


Rys. 54. Helikoida γ_h ze wzoru (5) dla: a) (23) b) (24) dopasowana $\hat{\gamma}_3^{MC}$ ($m = 15$ i $\lambda = 0,3$).

(312) i (313). Ponownie, dla porównania, w Tab. 28 przedstawiono wartość współczynnika regresji w zmodyfikowanej interpolacji Hermite $\hat{\gamma}_3^H$ dla tych samych danych zredukowanych Q_m i parametryzacji wykładniczej.

W kolejnym przykładzie została przetestowana krzywa kubiczna γ_c .

Przykład 24. Niech $\gamma_c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ będzie zdefiniowana zgodnie z (10):



Rys. 55. Krzywa kubiczna γ_c z (4) z próbkowaniem: a) (23) b) (24) dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$ ($m = 15$ i $\lambda = 1$).

Tab. 29 przedstawia numeryczne wyniki oszacowania współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ dla $\lambda \in [0, 1]$ i próbkowań (23) i (24). Wyniki podkreślają ostrość asymptotyki z (312) i (313). Także tutaj zostały dla porównania zawarte wyniki dla oszacowania γ przez zmodyfikowany interpolant Hermite'a $\hat{\gamma}_3^H$ z tymi samymi danymi zredukowanymi i parametryzacją wykładniczą.

Tab. 29: Obliczony współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z (312) i (313) dla γ_c z (4) i różnych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,0001	1,0001	1,0001	1,0002	1,0003	1,0011	4,161
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0003	1,0017	4,119
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0
$\bar{\alpha}_H(\lambda)$ dla (23)	1,0001	1,0001	1,0001	1,0002	1,0003	1,0010	4,287
$\bar{\alpha}_H(\lambda)$ dla (24)	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	0,9998	0,9991	4,304

Także w tym przykładzie ujawnia się ostrość w (312) i (313) wynikająca z *lewostronnej nieciągłości* $\alpha(\lambda)$ dla $\lambda = 1$, co jest potwierdzeniem założeń Tw. 5.1.

5.1.4 Konieczność założenia mniej lub bardziej równomierności próbkowania oraz regularności krzywej - testy numeryczne

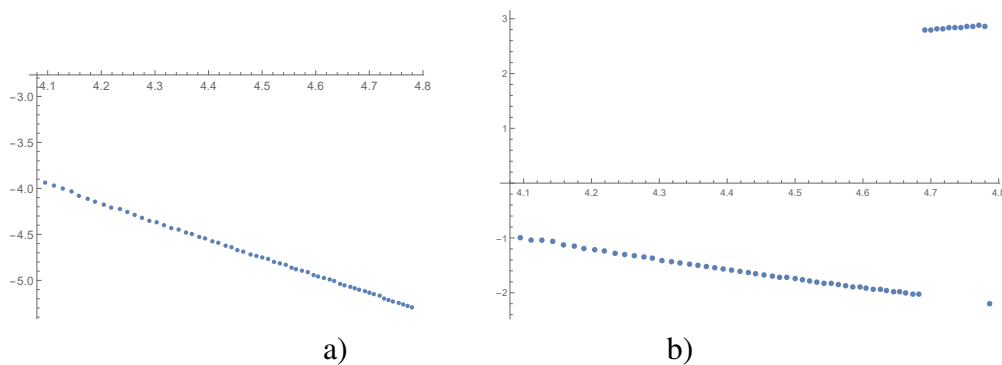
W tym podrozdziale w eksperymentach wykazaliśmy, że podobnie jak w przypadku interpolacji nieparametrycznej przedziałowej Lagrange'a i Hermita, także tu warunek mniej lub bardziej równomierności narzucony na próbkowanie znacząco wpływa na zbieżność lub nawet na jej brak. Także eksperymenty przeprowadzone w klasie krzywych nieregularnych pokazują zmiany we oszacowaniu współczynnika zbieżności w porównaniu do tych przywoływanych w Tw. 5.1. Przytoczmy następujące przykłady:

Przykład 25. Próbkowanie nie spełniające warunku mniej lub bardziej równomierności i jego wpływ na oszacowanie zbieżności

Tab. 30: Współczynnik regresji $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Tw. 5.1 dla krzywej Steinmetza z (14) i $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (29)	-2,15	-0,93	3,94*	0,91	0,49	0,62	3,94
$\alpha(\lambda)$ w Tw. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

*patrz Rys. 56.



Rys. 56. Rozbieżność dla próbkowania (29) nie spełniającego warunku mniej lub bardziej równomierności dla krzywej Steinmetza i parametru a) $\lambda = 0,1$, b) $\lambda = 0,3$.

Kolejny przykład weryfikuje w oparciu o testy numeryczne wpływ braku regularności krzywej interpolowanej na rząd zbieżności $\hat{\gamma}^{MC}$ do γ .

Przykład 26. Asymptotyka dla przybliżania krzywej nieregularnej γ_{nr_2} i γ_{cd} przez $\hat{\gamma}^{MC}$ i próbkowania (24), (167) i (168).

Wyniki numeryczne dla krzywych nieregularnych γ_{cd} i γ_{nr_2} wykreślonych na jednym przedziale $(t_0, t_3) = \{-\frac{1}{3m}, 0, \frac{5}{3m}, \frac{10}{3m}\}$ dla próbkowania (24) oraz $[t_0, t_m]$ dla próbkowań (167) oraz (168) zostały zaprezentowane w Tab. 31 oraz Tab. 32

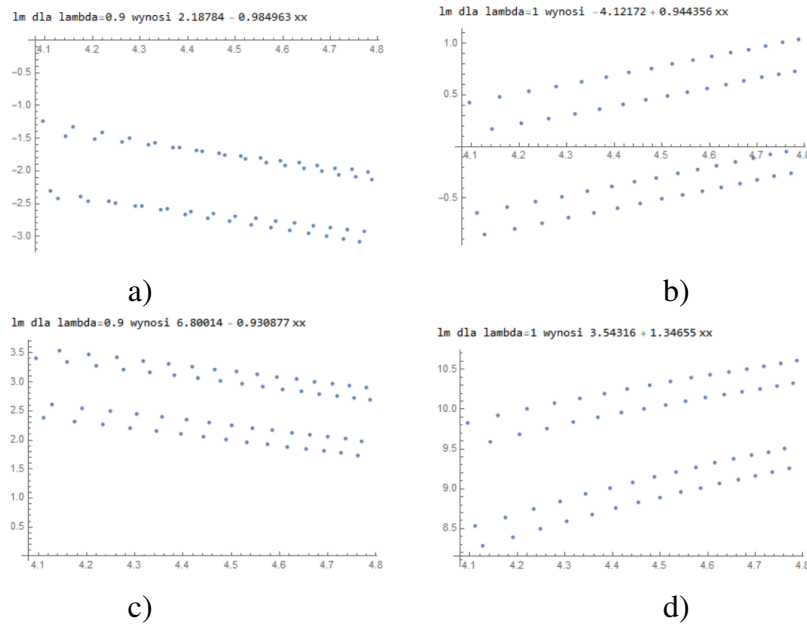
Tab. 31: Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{cd} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{60, \dots, 120\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{cd} (jeden seg) dla (24)	1,99	1,99	1,99	1,99	2,01	2,02	3,03
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{cd} dla (167)	-9,45	-9,71	-9,91	-10,34	-10,70	-11,19	-0,92
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{cd} dla (168)	-6,59	-6,37	-5,17	-3,62	-2,16	-0,98	0,94*
$\alpha(\lambda)$ z Tw. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

Tab. 32: Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{nr_2} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{60, \dots, 120\}$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_2} dla (24) (jeden seg)*	3,00	3,00	3,00	2,99	3,00	2,99	4,08
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_2} dla (167)	-10,45	-10,54	-10,42	-10,41	-10,49	-10,65	0,80*
$\alpha(\lambda)$ dla γ_{nr_2} dla (168)	-6,74	-6,63	-5,03	-3,49	-2,09	-0,93	1,35*
$\alpha(\lambda)$ z Tw. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

*Zostało zauważone, że zbieżność zostaje zachowana dla próbkowania (168) przy interpolacji dla obu krzywych nieregularnych, gdy parametr $\lambda = 1$ oraz dla (167) w przypadku krzywej (18) (patrz Rys. 57). W pozostałych przypadkach tych próbkowań zachodzi rozbieżność. W przypadku próbkowania z naturalnym punktem osobliwym wewnątrz przedziału $[t_0, t_1]$ zbieżność zostaje zachowana, z większym stopniem dla $\lambda \in [0, 1)$ i obniżonym do 3 dla $\lambda = 1$.



Rys. 57. Krzywa regresji dla przypadku próbkowania (168), krzywej γ_{cd} z (15) i a) $\lambda = 0,9$, b) $\lambda = 1$, oraz próbkowania (168), krzywej γ_{nr_2} z (18) i c) $\lambda = 0,9$, d) $\lambda = 1$.

5.1.5 Testy numeryczne szacowania współczynnika zbieżności $d(\hat{\gamma}^{MC})$ do $d(\gamma)$

Hipoteza postawiona w tym podrozdziale została zweryfikowana eksperymentalnie w kolejnych przykładach dotyczących asymptotyki długości interpolanta:

Hipoteza 5.1. Załóżmy, że γ jest regularną krzywą klasy $C^4([0, T])$ określoną w \mathbb{E}^n i próbkowaną mniej lub bardziej równomiernie. Załóżmy także, że $\hat{\gamma}_3^{MC} : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ definiuje

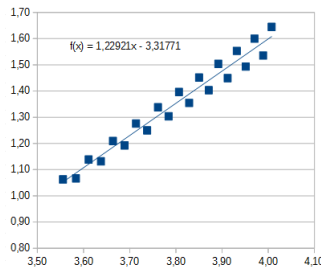
nam zmodyfikowanego splajna zupełnego opisywanego przez dane Q_m i parametryzację wykładniczą. Wtedy zachodzi następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} d(\hat{\gamma}_3^{MC}) - d(\gamma) &= O(\delta_m), \text{ dla } \lambda \in [0, 1) \\ d(\hat{\gamma}_3^{MC}) - d(\gamma) &= O(\delta_m^4), \text{ dla } \lambda = 1 \end{aligned} \quad (327)$$

Błąd E_m między długościami krzywych γ i $\hat{\gamma}_3^{MC} \circ \psi_3^{MC}$ wynosi:

$$E_m = |d(\hat{\gamma}_3^{MC} \circ \psi_3^{MC}) - d(\gamma)|. \quad (328)$$

Współczynnik zbieżności α otrzymany z prostej regresji liniowej wyznaczonej dla pary punktów $\{(\log(m), -\log(E_m))\}_{m_{\min}}^{m_{\max}}$ (zobacz [1]):



Rys. 58. Regresja liniowa ($\alpha(\lambda) = 1,229$) wyznaczona na parach punktów: $\{(\log(m), \log(E_m))\}_{m_{\min}=35}^{m_{\max}=55}$ dla γ_{sp} próbkowanej (24) i $\lambda = 0,9$.

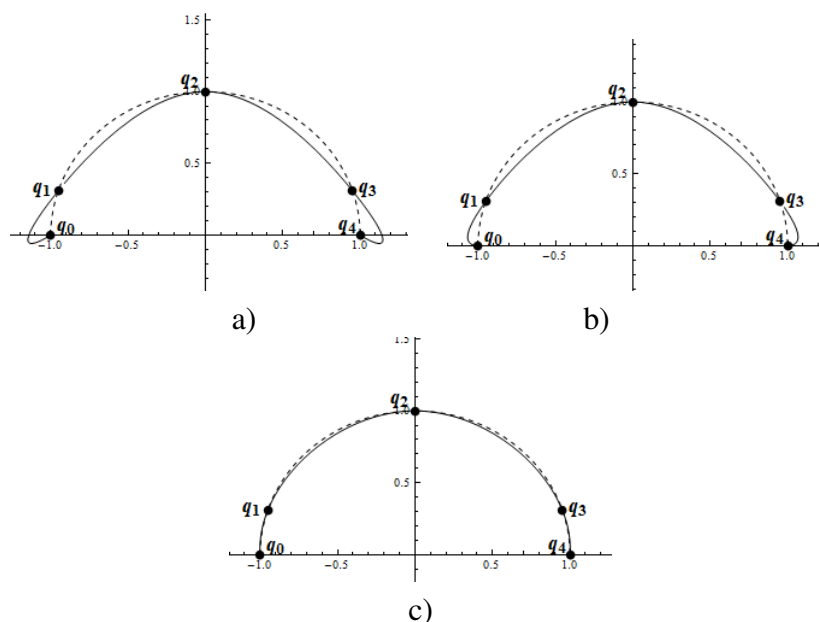
Interpolacja nieparametryczna dla różnych λ . Krzywa modelowana $\gamma_{sc}(t) = (\cos(\pi(1 - t)), \sin(\pi(1 - t)))$, $t \in [0, 1]$ oraz jej długość w zależności od doboru współczynnika λ .

Przykład 27. Interpolacja długości zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym $\hat{\gamma}_3^{MC}$ dla γ_{sp} .

Rozważmy spiralę płaską γ_{sp} daną wzorem (9). Asymptotykę dla przybliżenia długości γ_{sp} przez interpolanta $\hat{\gamma}_3^{MC}$ prezentują następujące wyniki numeryczne:

Przykład 28. Interpolacja długości zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym $\hat{\gamma}_3^{MC}$ dla γ_h .

Rozważono helikoidę trzywymiarową γ_h daną wzorem (5). Rys. 61 prezentuje tę krzywą dopasowaną interpolantem $\hat{\gamma}_3^{MC}$ dla $\lambda = 0,3$ i dwóch rodzajów próbkowań.



Rys. 59. Półokrąg γ_{sc} o długości: $d(\gamma) = 3,142$ zobrazony przy pomocy $\hat{\gamma}_3^{MC}$ z a) $\lambda = 0$, $d(\hat{\gamma}^{MC}) = 3,578$, b) $\lambda = 0,3$, $d(\hat{\gamma}^{MC}) = 3,193$ c) $\lambda = 1$, $d(\hat{\gamma}^{MC}) = 3,117$ dla $m=4$ i $Q_m = \{\gamma_{sc}(0), \gamma_{sc}(0,1), \gamma_{sc}(0,5), \gamma_{sc}(0,9), \gamma_{sc}(1)\}$.

Tab. 33: Obliczony współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Hip. 5.1 dla γ_{sp} z (9) oraz $m \in \{55, \dots, 100\}$ i $\lambda \in [0, 1]$.

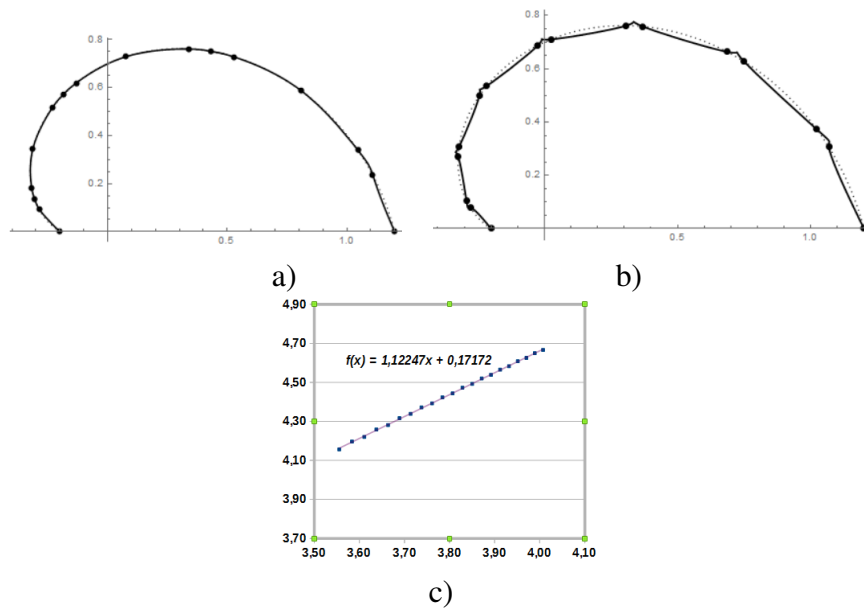
λ	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,014	1,014	1,0136	1,017	1,029	1,091	4,225
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,068	1,064	1,058	1,054	1,055	1,088	3,941
$\alpha(\lambda)$ z Hip. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

Wyniki numeryczne wartości współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda)$ przy oszacowaniu długości krzywej γ_h prezentuje Tab. 34.

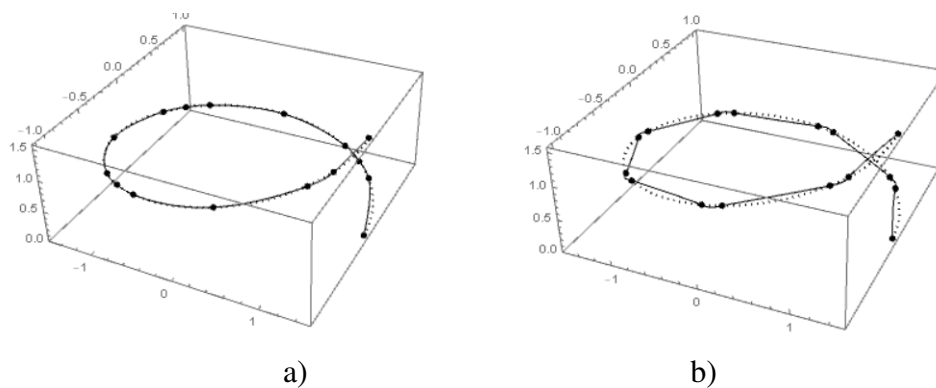
Tab. 34: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Hip. 5.1 dla γ_h danej wzorem (5) oraz $m \in \{35, \dots, 55\}$, $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)*	1,075	1,492	2,090	2,168	2,199	2,210	3,986**
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,472	1,472	1,083	1,976	1,973	1,977	3,912***
$\alpha(\lambda)$ w Hip. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

* dla m od 25 do 55 ** dla $m=15$ do 55 *** dla $m=85$ do 100



Rys. 60. Spirala γ_{sp} dana wzorem (3) próbkowana przez: a) (23), b) (24) i dopasowany interpolant $\hat{\gamma}_3^{MC}$ ($m = 15$ i $\lambda = 0$), c) regresja liniowa ze współczynnikiem $\alpha(\lambda) = 1,122$ dla (24) ($\lambda = 0$ i $m \in \{35, \dots, 55\}$).

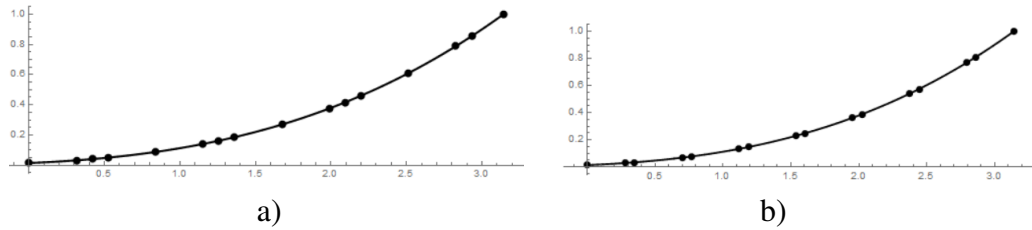


Rys. 61. Helikoida γ_h ze wzoru (5) próbkowana: a) (23), b) (24) i dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$ ($m = 15$ i $\lambda = 0,3$).

Przykład 29. Interpolacja długości krzywej γ_c kubicznym zmodyfikowanym splajnem zupełnym $\hat{\gamma}_3^{MC}$

Niech krzywa kubiczna γ_c będzie określona wzorem (4) oraz dopasowana interpolantem $\hat{\gamma}_3^{MC}$ z parametrem $\lambda = 1$ (patrz Rys. 62).

Tab. 35 pokazuje obliczone numerycznie oszacowanie $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ dla długości γ_c interpolowanej przez długość $\hat{\gamma}_3^{MC}$ dla różnych $\lambda \in [0, 1]$ i próbkowań (23) and (24).



Rys. 62. Krzywa kubiczna γ_c z (4) próbkowana przez: a) (23), b) (24) dopasowana interpolantem $\hat{\gamma}_3^{MC}$ ($m = 15$ i $\lambda = 1$).

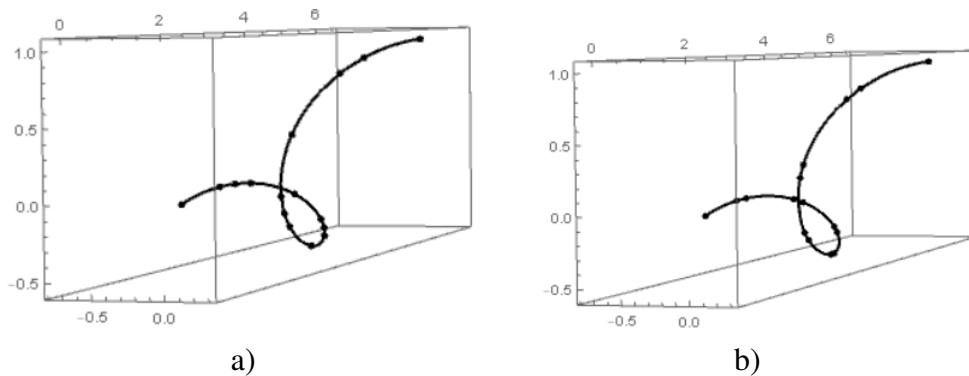
Tab. 35: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Tw. 5.1 dla γ_c danej wzorem (4) oraz $m \in \{35, \dots, 55\}$, $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,177	1,416	1,640	1,803	1,929	1,948	3,969*
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,156	1,152	1,169	1,153	1,012	1,411	5,126
$\alpha(\lambda)$ w Hip. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

* dla m od 70 do 90

Przykład 30. Interpolacja długości zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym $\hat{\gamma}_3^{MC}$ dla γ_{ch} .

Niech krzywa γ_{ch} będzie zdefiniowana jak w (13). Rys. 63 pokazuje dopasowanie interpolanta $\hat{\gamma}_3^{MC}$ z parametrem $\lambda = 1$ dla krzywej γ_{ch} dla dwóch próbkowań.



Rys. 63. Helikoida stożkowa γ_{ch} dana wzorem (13) dla: a) (23), b) (24) dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$ ($m = 15$ i $\lambda = 1$).

Wyniki numeryczne dla asymptotyki przybliżania γ_{ch} przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$ zestawiono w Tab. 36:

Tab. 36: Obliczony $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Hipotezy 5.1 dla γ_{ch} z (13) i $m \in \{35, \dots, 55\}$, $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)*	2,420	2,242	1,713	2,029	2,121	2,164	4,302
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,488	1,493	1,155	1,957	1,967	1,973	4,091
$\alpha(\lambda)$ w Hip. 5.1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	4,0

* dla m od 25 do 55

5.1.6 Podsumowanie

W rozdziale tym:

- sformułowano i udowodniono twierdzenie o rzędzie zbieżności trajektorii interpolanta - zmodyfikowanego kubicznego splajna zupełnego $\hat{\gamma}^{MC}$ i krzywej interpolowanej γ ,
- przeprowadzono eksperymenty na krzywych dwu- i trzywymiarowych. Potwierdziły one założenia zawarte w Tw. 5.1 oraz pokazały też ostrość oszacowania trajektorii krzywej,
- postawiono hipotezę o rzędzie zbieżności długości interpolanta $\hat{\gamma}^{MC}$ do długości krzywej interpolowanej,
- potwierdzono założenia z Hipotezy 5.1 w eksperymentach przeprowadzonych dla wybranych krzywych i próbkowań,
- przeprowadzono eksperymenty potwierdzające odstępstwa od zbieżności w oszacowaniu trajektorii w klasie krzywych nieregularnych oraz w przypadku braku spełnienia założenia o mniej lub bardziej równomierności.

Dalsze prace, które można podjąć, aby uzupełnić zagadnienia zawarte w tym rozdziale:

- analityczny dowód dla Hipotezy 5.1,
- opracowanie warunków wystarczających dla próbkowań, tak by ψ^{MC} była reparametryzacja,
- zbadanie analityczne jak brak mniej lub bardziej równomierności wpływa na asymptotykę trajektorii,
- zbadanie asymptotyki oszacowania krzywizny przy interpolacji $\hat{\gamma}_3^{MC}$.

5.2 Szacowanie γ przy użyciu interpolacji przedziałowo-kubicznej splajna naturalnego $\hat{\gamma}_3^{NS}$

Interpolacja nieparametryczna splajnem naturalnym jest kolejnym krokiem w kierunku wygładzenia punktów połączeń kolejnych funkcji na podprzedziałach $[t_i, t_{i+1}]$. Zostało pokazane w przypadku standardowej interpolacji, że splajny bardzo dobrze przybliżają punkty interpolacyjne. W tym rozdziale zbadane zostało jak twierdzenia przy interpolacji parametrycznej przekładają się na przypadek danych zredukowanych ze wsparciem parametryzacji wykładniczej (zależność od parametru $\lambda \in [0, 1]$) dla oszacowania trajektorii w dowolnej przestrzeni Euklidesowej. Krzywe i próbkowania spełniają założenia takie same jak w poprzednich rozdziałach.

5.2.1 Konstrukcja splajna naturalnego

Konstrukcja splajna naturalnego $\hat{\gamma}_3^{NS}$ opartego o parametryzację (30) została opisana także w [11] w zastosowaniu do szacowania trajektorii. Splajn naturalny $\hat{\gamma}_3^{NS} : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ (zobacz [24]) jest określony na każdym podprzedziale $\hat{t} \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ zgodnie ze wzorem (51) ze współczynnikami podanymi we wzorze (52). Oczywiście, jak przy poprzednich interpolantach wprowadzamy oznaczenie $\check{\gamma}_{3,i}^{NS}|_{[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]} = \hat{\gamma}_{3,i}^{NS}$, co pozwala nam na wprowadzenie funkcji ψ nie będącej reparametryzacją. Splajn naturalny spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{3,i}^{NS}(\hat{t}_i) &= q_i, & \hat{\gamma}_{3,i}^{NS}(\hat{t}_{i+1}) &= q_{i+1}, \\ \hat{\gamma}_{3,i}^{NS'}(\hat{t}_i) &= \vec{v}_i, & \hat{\gamma}_{3,i}^{NS'}(\hat{t}_{i+1}) &= \vec{v}_{i+1}. \end{aligned} \quad (329)$$

Brakujące dane o \vec{v}_0 i \vec{v}_m są zastąpione przez dodatkowy warunek *odgórnie narzucony* na przyśpieszenia: $\vec{a}_0 = \hat{\gamma}_3^{NS''}(0)$ i $\vec{a}_m = \hat{\gamma}_3^{NS''}(\hat{t}_m)$:

$$\hat{\gamma}_3^{NS''}(0) = \hat{\gamma}_3^{NS''}(\hat{t}_m) = \vec{0}.$$

Wewnętrzne prędkości $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{m-1}\}$ mogą być obliczone jak w [24] tj. przez wymuszenie dla $\hat{\gamma}_3^{NS} \in C^2$:

$$\check{\gamma}_{3,i-1}^{NS''}(\hat{t}_i) = \check{\gamma}_{3,i}^{NS''}(\hat{t}_i) \quad \text{i} \quad \check{\gamma}_{3,1}^{NS''}(\hat{t}_0) = \check{\gamma}_{3,m}^{NS''}(\hat{t}_m) = 0, \quad (330)$$

Konstrukcja $\psi_3^{NS} : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ jest analogiczna.

5.2.2 Oszacowanie rzędu zbieżności trajektorii krzywej interpolowanej przedziałowo kubicznym splajnem naturalnym - hipoteza i eksperymenty numeryczne

W tym podrozdziale zbadano numerycznie i opisano asymptotykę dla splajna naturalnego $\hat{\gamma}_3^{NS}$ zbudowanego na danych Q_m (próbkowanego jak w poprzednich rozdziałach mniej lub bardziej równomiernie (patrz Def. 2.14) z wykorzystaniem parametryzacji wykładniczej (30).

Kolejnym wynikiem tej pracy zweryfikowanym eksperymentalnie jest następująca hipoteza:

Hipoteza 5.2. *Niech γ będzie krzywą regularną klasy $C^4([0, T])$ na przestrzeni \mathbb{E}^n próbkowaną mniej lub bardziej równomiernie z Def. 2.14. Załóżmy także, że $\hat{\gamma}_3^{NS} : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ określa splajna naturalnego zbudowanego na Q_m i z wykorzystaniem parametryzacji wykładniczej (30). Istnieje też mapowanie kawałkami klasy C^∞ - $\psi^{NS} : [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$ takie, że na $[0, T]$ jest:*

$$\begin{aligned} & (\hat{\gamma}_3^{NS} \circ \psi)(t) - \gamma(t) = O(\delta_m), \quad \text{dla } \lambda \in [0, 1) \\ \text{lub} \quad & (\hat{\gamma}_3^{NS} \circ \psi)(t) - \gamma(t) = O(\delta_m^2), \quad \text{dla } \lambda = 1. \end{aligned} \tag{331}$$

Sformułowanie twierdzenia oraz jego dowód stanowi rozszerzenie tej pracy doktorskiej. Wyniki numerycznych testów potwierdzają ostrość rzędu zbieżności $\alpha(\lambda) = 1$, dla wszystkich $\lambda \in [0, 1)$. Dodatkowo dla $\lambda = 1$ jest ostry rząd zbieżności $\alpha(1) = 2$. Przypadek $\alpha(1) = 2$ (uzyskany dla danych zredukowanych) jest analogiczny do asymptotyki jaką uzyskano dla splajna naturalnego w przypadku danych niezredukowanych (zobacz np. [24]).

Ponownie, dla $\lambda = 1$ warunek z Def. 2.14 może być zastąpiony przez mniej restrykcyjny, mianowicie (19). Zostało zauważone, że jeśli dwa podprzedziały $[t_0, t_1]$ i $[t_{m-1}, t_m]$ są wyłączone z eksperymentów to dla przypadku $\lambda = 1$ rząd zbieżności rośnie z 2 do 4 dla niektórych typów krzywych i próbkowań (np. w [45]) Aby zweryfikować asymptotykę z (331) (numerycznie lub teoretycznie) potrzebna jest funkcja - reparametryzacja ψ taka, że $\psi_3^{NS} : [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$ będąca także splajnem naturalnym. Funkcja spełnia w węzłach interpolacyjnych następujące warunki $\psi_3^{NS}(t_i) = \hat{t}_i^\lambda$ (dla $i = 0, 1, \dots, m$) i $\ddot{\psi}_3^{NS}(0) = \ddot{\psi}_3^{NS}(T) = 0$, gdzie $\{\hat{t}_i^\lambda\}_{i=0}^m$ są zdefiniowane zgodnie z (30).

W tym rozdziale poddane zostaną numerycznej weryfikacji wyniki dla $\alpha(\lambda)$ i ich ostrość szacowana w Hip. 5.2. Testy zostały przeprowadzone przy wsparciu programu Mathematica 8.0

oraz zasobów obliczeniowych ACK Cyfronet AGH. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach wykorzystano dwa rodzaje próbkowań (23) i (24). Dla danego m , błąd E_m , między γ i splajnem naturalnym $\hat{\gamma}_3^{NS} \circ \psi_3^{NS}$ jest określony zgodnie ze wzorem (60). Współczynnik liniowej regresji $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ (dla $\lambda \in [0, 1]$) jest oszacowany dla $m_{min} = 80 \leq m \leq m_{max} = 141$. Poniższe przykłady pozwalają zweryfikować numerycznie rząd zbieżności trajektorii interpolanta i krzywej.

Przykład 31. Rozważmy krzywą regularną spiralę γ_{sp} z (3). Wyniki numeryczne zawarte w Tab. 37 potwierdzają ostrość (331) dla $\lambda \in \{0, 0; 0, 1; 0, 3; 0, 5; 0, 7; 0, 9; 1, 0\}$ i pokazują granicznie szybsze wartości współczynnika (choć wci z zgodnie z Hip. 5.2) $\alpha(\lambda)$ dla $\lambda \approx 1$.

Tab. 37: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ w 331 dla γ_{sp} danej wzorem (3) i róznych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,0016	1,0028	1,0062	1,0134	1,0514	1,8238	2,0283
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,0047	1,0059	1,0098	1,0176	1,0433	1,5144	2,0251/5,3221*
$\alpha(\lambda)$ w Hip. 5.2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0

* bez pierwszego i ostatniego podprzedziału $[0, t_1]$ i $[t_{m-1}, 1]$.

Kolejny przykład bada helikoidę z trajektori  w \mathbb{E}^3 :

Przykład 32. Niech $\gamma_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie zdefiniowana jak w (11). Wszystkie wsp czynniki $\bar{\alpha}(\lambda)$ (patrz Tab. 38) obliczone numerycznie są ostro zgodne z tymi wyszczególnionymi w (331).

Tab. 38: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Hip. 5.2 dla γ_h z (5) i róznych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,0000	1,0001	1,0003	1,0009	1,0047	1,1721	2,0006
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,0000	1,0001	1,0003	1,0007	1,0028	1,0705	2,0223
$\alpha(\lambda)$ w Hip. 5.2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0

W ostatnim przykładzie testowana jest krzywa kubiczna γ_c .

Przykład 33. Niech γ_c będzie określona zgodnie ze wzorem (10). Tab. 39 zawiera obliczone numerycznie oszacowania $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ dla różnych $\lambda \in [0, 1]$ i próbkowań (23) i (24).

Ponownie, numeryczne wyniki potwierdzają ostrość asymptotyki określonej w (331).

Tab. 39: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Hipotezy 5.2 dla γ_c z (10) i różnych $\lambda \in [0, 1]$.

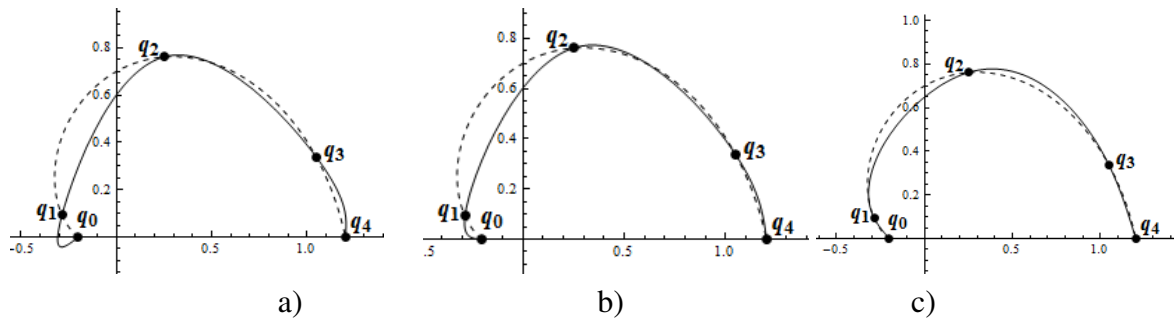
λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	1,0001	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0009	2,0003
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,0006	1,0005	1,0004	1,0003	1,0001	1,0006	2,0003
$\alpha(\lambda)$ w Hip. 5.2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0

Trzy przykłady powyższe pokazują *ostrość* (331) i potwierdzają *lewostronną nieciągłość* $\alpha(\lambda)$ w punkcie $\lambda = 1$, co zostało przewidziane w Hipotezie 5.2.

5.3 Szacowanie długości krzywych przy użyciu interpolacji przedziałowo-kubicznym splajnem naturalnym

W rozdziale poruszony został problem szacowania długości krzywych regularnych γ z pomocą splajna naturalnego $\hat{\gamma}^{NS}$. Rząd zbieżności $\alpha(\lambda)$ przy szacowaniu długości γ z pomocą splajna naturalnego został określony dla krzywych próbkowanych mniej lub bardziej równomiernie. Eksperymenty numeryczne potwierdziły następujące dane: $\alpha(\lambda) = 2$ dla wszystkich $\lambda \in [0, 1)$ i $\alpha(1) = 3$. Na początku zaprezentowany został przykład, który pokazuje jak wartości parametru λ wpływają na długość oszacowanej z pomocą interpolanta $\hat{\gamma}^{NS}$ krzywej spiralnej γ_{sp} .

Przykład 34. Interpolacja danych zredukowanych dla różnych λ z pomocą splajna naturalnego
 Krzywą modelowaną jest spirala z (3)



Rys. 64. Spirala γ_{sp} o długości: $d(\gamma) = 2,45195$ przybliżona przez $\hat{\gamma}_3^{NS}$ z a) $\lambda = 0$, $d(\hat{\gamma}^{NS}) = 2,4581$, b) $\lambda = 0,3$, $d(\hat{\gamma}^{NS}) = 2,3669$ c) $\lambda = 1$, $d(\hat{\gamma}^{NS}) = 2,4242$ dla $m=4$ i $Q_m = \{\gamma_{sp}(0), \gamma_{sp}(0,1), \gamma_{sp}(0,6), \gamma_{sp}(0,9), \gamma_{sp}(1)\}$.

Głównym wynikiem pracy opisanym w tym rozdziale jest następująca hipoteza:

Hipoteza 5.3. Niech γ będzie krzywą regularną $C^4([0, T])$ określoną w \mathbb{E}^n próbkowaną mniej lub bardziej równomiernie. Załóżmy, że $\hat{\gamma}_3^{NS} : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{E}^n$ definiuje splajna naturalnego opisanego na Q_m i parametryzacji wykładniczej (30). Wtedy zachodzi:

$$d(\hat{\gamma}_3^{NS}) - d(\gamma) = O(\delta_m^2), \quad \text{dla } \lambda \in [0, 1) \quad \text{i} \quad d(\hat{\gamma}_3^{NS}) - d(\gamma) = O(\delta_m^3), \quad \text{dla } \lambda = 1. \quad (332)$$

Asymptotyka w przypadku oszacowania długości w porównaniu z oszacowaniem trajektorii jest ostro wolniejsza z zachowaniem lewostronnej nieciągłości dla $\alpha(\lambda)$ w $\lambda = 1$ (patrz [24]).

5.3.1 Testy numeryczne szacowania współczynnika zbieżności $d(\hat{\gamma}^{NS})$ do $d(\gamma)$

Numeryczna asymptotyka z (332) (i jej *ostrość*) określona w Hip. 5.3 została potwierdzona na przykładach. Wszystkie testy tak jak poprzednio zostały przygotowane w programie Mathematica 10.0 lub 12¹⁸ na próbkowaniach (23) i (24) oraz zgodnie ze wzorem (59) dla określonego m i faktem, że: $d(\hat{\gamma}_3^{NS}) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\hat{t}_i}^{\hat{t}_{i+1}} \|\hat{\gamma}_{3,i}^{NS}(\hat{t})\| d\hat{t}$. W zaprezentowanych tu przykładach zostały przeprowadzone testy na krzywych *spirali* γ_{sp} z (9) i *krzywej kubicznej* γ_c z (4) w \mathbb{E}^2 oraz *helikoidy* γ_h z (11) i *helikoidy stożkowej* γ_{ch} z (13) w \mathbb{E}^3 . Testy przeprowadzono dla m z zakresu: $m_{min} = 30 \leq m \leq m_{max} = 70$ i różnych $\lambda \in [0, 1]$.

Przykład 35. W pierwszym przykładzie jest wykorzystana γ_{sp} z (9). Wyniki w Tab. 40 dla próbkowania (23) i (24) osiągają asymptotykę z Hip. 5.3.

Tab. 40: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Hipotezy 5.3 dla γ_{sp} i różnych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	2,179	2,197	2,222	2,249	2,295	2,459	3,057
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,956*	1,948**	1,989*	1,989	1,969	1,999	3,164
$\alpha(\lambda)$ z Hip. 5.3	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	3,0

* dla $m_{min} = 160$ do $m_{max} = 180$, ** dla $m_{min} = 90$ do $m_{max} = 110$.

Przykład 36. Niech krzywa *kubiczna* γ_c będzie zdefiniowana jako (4). Tab. 41 prezentuje numerycznie obliczone oszacowanie $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ dla $\lambda \in [0, 1]$. Testy potwierdzają *ostrość* z (332) dla $\lambda \in \{0; 0, 1; 0, 3; 0, 5; 0, 7; 0, 9; 1\}$

Tab. 41: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z (332) dla γ_c i różnych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	2,027	2,072	2,110	2,135	2,165	2,259	3,132
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,920*	1,968*	1,819**	1,984	1,969	1,979	3,072*
$\alpha(\lambda)$ z Hip. 5.3	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	3,0

* dla $m_{min} = 80$ i $m_{max} = 110$ ** dla $m_{min} = 100$ i $m_{max} = 120$.

Przykład 37. Niech *helikoida* $\gamma_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie zdefiniowana zgodnie z (11). Współczynniki $\bar{\alpha}(\lambda)$ (patrz Tab. 42) obliczone numerycznie są zgodne z rzędem zbieżności dla (23) i (24) określonym w (332).

¹⁸Badania zostały wsparte przez zasoby obliczeniowe ACK Cyfronet AGH.

Tab. 42: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z (332) dla γ_h i różnych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	2,203	2,216	2,236	2,263	2,311	2,480	3,007
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,934*	1,949*	1,961**	1,994	1,978	2,004	3,010
$\alpha(\lambda)$ z Hip. 5.3	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	3,0

* dla $m_{min} = 70$ i $m_{max} = 90$, ** dla $m_{min} = 110$ i $m_{max} = 150$.

Przykład 38. Niech helikoida stożkowa $\gamma_{ch} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie zdefiniowana wzorem (13)

Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ (patrz Tab. 43) obliczony numerycznie zgadza się z tym określonym w (332)

Tab. 43: Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z (332) dla γ_{ch} i różnych $\lambda \in [0, 1]$.

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (23)	2,157	2,178	2,203	2,229	2,275	2,433	3,016
$\bar{\alpha}(\lambda)$ dla (24)	1,979*	1,975*	1,988**	1,990	1,975	1,996	3,031
$\alpha(\lambda)$ z Hip. 5.3	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	3,0

* dla $m_{min} = 100$ i $m_{max} = 150$, ** dla $m_{min} = 120$ i $m_{max} = 180$.

5.3.2 Podsumowanie

Podobnie jak w poprzednim rozdziale o zmodyfikowanym splajnie zupełnym zrealizowano tu następujące punkty:

- sformułowano hipotezę o rzędzie zbieżności trajektorii krzywej interpolowanej i interpolanta - kubicznego splajna naturalnego $\hat{\gamma}^{NS}$,
- przeprowadzono eksperymenty na krzywych dwu- i trzywymiarowych. Potwierdziły one założenia zawarte w Hip. 5.2 oraz pokazały też ostrość oszacowania trajektorii krzywej,
- postawiono hipotezę o rzędzie zbieżności długości interpolanta $\hat{\gamma}^{NS}$ do długości krzywej interpolowanej γ ,
- zweryfikowano numerycznie założenia z Hipotezy 5.3 w eksperymentach przeprowadzonych dla wybranych krzywych i próbkowań.

5.4 Podsumowanie

Dalsze prace, które można podjąć, aby uzupełnić zagadnienia zawarte w tym rozdziale:

- analityczny dowód dla obu twierdzeń dla splajnow zmodyfikowanego zupełnego oraz naturalnego,

- opracowanie warunków wystarczających dla próbkowań, tak by ψ^{MC} i ψ^{NS} były reparametryzacjaami,
- zbadanie w przykładach analitycznych jak brak mniej lub bardziej równomierności wpływa na asymptotykę trajektorii,
- pokazanie przykładów analitycznych potwierdzających odstępstwa od zbieżności w oszacowaniu trajektorii w klasie krzywych nieregularnych,
- zbadanie asymptotyki oszacowania krzywizny przy interpolacji $\hat{\gamma}_3^{MC}$ i $\hat{\gamma}_3^{NS}$.

Warto zauważyć, że konstrukcja splajna klasy C^2 nie opiera się na lokalnej w zadanym przedziale znajomości prędkości czy przyspieszeń ale wymaga znajomości globalnych danych. Jako dane wejściowe mamy prędkości (przyspieszenia) w punktach początkowym t_0 i końcowym t_m i na ich podstawie i z warunków ciągłości szacujemy prędkości (przyspieszenia) wewnętrzne. Obliczenia te wymagają znajomości wektora v_i z góry na całym przedziale $[0, T]$ oraz zależne są od ilości punktów interpolacyjnych, stąd przeprowadzenie eksperymentów dotyczących ostrości, sprawdzenie analitycznie warunku braku mniej lub bardziej równomierności oraz nieregularności wymusza konieczność szukania oszacowań od góry i od dołu m.in dla prędkości tak, żeby można było takie dowody uogólnić niezależnie od przyjętego m . Podobna sytuacja jest z warunkami istnienia reparametryzacji. Zaprezentowanie takich warunków w sytuacji krzywej rozważanej globalnie (znane tylko v w punkcie początkowym i końcowym całego przedziału, a konstrukcja interpolanta wymaga znajomości v_i w konkretnym przedziale) jest niemożliwe korzystając z analogicznego postępowania jak w przypadku interpolacji Lagrange'a i zmodyfikowanej Hermita. Są to zagadnienia i problemy do dalszej pracy, stanowiące jej istotne uzupełnienie.

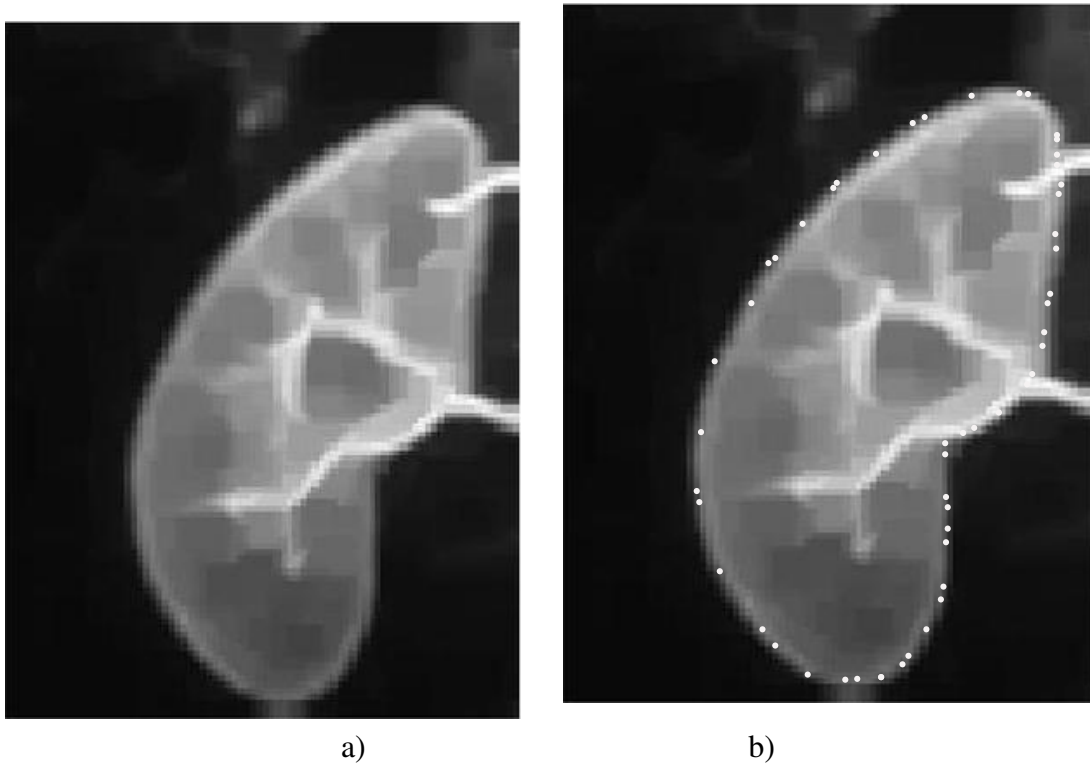
6 Zastosowania danych zredukowanych w modelowaniu krzywych w grafice komputerowej i analizie obrazów USG

Problem interpolacji danych zredukowanych odnajdujemy w rzeczywistych zagadnieniach z dziedziny grafiki komputerowej (przedstawianie trajektorii ruchu, animacje, modelowanie krzywych), wizji komputerowej (segmentacja obrazu, morfizm), medycynie (diagnostyka guzów, epilepsji, schizofrenii), fizyce (modelowanie trajektorii w komorze Wilsona), planowanie trajektorii (robotyka lub planowanie trajektorii dronów). W tym rozdziale zostaną zaprezentowane dwa możliwe zastosowania omawianej tematyki do segmentacji obrazu (analiza nerki) oraz w modelowaniu obrazu do odtworzenia filmu z klatek utworzonych w wyniku oddziaływania źródła światła na wybraną powierzchnię.

6.1 Analiza obrazu medycznego

Poniższy przykład pokazuje jak można wyodrębnić i opisać funkcją obszar na dostępnym rysunku. W tym wypadku mamy zdjęcie USG nerki z otoczeniem. Zadanie polega na wyznaczeniu przybliżonego obwodu nerki oraz jej powierzchni.

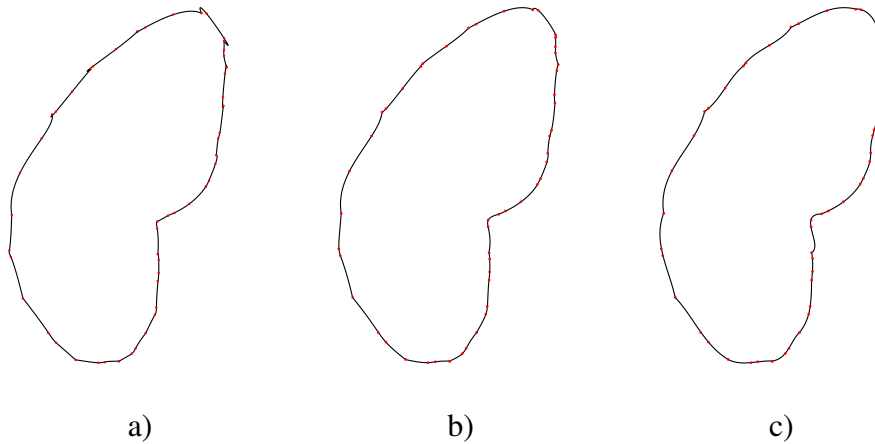
Przykład 39 (Przybliżona analiza nerki). Mając dany obraz USG z widoczną nerką (w rzeczywistym przypadku np. lekarz) możemy zaznaczyć kolejno punkty interpolacyjne, stanowiące nasze dane zredukowane i na ich podstawie wyznaczyć funkcję interpolującą, pozwalającą przybliżyć brzeg nerki. To ostatnie daje możliwość policzenia obwodu i powierzchni nerki. Rysunek 65(a) przedstawia zdjęcie początkowe usg a Rys. 65(b) przedstawia zaznaczone punkty interpolacyjne. Pakiet *Mathematica* podczas zaznaczania punktów dzięki opcji *get coordinate* odczytuje ich współrzędne względem lewego dolnego rogu obrazu. To te współrzędne jako punkty w przestrzeni \mathbb{E}^2 tworzą dane zredukowane Q_m . Dodatkowo, żeby uzyskać krzywą zamkniętą i możliwość wyznaczenia na ostatnim segmencie interpolanta punkt pierwszy zostaje powielony jako punkt ostatni (niemniej $q_i \neq q_{i+1}$ i $m > 4$).



Rys. 65. Nerka a) fragment oryginalnego zdjęcie USG b) zdjęcie z zaznaczonymi punktami interpolacyjnymi, $m = 51$

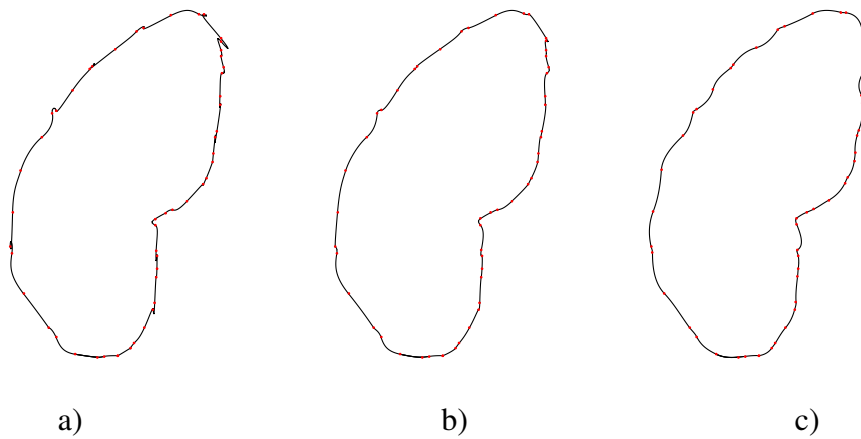
W omawianym przykładzie zostały zaprezentowane zestawienia trzech metod interpolacyjnych Lagrange'a, zmodyfikowanej Hermita oraz z zastosowaniem zmodyfikowanego zupełnego splajna kubicznego. Porównana jest też przydatność do przybliżania brzegu nerki. Parametr λ został wybrany jako $\lambda \in \{0; 0,5; 1\}$. Kształt dopasowanego interpolanta w zależności od typu interpolacji oraz od parametru λ został zaprezentowany na Rys. 66, 67 i 68.

Interpolacja Lagrange'a:



Rys. 66. Kształt interpolantów $\hat{\gamma}_3^L$ dla a) $\lambda = 0$; b) $\lambda = 0,5$; c) $\lambda = 1$, gdy $m = 51$.

Zmodyfikowana interpolacja Hermite'a:



Rys. 67. Kształt interpolantów $\hat{\gamma}_3^H$ dla a) $\lambda = 0$; b) $\lambda = 0,5$; c) $\lambda = 1$, gdy $m = 51$.

Poniżej zaprezentowane zostały rysunki interpolanta Lagrange, zmodyfikowanego Hermite i zmodyfikowanego splajna zupełnego naniesione na obraz nerki dla $\lambda = 0,5$.

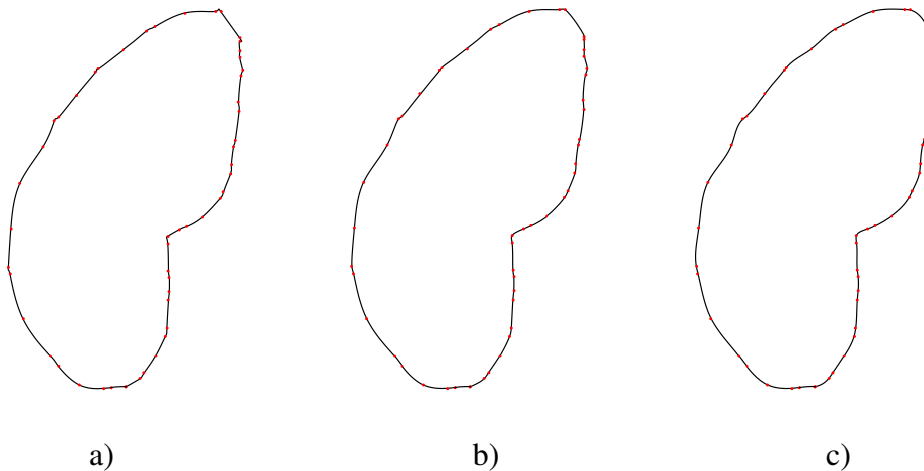
W Tab. 44 zestawiono wyniki obliczeń powierzchni (px^2) obrysu kształtu nerki z pomocą różnych typów interpolantów. Powierzchnia odniesienia została policzona jako suma pikseli na obrazie powyżej progu koloru $\{0.30, 0.30, 0.30\}$ i wynosi $p_{ref} = 52814px^2$

Tab. 44: Powierzchnia nerki dopasowanej interpolantami $\hat{\gamma}_3^L$, $\hat{\gamma}_3^H$ i $\hat{\gamma}_3^{MC}$ dla $\lambda = \{0; 0,5; 1\}$.

Powierzchnia nerki:			
λ	0,0	0,5	1,0
$\hat{\gamma}_3^L$	51662	52748	53138
$\hat{\gamma}_3^H$	52340	52534	53102
$\hat{\gamma}_3^{CS}$	52753	53294	53447

Program do liczenia powierzchni obejmuje liczenie oryginalnej powierzchni nerki bez

Interpolacja zmodyfikowanym splajnem zupełnym:

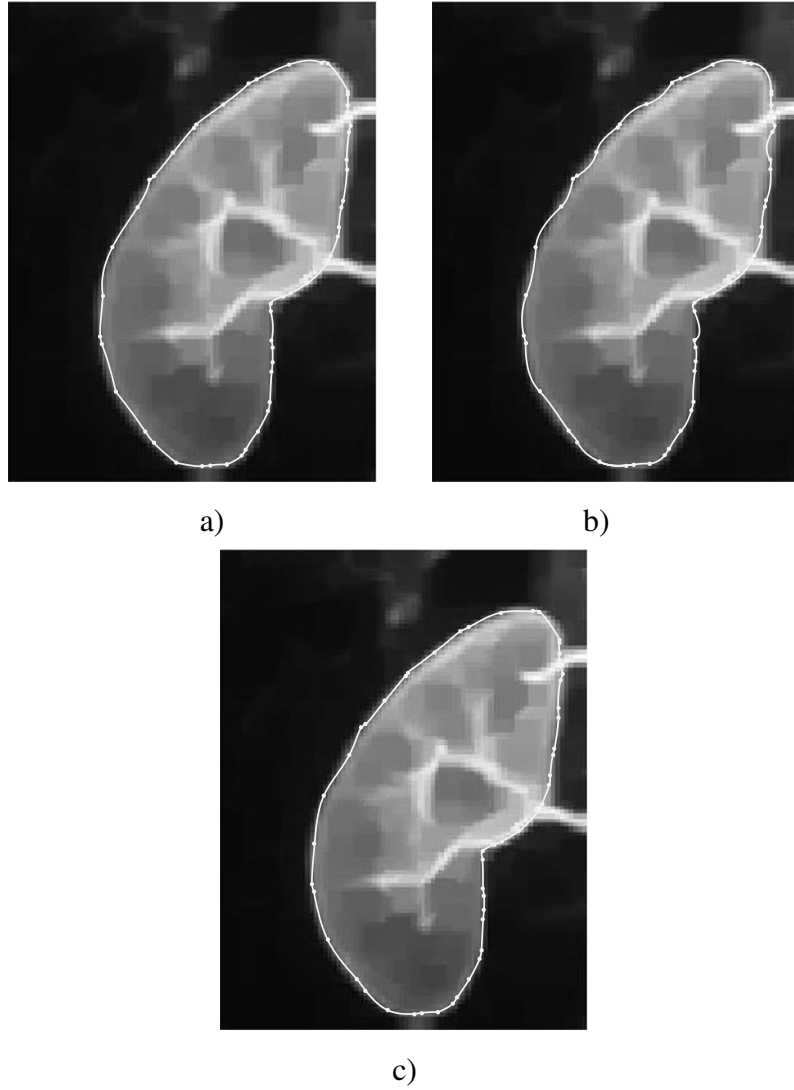


Rys. 68. Kształt brzegu nerki w interpolacji zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym $\hat{\gamma}_3^{CS}$ dla a) $\lambda = 0$; b) $\lambda = 0,5$; c) $\lambda = 1$, gdy $m = 51$.

interpolanta oraz powierzchni nerki ograniczonej interpolantem (liczymy powierzchnię wnętrza nerki bez brzegu)

```
imageData = ImageData[ lpart ];
iD = Dimensions[ imageData ]
liczPiks = 0;
nerkmat = { };
For [ i = 2, i <= iD [[1]] - 1, i = i + 1,
  For [ j = 1, j <= iD [[2]], j = j + 1,
    If [ imageData [[ i ]][[ j ]][[1]] >= 0.30 &&
      imageData [[ i ]][[ j ]][[2]] >= 0.30 &&
      imageData [[ i ]][[ j ]][[3]] >= 0.30,
      AppendTo [ nerkmat , imageData [[ i ]][[ j ]][[ ] ] ];
      liczPiks = liczPiks + 1
    ];
  ];
];
Print [ liczPiks ]
```

W zmiennej liczPiks znajduje się ilość pikseli stanowiących powierzchnię nerki. Poniżej zaprezentowano algorytm liczenia powierzchni wnętrza nerki:



Rys. 69. Kształt nerki obrysowany interpolantem a) $\hat{\gamma}_3^L$ b) $\hat{\gamma}_3^H$ i c) $\hat{\gamma}_3^{MC}$ dla $\lambda = 0,5$; gdy $m = 51$.

dla lam=1;

pikssz=imgB [[23]][[226]]

pikscz=imgB [[23]][[231]]

dla lam=0;

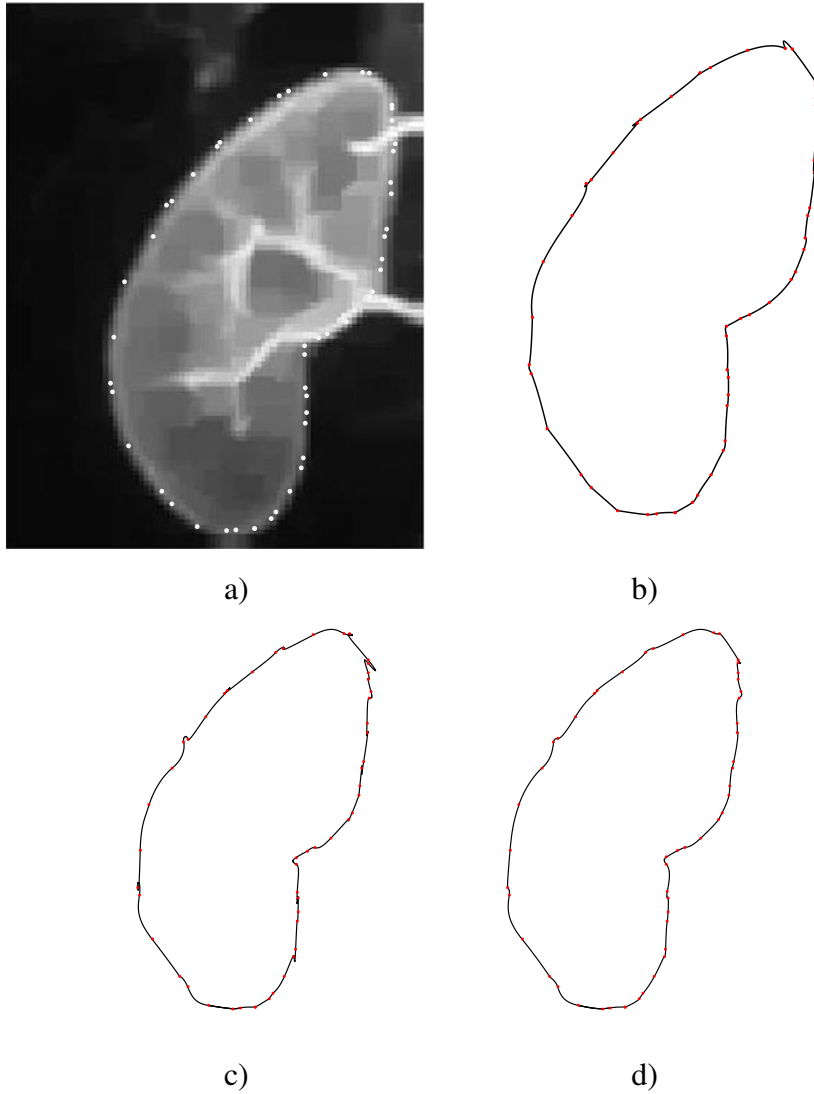
pikssz=imgB [[23]][[228]]

pikscz=imgB [[23]][[231]]

dla lam=0,5;

pikssz=imgB [[23]][[226]]

pikscz=imgB [[23]][[231]]



Rys. 70. Obraz USG nerki a) nierównomiernie naniesione punkty interpolacyjne b) interpolant Lagrange'a, dla $\lambda = 0$ i $m = 51$ c) i d) interpolant Hermita, dla $\lambda = 0$ i $\lambda = 0,5$ oraz $m = 51$

```
ImgB = Show[graphK, graph1K, PlotRange -> Automatic,
  ImageSize -> {327, 427}, Axes -> False]
```

```
imgB = ImageData[ImgB];
listpos = {};
listaczarnych = {};
liczPik = 0;
sumP = 0;
Bsum = 0;
```

```

For [i = 19, i <= Dimensions[imgB][[1]] - 30, i = i + 1,
  AppendTo[listpos , Flatten[Position[imgB[[i]], pikssz]]];
AppendTo[listpos , Flatten[Position[imgB[[i]], pikscz] ]];
listaczarnych = Sort[Flatten[listpos], Less];
Bsum = Bsum + Length[listaczarnych];
For[k = 1, k < Length[listaczarnych], k = k + 1,
  If[(listaczarnych[[k + 1]] - listaczarnych[[k]]) > 1,
    liczPik = listaczarnych[[k + 1]] - listaczarnych[[k]] - 1;
    sumP = sumP + liczPik;
  ];
];
listpos = {};
listaczarnych = {};
];
sumP

```

Miejsca zaznaczenia punktów interpolacyjnych wpływa na wyniki i dokładność dopasowania interpolanta do brzegu. Zaobserwowano bardzo dobre przybliżenie obwodu nerki w przypadku rozkładu próbkowania zbliżonego do równomiernego i widzialne zakrzywienia i pętle w trajektorii dla próbkowania zbliżonego do mniej lub bardziej równomiernego. Niemniej te ostatnie próbkowanie czasem jest konieczne, gdy chcemy nanieść więcej punktów interpolacyjnych w konkretnym miejscu, a mniej w innym.

6.2 Rekonstrukcja filmu

Kolejny przykład prezentuje rekonstrukcję filmu z pomocą interpolacji Lagrange'a i zmodyfikowanym splajnem zupełnym. *Do przykładu zostały załączone na pendrivie trzy filmy: oryginalny ze zredukowanymi klatkami i odtworzone przy pomocy dwóch wspomnianych interpolantów.*

Przykład 40 (Rekonstrukcja filmu). Załóżmy, że poruszające punktowe odległe źródło światła świecące z kierunku oświetlenia $\vec{p}(t) = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\} = \{\sin(t), \cos(t), -1\}$ oświetla

wybraną powierzchnię Lamberta S_u [46] będącą wykresem funkcji $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ tj. $S_u = \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3; z = u(x,y)\}$. Wektor normalny do S_u : $\vec{n} = (u_x(x,y), u_y(x,y), -1)$. Powierzchnia S_u emituje iluminancję (intensywność stałą dla każdego piksla obrazu) odbieraną na kamerze i określaną wzorem (w ustalonym czasie t):

$$I_t^\infty(x,y) = \frac{\langle \vec{p}(t), \vec{n} \rangle}{\|\vec{p}(t)\| \|\vec{n}\|} = \frac{p_1(t)u_x(x,y) + p_2(t)u_y(x,y) + p_3(t)f_u}{\sqrt{p_1(t)^2 + p_2(t)^2 + p_3(t)^2} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + f_u^2}} \quad (333)$$

Dla ustalonego t w klatce filmu piksele mają jasność w punkcie (x,y) równą $I_t^\infty(x,y)$.

W programie Mathematica klatki generuje nam kod:

```
Do[AppendTo[klatki, Table[Table[Table[x, y, t], {x, -kl, kl}], {y, -kl, kl}]],
    {t, 0, 2*Pi, Pi/16}],
```

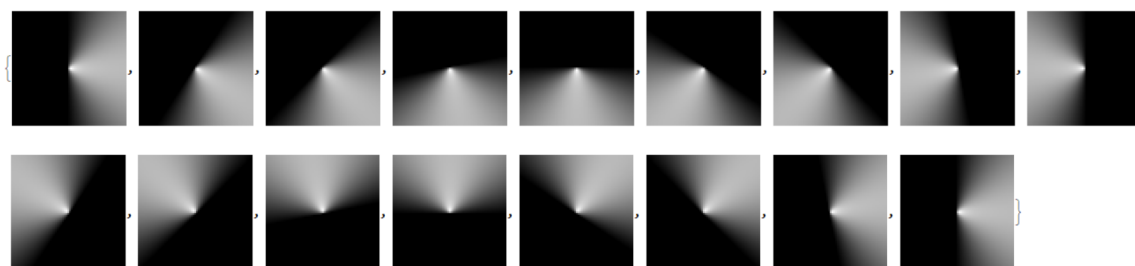
gdzie $kl = 32$. Interpolacyjnymi punktami Q_m są tu wybrane niejednostajnie klatki tego filmu z intensywnością $I_t^\infty(x,y)$. Numery klatek i tworzące nasze dane zredukowane spełniają zależność $i = 4k + 1$ lub $i = 4k$, gdzie $k \in C_+$

Kod źródłowy programu Mathematica generujący dane zredukowane podano niżej:

```
listai = {};
film[i_] := klatki[[i]];
Do[AppendTo[listai,
    If[Mod[i, 4] == 0, i, If[Mod[i, 4] == 1, i, Nothing]]],
    {i, 1, Length[klatki], 1}];
listaq2 = {};
Do[AppendTo[listaq2, film[listai[[i]]]], {i, 1, Length[listai]}]
    {k, 1, Length[listaq2]}]*)
Table[Image[listaq2[[i]], "Byte", ImageSize -> {100, 100}],
    {i, 1, Length[listaq2]}]
```

W przedostatnim wierszu listingu z 33 wygenerowanych klatek wybrano 17 o numerach spełniających wspomnianą wcześniej zależność tj.: $\{1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 33\}$, a w ostatnim wierszu wygenerowano dzięki funkcji *Image* obrazy odpowiadające wybranym klatkom. Poniżej zostały zaprezentowane obrazy tych klatek:

Jak widać z rysunków skokowe zmiany klatek filmu powodują zakłócenia w płynnym odtwarzaniu filmu. Interpolacja pozwoli na umieszczenie pomiędzy zagubionymi klatkami tych klatek, które pozwolą



Rys. 71. Obrazy wybranych klatek z filmu tworzących wejściowe dane zredukowane

na wygładzenie filmu.

Na podstawie danych zredukowanych skonstruowano interpolanta przedziałowo-kubicznego Lagrange'a zgodnie z opisem z Rozdziału 2 oraz kubicznego splajna kompletnego według opisu z Rozdziału 5. W obu przypadkach dane zredukowane Q_m mają wymiar n (liczba pikseli, rozdzielczość obrazu) w związku z tym pewne obliczenia zamiast na wektorach będą przeprowadzane na macierzach.

Konstrukcja interpolanta przedziałowo-kubicznego Lagrange'a Na podstawie danych q_i z $i = 1 \dots m$ odtwarzamy z pomocą parametryzacji wykładniczej (patrz wzór (30)) nasze nieznanne węzły \hat{t} na całym przedziale $[0, 2\pi]$. Wzór wymaga obliczenia w naszym przypadku normy macierzy A czyli pierwiastka z sumy kwadratów wszystkich elementów i podniesienia go do potęgi λ . Na każdym podprzedziale $[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$ bierzemy kolejne czwórki ramek filmu $q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}$ i korzystając ze wzoru na różnice dzielone obliczamy współczynniki Newtona. Poniżej listing kodu obliczającego współczynniki Newtona oraz węzły do budowy interpolanta.

```
TiQMovieFrameLag[qF_, lambda_, Q_] := Module[{k, listaq1 = {},
dlugosciQ = {}, lhatt = {}, listawsp = {}, thatt = {}, wspolczfiN = {}},
dlugosciQ = RozniceQ1Matrix[Q, lambda, qF];
lhatt = Policzhatt1[dlugosciQ, qF];
i = 1;
For[k = 0, k < qF - 1, k = k + 3,
listaq1 = {Q[[k + 1]], Q[[k + 2]], Q[[k + 3]], Q[[k + 4]]};
AppendTo[thatt, {lhatt[[k + 1]], lhatt[[k + 2]], lhatt[[k + 3]], lhatt[[k + 4]]}];
wspolczfiN = wielomianNewtonawspolcz[thatt[[i]], listaq1];
i = i + 1;
AppendTo[listawsp, wspolczfiN];
];
```

```
Return [ { thatt , listawsp , lhatt } ];
];
```

Kolejnym krokiem jest stworzenie interpolantów $\hat{\gamma}_i^L$ na kolejnych przedziałach dziedziny $[\hat{t}_0, \hat{t}_m]$ tj. $\{[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]\}_{i=0}^m$. Program Mathematica realizuje to poprzez stworzenie tabeli wielomianów wraz z przedziałem węzłów \hat{t} i następnie sklejenie ich z pomocą funkcji *Piecewise*:

```
int = Table [ { wielomianNewtona [ współczN [ [ i ] ] , t , tx [ [ i ] ] ] ,
    tx [ [ i ] ] [ [ 1 ] ] <= t < tx [ [ i ] ] [ [ 4 ] ] } , { i , 1 , m } ];
ramka = Expand [ Piecewise [ int ] ];
Film [ x_ ] := ramka /. t -> x;
```

Do odtworzenia początkowego płynnie odtwarzanego filmu potrzebne są wygenerowane obrazy w punktach pośrednich pomiędzy istniejącymi węzłami interpolacyjnymi. Realizuje to poniższy kod, w którym każdy z przedziałów $[\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1}]$, gdzie $k = 1 \dots m - 1$ dzielimy na trzy podprzedziały.

```
punkty = { };
For [ k = 1 , k <= lqx , k = k + 1 ,
punkt = listahatt [ [ k ] ];
AppendTo [ punkty , punkt ];
h = ( listahatt [ [ k + 1 ] ] - listahatt [ [ k ] ] ) / 3;
For [ i = 1 , i < 3 , i = i + 1 ,
punkt = punkt + h;
AppendTo [ punkty , punkt ];
]; ];
```

Ostatnim krokiem jest zwizualizowanie, korzystając ze środowiska *Manipulate*, zrekonstruowanego filmu.

```
Manipulate [
Image [ Film [ punkty [ [ k ] ] ] , "Byte" ] , { k , 1 , Length [ punkty ] , 1 }]
```

Innym podejściem jest wyeksportowanie wygenerowanych klatek do zewnętrznego programu graficznego lub tworzącego film i stworzenie z nich pliku .gif. Kod realizacji tego punktu zaprezentowano poniżej:

```
SetDirectory [ ]
```



```

For[k = 1, k <= Length[punkty], k = k + 1,
  Export["ima" <> ToString[k] <> ".jpg",
    Image[Film[punkty[[k]]], "Byte"]
  ];

```

Interpolacja zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym do rekonstrukcji filmu

Algorytm realizujący odtworzenia płynności filmu przebiega analogicznie. Jedyne różnice wynikają z konstrukcji zmodyfikowanego kubicznego splajna kompletnego, a mianowicie splajn ten budowany jest na przedziałach $\{\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}\}_{i=0}^{m-1}$, wymaga wyznaczenia prędkości wewnętrznych v_i na każdym z podprzedziałów dla $i = 1, \dots, m - 2$. Poniżej przedstawiono podstawowe funkcje realizujące kolejne kroki algorytmu:

```

AlgorytmSplajny[m_, lambda_, Q_, listahatt_] :=
  Module[{listaq = {}, pochfi = {}, pochfiost = {}, wek1fi = {},
    wek2fi = {}, wek3fi = {}, bfi = {}, s, sfi, sifi, sx,
    pochdosi = {}, },
    wek1fi = siComplete[listahatt, m][[1]];
    wek2fi = siComplete[listahatt, m][[2]];
    wek3fi = siComplete[listahatt, m][[3]];
    pochdosi = TiQMovieFrameLag[m, lambda, Q];
    pochfi = pochdosi[[1]];
    pochfiost = pochdosi[[2]];
    bfi = bComplete[listahatt, Q, pochfi, pochfiost, m];
    sfi = Table[
      If[i == j, wek2fi[[i]],
        If[i - j == -1, wek3fi[[i]],
          If[i - j == 1, wek1fi[[i], 0]], {i, m - 1}, {j, m - 1}];
      sifi = Inverse[sfi].bfi;
    PrependTo[sifi, pochfi];
    AppendTo[sifi, pochfiost];
    Return[{sifi}];
  ];

```

```

siComplete[listat_ , m_] :=
  Module[{wektor1 = {0}, wektor2 = {2*(listat[[3]] - listat[[1]])},
    wektor3 = {listat[[2]] - listat[[1]]}, i},
  For[i = 3, i <= m - 1, i = i + 1,
    AppendTo[wektor1, listat[[i + 1]] - listat[[i]]];
    AppendTo[wektor2, 2*(listat[[i + 1]] - listat[[i - 1]])];
    AppendTo[wektor3, listat[[i]] - listat[[i - 1]]];
  ];
  AppendTo[wektor1, listat[[m + 1]] - listat[[m]]];
  AppendTo[wektor2, 2*(listat[[m + 1]] - listat[[m - 1]])];
  AppendTo[wektor3, 0];

  Return[{wektor1, wektor2, wektor3}];
];

```

```

bComplete[listat_ , listaq_ , poch_ , pochost_ , m_] :=
  Module[{listab = {}},
  AppendTo[listab ,
    3*((listat[[3]] -
      listat[[
        2]])*((listaq[[2]] - listaq[[1]])/(listat[[2]] -
          listat[[1]])) + (listat[[2]] -
      listat[[
        1]])*((listaq[[3]] - listaq[[2]])/(listat[[3]] -
          listat[[2]]))) - poch*(listat[[3]] - listat[[2]])];
  For[i = 3, i <= m - 1, i = i + 1,
    AppendTo[listab ,
      3*((listat[[i + 1]] -
        listat[[
          i]])*((listaq[[i]] - listaq[[i - 1]])/(listat[[i]] -
          listat[[i - 1]])) + (listat[[i]] -
        listat[[

```

```

        i - 1]))*(( listaq [[ i + 1]] -
        listaq [[ i ]])/( listat [[ i + 1]] - listat [[ i ]]))));
];
AppendTo[ listab ,
3*(( listat [[m + 1]] -
listat [[
m]])*(( listaq [[m]] - listaq [[m - 1]])/( listat [[m]] -
listat [[m - 1]])) + (listat [[m]] -
listat [[
m - 1]])*(( listaq [[m + 1]] -
listaq [[m]])/( listat [[m + 1]] - listat [[m]])) -
pochost*(listat [[m]] - listat [[m - 1]])];

Return[ listab ];
];

```

Odtworzone klatki tak jak w poprzednim przypadku pozwalają na wygładzenie obserwowanego filmu, wyraźnie brakuje niepożądanych skoków, widocznych w przypadku klatek zredukowanych. Pliki imaLag oraz imaSpline oraz imaZred zostały umieszczone pod linkiem na pozycji [49] w bibliografii. Stworzone zostały dwa rodzaje plików: .gif w programie ImageMagick i .mp4 w programie ffmpeg, ten ostatni jako film złożony z kolejnych klatek. Widać zwłaszcza na plikach .gif, że skoki są wyraźniejsze dla interpolacji Lagrange’a niż dla splajnów.

6.3 Podsumowanie

W tym rozdziale zostały zaprezentowane dwa przykłady zastosowania omawianych zagadnień w rzeczywistych problemach. W pierwszym przykładzie na obrazie nerki zaznaczone punkty interpolacyjne pozwoliły wyznaczyć jej brzeg dzięki skonstruowanym interpolantom oraz na podstawie znajomości funkcji brzegu wyznaczyć przybliżoną powierzchnię nerki. Wartości te wyrażone w pikselach mogą zostać przekształcone, znając rozdzielczość generowanego obrazu, na rzeczywiste wymiary badanego obiektu. Widoczne jest wygładzenie brzegów nerki dla wyższej klasy interpolantów tj. splajnów oraz przy zastosowaniu parametryzacji długością

cięciwy z parametrem λ .

W drugim przykładzie omawiany problem polegał na braku płynności w odtwarzaniu filmu, spowodowanym usunięciem niektórych jego klatek. Podobne działania podejmuje się, gdy potrzebujemy skompresować film, tak by zajmował np. mniej miejsca na dysku. Interpolacja na podstawie znanych nam klatek pozwoliła wygenerować pośrednie klatki oraz zapewnić rekonstrukcję filmu przedstawiającego ruch źródła światła na powierzchni Lamberta. Innym podejściem do opisanego problemu mogłoby być po wygenerowaniu wybranych klatek filmu przejście na położenie źródła światła. Wtedy jako dane zredukowane rozważalibyśmy współrzędne położenia źródła światła w danej chwili czasowej. Interpolacja pozwoliła by wtedy odtworzyć jego przybliżoną trajektorię, podobny eksperyment został przeprowadzony w pracy [16].

7 Podsumowanie i dalsze perspektywy badań

W przedłożonej pracy doktorskiej opisano zagadnienie interpolacji danych zredukowanych z wykorzystaniem kawałkami sklejanymi wielomianów trzeciego stopnia oraz parametryzacji wykładniczej. Na ok. 190 stronach pracy zostały zrealizowane założone cele badawcze. Poniżej znajduje się podsumowanie zrealizowanych zadań.

W Rozdziale 2:

- wprowadzone są podstawowe definicje dotyczące interpolacji nieparametrycznej (tj. tej opartej na danych zredukowanych Q_m),
- omówione są różnice pomiędzy klasyczną interpolacją parametryczną a nieparametryczną,
- wprowadzone są definicje pojęć użytych w założeniach i tezach twierdzeń tj. definicja próbkowania dopuszczalnego, próbkowania mniej lub bardziej równomiernego, parametryzacji wykładniczej, rzędu zbieżności i ostrości oszacowania, regularności krzywej i reparametryzacji,
- zdefiniowane są krzywe i próbkowania, na których wygenerowane są dane zredukowane biorące udział w eksperymentach numerycznych,
- zdefiniowane są, użyte dalej, podstawowe wzory na schematy interpolacyjne,
- przypomniane są niezbędne definicje i twierdzenia z zakresu analizy matematycznej, użyte w dalszej części dysertacji w dowodach analitycznych zaproponowanych twierdzeń.

Kolejne rozdziały od 3 do 5 opisują schematy interpolacyjne oparte na funkcjach przedziałowo-sklejanych stopnia trzeciego oraz coraz wyższej klasy gładkości w miejscu połączeń tj. funkcji kawałkami sklejanymi wielomianowej trzeciego stopnia Lagrange'a $\check{\gamma}^L$, zmodyfikowanym kawałkami sklejanym wielomianie Hermita trzeciego stopnia $\check{\gamma}^H$ oraz splajnach klasy C^2 - zmodyfikowanym kubicznym zupełnym $\check{\gamma}^{MC}$ oraz naturalnym $\check{\gamma}^{NS}$ w połączeniu z parametryzacją wykładniczą.

W Rozdziale 3:

- opisano i udowodniono twierdzenie Tw. 3.4 dotyczące oszacowania rzędu zbieżności trajektorii interpolanta $\hat{\gamma}^L$ do krzywej γ w połączeniu z parametryzacją wykładniczą i parametrem $\lambda \in [0, 1]$,
- oprócz dowodu analitycznego przeprowadzono dla Tw. 3.4 eksperymenty numeryczne dla dwu- i trzywymiarowych krzywych oraz wybranych próbkowań z rodziny próbkowań mniej lub bardziej równomiernych,
- podano przykłady krzywych i próbkowań potwierdzające ostrość oszacowań podanych w Tw. 3.4 dla: $\lambda \in [0, 1)$, $\lambda = 1$ oraz próbkowania równomiernego,
- potwierdzono konieczność spełnienia przez próbkowanie warunku mniej lub bardziej równomierności by Tw. 3.4 było prawdziwe,
- przeprowadzono eksperymenty, w których wykazano, że regularność krzywej γ jest również niezbędna by Tw. 3.4 było prawdziwe,
- określono warunki wystarczające, narzucone na próbkowania, aby funkcja ψ była reparametryzacją (patrz Tw. 3.9 i Tw. 3.10). Twierdzenia zostały udowodnione. Warunki opisano wzorami asymptotycznymi i zwizualizowano na płaszczyźnie i w przestrzeni,
- przeprowadzono eksperymenty na wybranych przykładowych próbkowaniach dotyczące spełniania powyższych warunków.

W Rozdziale 4 opisano zmodyfikowaną interpolację przedziałowo kubiczną Hermita.

Główne wyniki tego rozdziału można podsumować w następujących punktach:

- podano i udowodniono Tw. 4.2 o rzędzie zbieżności i jego ostrości dla przedziałowo-kubicznej zmodyfikowanej interpolacji Hermita $\hat{\gamma}^H$ w kombinacji z parametryzacją wykładniczą oraz dla próbkowania mniej lub bardziej równomiernego i równomiernego,
- wykazano teoretycznie i eksperymentalnie konieczność stosowania próbkowania mniej lub bardziej równomiernego aby zachować asymptotykę zbieżności interpolacji

w Tw.4.2. W przypadku regularności załączony przykład analityczny i testy numeryczne potwierdzają konieczność jej uwzględnienia w obliczeniach,

- zaprezentowano przykłady krzywych i próbkowań, potwierdzające zbieżność założoną w Tw. 4.2,
- przedstawiono i udowodniono Tw. 4.5 dotyczące warunków wystarczających na istnienie reparametryzacji $\psi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$, niezbędnej w szacowaniu długości krzywych oraz przekształcono warunki do postaci umożliwiającej wizualizację 3D,
- zwizualizowano te warunki geometrycznie i sprawdzono ich spełnienie dla przykładowych próbkowań przytoczonych w tej pracy.

W Rozdziale 5 opisano teoretyczne podstawy oraz konstrukcję zmodyfikowanego kubicznego splajna zupełnego oraz kubicznego splajna naturalnego. W kolejnych podrozdziałach poruszono podobne problemy, jak w rozdziałach 3 i 4. Z powodów narzuconych warunków globalnych w konstrukcji obu typów splajnów, napotkane trudności oszacowania macierzy prędkości, ograniczyły podjęte działania do eksperymentów, które potwierdziły postawione hipotezy oraz odpowiedziały na analogiczne pytania jak te z poprzednich rozdziałów (regularność, mniej lub bardziej równomierność). Punkty które zostały zrealizowane:

- sformułowano i udowodniono Tw. 5.1 o rzędzie zbieżności $\hat{\gamma}^{MC}$ (zmodyfikowanego splajna zupełnego), w oparciu o parametryzację wykładniczą, do krzywej interpolowanej γ ,
- przeprowadzono eksperymenty na dwu- i trzywymiarowych krzywych. Potwierdziły one założenia zawarte w Tw. 5.1 odnośnie zbieżności interpolanta do krzywej oraz wykazały numerycznie ostrość oszacowania trajektorii krzywej γ przez $\hat{\gamma}^{MC}$,
- postawiono Hipotezę 5.1 o rzędzie zbieżności długości interpolanta $\hat{\gamma}^{MC}$ do γ oraz zweryfikowano ją testami numerycznymi,
- postawiono Hipotezę o rzędzie zbieżności kubicznego splajna naturalnego $\hat{\gamma}^{NS}$ do γ

oraz hipotezę o rzędzie zbieżności długości interpolanta $\hat{\gamma}^{NS}$ do długości krzywej interpolowanej,

- potwierdzono eksperymentalnie hipotezę odnośnie rzędu zbieżności długości interpolanta $\hat{\gamma}^{NS}$ w testach przeprowadzonych dla wybranych krzywych i próbkowań,
- przeprowadzono testy numeryczne potwierdzające odstępstwa od zbieżności w oszacowaniu trajektorii w klasie krzywych nieregularnych oraz w przypadku braku spełnienia założenia o mniej lub bardziej równomierności próbkowania.

Rozdział 6 prezentuje możliwe zastosowania interpolacji danych zredukowanych w analizie obrazu medycznego oraz w rekonstrukcji filmu na podstawie tylko niektórych istniejących klatek.

Wnioski wynikające z przeprowadzonych badań potwierdzają, że interpolacja nieparametryczna w połączeniu z parametryzacją wykładniczą daje dobre możliwości szacowania trajektorii nieznanymi krzywych zadanych tylko w postaci danych zredukowanych. Szacowanie rzędu zbieżności interpolanta do krzywej opierać się musi o założenia narzucone na próbkowania i krzywe, wtedy wyniki postawionych twierdzeń są analogiczne jak w klasycznej interpolacji parametrycznej. Zaobserwowano też znaną z innych prac dotyczących interpolacji nieparametrycznej (np. kwadratowa interpolacja Lagrange'a) nieciągłość współczynnika zbieżności $\alpha(\lambda)$, który dla $\lambda \in [0, 1)$ wynosi 1 a dla $\lambda = 1$ wynosi 4 (w przypadku kubicznej interpolacji), przy czym skok następuje dla $\lambda = 1$. Numerycznie została pokazana ostrość oszacowań z twierdzeń, ale istnieją próbkowania i krzywe, dla których rząd zbieżności jest szybszy. Warto zwrócić uwagę też na fakt, iż parametr λ daje nam dodatkową możliwość manipulacji, bo mamy rodzinę krzywych interpolujących przy zadanym schemacie i wtedy możemy wybrać taką λ by był spełniony dodatkowy warunek (np. możemy dopasować kształt interpolanta do naszych założeń przy planowaniu trajektorii) z zachowaniem zbieżności, niższej, bo stopnia 1 ale dalej zbieżności. Tymczasem stosowanie np. parametryzacji długością cięciwy czyli ze stałym parametrem $\lambda = 1$ pozwala uzyskać szybszy rząd zbieżności ale interpolant na bazie Q_m jest już wyznaczony jednoznacznie i nie ma możliwości manewrowania.

Pracę doktorską zamyka Bibliografia oraz Spisy tabel, rysunków i skorowidz nazw.

Opisane zagadnienia w niniejszej dysertacji zostały opublikowane w 10 publikacjach, z których 4 to artykuły naukowe w czasopismach [3], [4], [5], [6] i 6 publikacji w materiałach pokonferencyjnych o zasięgu międzynarodowym [7], [8], [9], [10], [11] oraz [12]. Tematyka i wyniki poszczególnych rozdziałów zostały zaprezentowane także na konferencjach: CISIM'15, ICNAAM'15 i 16, ACA'17, ACA'18, MMA'19, ICCS'20, ACA'23, ESM'23 oraz MMA'24.

Dalsze prace, które można podjąć, aby uzupełnić zagadnienia zawarte w pracy:

- Dla interpolacji Lagrange'a:
 - przeprowadzić dowód analityczny Tw. 3.9 dla przypadku krzywej nieregularnej,
 - w testach numerycznych oraz przykładach analitycznych rozwiązać różne stopnie nieregularności krzywej,
 - postawić tezę i przedstawić założenia dla oszacowania krzywizny krzywej dla przypadku danych zredukowanych,
 - wyprowadzić inne warunki wystarczające istnienia reparametryzacji np. rozpatrując położenie miejsc zerowych funkcji kwadratowej ψ ,
 - zweryfikować testami numerycznymi przydatność różnych rodzin próbkowań w oszacowaniu długości nieznanymi krzywymi.

- Dla interpolacji Hermita:
 - przeprowadzić dowód analityczny Tw. 3.10 dla przypadku krzywej nieregularnej oraz zbadać wpływ stopnia nieregularności na asymptotykę krzywej,
 - postawić tezę i przedstawić założenia dla oszacowania krzywizny krzywej interpolowanej zmodyfikowanym kubicznym interpolantem Hermita,
 - wyprowadzić inne warunki wystarczające istnienia reparametryzacji np. rozpatrując położenie miejsc zerowych funkcji ψ ,
 - zweryfikować testami numerycznymi przydatność różnych rodzin próbkowań w oszacowaniu długości nieznanymi krzywymi.

- Rozdział 5 można uzupełnić o:
 - analityczny dowód dla obu twierdzeń dla splajnów zmodyfikowanego zupełnego oraz naturalnego,
 - opracowanie warunków wystarczających dla próbkowań, tak by ψ^{MC} i ψ^{NS} były reparametryzacjami,
 - zbadanie w przykładach analitycznych jak brak mniej lub bardziej równomierności wpływa na asymptotykę trajektorii,
 - pokazanie przykładów analitycznych potwierdzających odstępstwa od zbieżności w oszacowaniu trajektorii w klasie krzywych nieregularnych,
 - zbadanie i weryfikacja hipotezy dotyczącej asymptotyki krzywizny przy interpolacji $\check{\gamma}_3^{MC}$ i $\check{\gamma}_3^{NS}$.
- wprowadzenie innych schematów interpolacji dla $\hat{\gamma}$ lub ψ (lub ϕ) budowanych na Q_m w połączeniu z parametryzacją wykładniczą (30) lub inną parametryzacją $\hat{\mathcal{T}}$ zastępującą nieznane węzły \mathcal{T} (zobacz np. w [13], [34] lub [14]),
- ciekawym zagadnieniem z zastosowań, które mogłyby być kontynuacją tej pracy jest tematyka śledzenia i planowania trajektorii ruchu np. dronów, samolotów, robotów według odgórnie przyjętych kryteriów i z wykorzystaniem funkcji ψ , która nie byłaby reparametryzacją. Obecnie do śledzenia trajektorii i w segmentacji obrazu wykorzystywane są m. in. sieci neuronowe oraz techniki maszynowe wspomagane sieciami neuronowymi (patrz [47] oraz [48]).

Bibliografia

- [1] R. Kozera, *Curve modelling via interpolation based on multidimensional reduced data*, *Studia Informatica* 25, 4B(61), str. 1-140. Praca habilitacyjna, 2004.
- [2] J. i M. Jankowscy, *Przegląd Metod i Algorytmów Numerycznych cz.1*. WNiT, str. 55-56, 1981
- [3] R. Kozera, L. Noakes, M. Wilkołazka, *Convergence order in trajectory estimation by piecewise cubics and exponential parameterization*. *Mathematical Modeling and Analysis* 24 (1), str. 72–94, 2019, <https://doi.org/10.3846/mma.2019.006>.
- [4] R. Kozera, L. Noakes, M. Wilkołazka, *Exponential parameterization to fit reduced data*. *Applied Mathematics and Computation* 391, 125645, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125645>.
- [5] R. Kozera, M. Wilkołazka, *A modified Hermite interpolation with exponential parameterization*. *Mathematics in Computer Science* 13 (1–2) , str. 143–155, 2019, doi:10.1007/s11786-018-0362-4.
- [6] R. Kozera, M. Wilkołazka, *A note on modified Hermite interpolation*. *Mathematics in Computer Science* 14, str. 223–239, 2020, doi:10.1007/s11786-019-00434-3.
- [7] R. Kozera, L. Noakes, M. Wilkołazka, *Parameterizations and Lagrange cubics for fitting multidimensional data*. *ICCS 2020, Lecture Notes in Computer Science* 12138, str. 124-140, Springer, 2020, https://doi.org/10.1007/978-3-030-50417-5_10
- [8] R. Kozera, M. Wilkołazka, A. Smoktunowicz, *Trajectory estimation with modified complete spline and exponential parameterization..* *Modelling and Simulation'2023*, str. 60-64, The 2023 European Simulation and Modelling Conference, EUROSIS-ETI, 2023, ISBN 978-9-492859-28-0
- [9] R. Kozera, L. Noakes, M. Wilkołazka, *A modified complete spline interpolation and exponential parameterization*. *Proceedings of Computer Information Systems and*

Industrial Management, Lecture Notes in Computer Science 9339, str. 98-110. Springer, 2015.

- [10] R. Kozera, L. Noakes, M. Wilkołazka, *Complete spline interpolation and exponential parameterization for length estimation of curves*. Proceedings of American Institute of Physics 1863, str. 40008-1-40008-4. AIP Publishing, 2017.
- [11] R. Kozera, L. Noakes, M. Wilkołazka, *A natural spline interpolation and exponential parameterization*. Proceedings of American Institute of Physics 1738, str. 180003-1-183003-4, AIP Publishing, 2016.
- [12] R. Kozera, M. Wilkołazka, *A natural spline interpolation and exponential parameterization for length estimation of curves*. Proceedings of American Institute of Physics 1863, str. 400010-1-400010-4. AIP Publishing, 2017.
- [13] M. P. Epstein, *On the influence of parameterization in parametric interpolation*. SIAM Journal of Numerical Analysis 13, str. 261-268, 1976.
- [14] E. B. Kuznetsov, A. Y. Yakimovich, *The best parameterization for parametric interpolation*. Journal of Applied Mathematics 191, str. 239-245, 2006.
- [15] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, San Diego, 1993.
- [16] M. Janik, R. Kozera, P. Koziół, *Reduced data for curve modeling - applications in graphics, computer vision and physics*. Advances in Science and Technology 7, 18, str. 35-38, 2013.
- [17] R. Kozera, L. Noakes, *C^1 interpolation with cumulative chord cubics*. Fundamenta Informaticae 61, 3-4, str. 285-301, 2004.
- [18] B.I. Kvasov, *Methods of Shape-Preserving Spline Approximation*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 2000.
- [19] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book*, Springer, 1997.

- [20] A. Rababah, *High order approximation methods for curves*. Computer Aided Geometric Design 12, str. 89-102, 1995.
- [21] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, 5th. ed., 2003.
- [22] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods in Scientific Computing*. Cz. I - (4), SIAM, Filadelfia, 2008.
- [23] E. Dudek-Dyduch, J. Wąs, L. Dudkiewicz, *Metody Numeryczne. Wybrane Zagadnienia*. Wydawnictwo AGH, Kraków, 2011.
- [24] C. de Boor, *A Practical Guide to Spline*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1985.
- [25] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody Numeryczne*. WNiT, Warszawa, 1993.
- [26] A. F. Rasmussen, *Some Problems in Computational Geometry Related to Intrinsic Properties of Curves And Surfaces*. Praca doktorska, 2007, Oslo.
- [27] M. S. Floater, *Chordal cubic spline interpolation is fourth order accurate*. IMA Journal of Numerical Analysis 26, str. 25–33, 2006, <https://doi.org/10.1093/imanum/dri022>.
- [28] G. M. Fichtenholz, *Rachunek Różniczkowy i Całkowy*. T. 1, str. 148-149 i 196, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002, ISBN 83-01-02175-6.
- [29] W. Klingenberg, *A Course in Differential Geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1978.
- [30] R. Kozera, L. Noakes, *Piecewise-quadratics and exponential parameterization for reduced data*. Applied Mathematics and Computation 221, str. 620-638, 2013.
- [31] E.T.Y Lee, *Choosing nodes in parametric curve interpolation*. Computer-Aided Design 21(6), str. 363-370, 1989.
- [32] J. Szumbariski, *Wykład 6. Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajny)*, Politechnika Warszawska, prezentacja online.

- [33] L. Noakes, R. Kozera, *Cumulative chords piecewise-quadratics and piecewise-cubics*. Geometric Properties from Incomplete Data, Computational Imaging and Vision, Kluwer Academic Publisher 31, str. 59-75, 2006.
- [34] R. Kozera, L. Noakes, *Piecewise-quadratics and reparameterizations for interpolating reduced data*. Proceedings of Computer Algebra in Scientific Computing, Lecture Notes in Computer Science 9301, str. 260-274, Springer, 2015.
- [35] R. Kozera, *Piecewise-quartics and exponential parameterization for interpolating reduced data*. Proceedings of American Institute of Physics 1738, 180018, 2016, doi: 10.1063/1.4951965
- [36] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [37] B. Guenter, R. Parent, *Motion control: computing the arc length of parametric curves*. IEEE Computer Graphics and Applications 5, str. 72-78, 1990.
- [38] P. A. P. Moran, *Measuring the length of a curve*. Biometrika 53(3/4), str. 359–364, 1966, <https://doi.org/10.2307/2333642>.
- [39] M. Floater, *Arc length estimation and the convergence of polynomial curve interpolation*. BIT Numerical Mathematics 45, str. 679-694, 2005, doi: 10.1007/s10543-005-0031-2.
- [40] S. Vincent, D. Forsey, *Fast and accurate parametric curve length computation*. Journal of Graphics Tools 6(4), str. 29-40, 2001, doi: 10.1080/10867651.2001.10487548.
- [41] M. S. Floater, A. F. Rasmussen, *Point-based methods for estimating the length of a parametric curve*. Journal of Computational and Applied Mathematics 196, Issue 2, str. 512-522, 2006, ISSN 0377-0427, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.10.001>.
- [42] R. Kozera, L. Noakes, *Piecewise-quadratics and ε -uniformly sampled reduced data*. Applied Mathematics and Information Sciences 10, 1, str. 33-48, 2016.
- [43] R. Kozera, L. Noakes, R. Klette, *External versus internal parameterizations for lengths of curves with nonuniform samplings*. Theoretical Foundations of Computer Vision,

Geometry and Computational Imaging, vol. 2616, Lecture Notes in Computer Science Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, str. 403–418, 2003.

- [44] L. Noakes, R. Kozera, *Cumulative chords and piecewise-quadratics*. Proceedings of International Conference on Computer Vision and Graphics, ICCVG 2002, Zakopane, 2002.
- [45] K. Atkinson, *On the order of convergence of natural cubic spline interpolation*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 5(1), str. 89–101, 1968.
- [46] R. Klette, R. Kozera, K. Schlüns, *Reflectance-Based Shape Recovery*. Handbook of Computer Vision and Applications, Volume 2: Signal Processing and Pattern Recognition, str. 531-587, Academic Press, 1999.
- [47] W. Westwańska, J. Respondek, *Machine learning in object recognition and segmentation by certain class neural networks*. 20th International Conference on Computational Science and its Applications (ICCSA), Cagliari, Italy, 2020, str. 67-73, doi: 10.1109/ICCSA50381.2020.00022.
- [48] J. Rodziewicz-Bielewicz, M. Korzeń, *Vision-based mobile robots control along a given trajectory*. Artificial Intelligence and Soft Computing, ICAISC 2023. Lecture Notes in Computer Science, vol 14126, Springer, 2023, https://doi.org/10.1007/978-3-031-42508-0_7
- [49] Link do wybranych programów w Mathematicie oraz wyjściowego i odtworzonego filmu. <http://surl.li/nrixj>

Spis rysunków

1	Efekt Rungego i interpolacja funkcjami sklejanymi	14
2	Interpolacja parametryczna versus nieparametryczna	18
3	Wykres spirali γ_{sp} na płaszczyźnie.	19
4	Wykres krzywej kubicznej γ_c na płaszczyźnie.	19
5	Wykres helikoidy γ_h w 3D.	20
6	Wykres helikoidy eliptycznej γ_{qh} w przestrzeni trzywymiarowej.	20
7	Wykres helikoidy stożkowej γ_{ch} w przestrzeni 3D.	21
8	Krzywa Steinmetza γ_{st} w przestrzeni 3D.	21
9	Cardioida γ_{cd} w przestrzeni 2D.	22
10	Asteroida γ_{as} w przestrzeni 2D.	22
11	Krzywa nieregularna γ_{nr1} w przestrzeni 2D.	23
12	Krzywa nieregularna γ_{nr2} w przestrzeni 2D.	23
13	Rozkład $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania (23) na krzywej spiralnej	25
14	Rozkład punktów $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania (24) na krzywej spiralnej.	26
15	Rozkład punktów $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania mniej lub bardziej równomiernego (25) na krzywej spiralnej.	26
16	Rozkład $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania mniej lub bardziej równomiernego (26) na krzywej spiralnej.	27
17	Rozkład punktów $q_i = \gamma(t_i)$ dla próbkowania równomiernego na krzywej spiralnej.	27
18	Rozkłady węzłów interpolacyjnych a kształt interpolanta.	28
19	Konstrukcja interpolanta kawałkami sklejanego $\hat{\gamma}_{3,i}^L$	42
20	Wykres współczynnika $\rho(\lambda)$ pokazującego ostry rząd zbieżności	57
21	Krzywa regresji dla przypadku próbkowania nie mniej lub bardziej równomiernego	67
22	Krzywa regresji krzywej nieregularnej i próbkowania z punktem osobliwym	69
23	Krzywa regresji krzywej nieregularnej i próbkowania z punktem osobliwym	70

24	Wykresy spirali próbkowanej mniej lub bardziej równomiernie oraz regresji liniowej z wartością współczynnika α	71
25	Helikoida γ_h interpolowana kawałkami kubicznym wielomianem Lagrange'a .	72
26	Krzywa kubiczna próbkowana mniej lub bardziej równomiernie i dopasowana interpolacyjnym kawałkami kubicznym wielomianem Lagrange'a.	72
27	Warunki wystarczające dla ψ jako parametryzacji.	75
28	Wizualizacja geometryczna nierówności (169)(ii) i (169)(iii) dla $\lambda = 0,7$. . .	89
29	Warunek (169(i)) przedstawiony na wykresie 3D dla próbkowania (25) i (26). .	92
30	Warunek (169(i)) przedstawiony na wykresie 3D dla próbkowania (25) i (26). .	92
31	Warunek (169(iv)) zwizualizowany na wykresie 3D dla próbkowania (25) i (26).	93
32	Warunek (169(iv)) zwizualizowany na wykresie 3D dla próbkowania (25) i (26).	93
33	Warunek (169(i)) zwizualizowany w 2D dla próbkowania (25) i (26).	93
34	Warunek (169(i)) zwizualizowany w 2D dla próbkowania (25) i (26).	94
35	Warunek (169(iv)) zobrazowany w 2D dla próbkowania (25) i (26).	94
36	Warunek (169(iv)) zobrazowany w 2D dla próbkowania (25) i (26).	94
37	Warunek (169(i)) zobrazowany w 3D dla próbkowania (23) i (24).	97
38	Warunek (169(i)) zobrazowany w 3D dla próbkowania (23) i (24).	97
39	Warunek (169(iv)) w 3D dla próbkowań (23) i (24).	98
40	Warunek (169(iv)) w 3D dla próbkowań (23) i (24).	98
41	Krzywa Steinmetz'a γ_S próbkowana według (23) lub (24).	99
42	Krzywa γ_o próbkowana (25) lub (26).	100
43	Krzywa γ_h próbkowana (25) lub (26).	100
44	Wykresy ψ^L dla (224)(i) próbkowanej (26) i (224)(ii) próbkowanej przez (25).	102
45	Sposób budowania interpolanta Hermita.	106
46	Wykres dla $\rho_1(\lambda) > 0$	117
47	Rysunek pomocniczy szukania najlepszego oszacowania wyrażenia dla $f_0^q(\bar{t})$. .	122
48	Prosta regresji i jej równanie dla przypadku rozbieżności interpolanta od krzywej.	123
49	Krzywa regresji krzywej nieregularnej i próbkowania z punktem osobliwym .	125

50	Warunek (283) geometrycznie zobrazowany w $3D$ z punktami reprezentantami próbkowania (23) lub (24)	132
51	Obszar istnienia parametryzacji ψ dla (283) próbkowany (26) (czerwone kropki).	133
52	Wykres $\dot{\phi}_0^H(\lambda)$ dla różnych λ	137
53	Spirala przybliżona interpolantem $\hat{\gamma}_3^{MC}$	147
54	Helikoida γ_h ze wzoru (5) dla: a) (23) b) (24) dopasowana $\hat{\gamma}_3^{MC}$ ($m = 15$ i $\lambda = 0,3$).	148
55	Krzywa kubiczna γ_c dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$	149
56	Rozbieżność dla próbkowania (29) nie spełniającego warunku mniej lub bardziej równomierności	150
57	Krzywa regresji krzywej nieregularnej i próbkowania z punktem osobliwym	151
58	Regresja liniowa wyznaczona dla γ_{sp} próbkowanej (24).	152
59	Półokrąg γ_{sc} interpolowany przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$	153
60	Spirala γ_{sp} próbkowana przez (23) lub (24) i dopasowany interpolant $\hat{\gamma}_3^{MC}$	154
61	Helikoida γ_h próbkowana (23) lub (24) & dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$	154
62	Krzywa kubiczna γ_c dopasowana interpolantem $\hat{\gamma}_3^{MC}$	155
63	Helikoida stożkowa γ_{ch} dopasowana przez $\hat{\gamma}_3^{MC}$	155
64	Spirala γ_{sp} przybliżona przez $\hat{\gamma}_3^{NS}$	161
65	Nerka	166
66	Kształt interpolantów kubicznych Lagrange.	167
67	Kształt interpolantów kubicznych Hermita.	167
68	Kształtu brzegu nerki w interpolacji zmodyfikowanym kubicznym splajnem zupełnym.	168
69	Kształt nerki obrysowany interpolantem.	169
70	Segmentacja obrazu USG	170
71	Wycięte klatki filmu	173

Spis tabel

1	Oznaczenia	12
2	Najczęściej używane funkcje programu Mathematica	12
3	Wartości współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_{sp}	66
4	Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{as} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$	68
5	Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{nr_1} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$	69
6	Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{cd} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$	70
7	Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{nr_2} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{96, \dots, 150\}$	70
8	Wartości współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_{sp}	71
9	Wartości współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_h	72
10	Wartości współczynnika regresji $\alpha(\lambda) \approx \bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_c	73
11	Test iniekcyjności ψ dla próbkowania 25	90
12	Wynik testowania (169)(i) i (169)(iv)	91
13	Warunki (169)(i) i (169)(iv) dla próbkowania (23).	96
14	Testowanie warunków (169)(i) i (169)(iv) dla próbkowania (24).	96
15	Oszacowanie numeryczne współczynnika $\alpha(\lambda)$ dla <i>spirali</i> γ_{sp} i <i>krzywej</i> <i>Steinmetz'a</i> γ_s	100
16	Testowanie algebraiczne $\psi^L > 0$ dla próbkowania (25) i (26).	101
17	Oszacowania numeryczne współczynnika $\alpha(\lambda)$ dla γ_o i γ_h	101
18	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ dla próbkowania nie mniej lub bardziej równomiernego obliczony dla spirali.	123
19	Współczynnik zbieżności dla krzywej nieregularnej γ_{nr_1} w interpolacji Hermita	124
20	Współczynnik zbieżności dla krzywej nieregularnej γ_{cd} w interpolacji Hermita	124
21	Wartości współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ dla γ_{sp}	125

22	Wartości współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_c	126
23	Wartości $\bar{\alpha}(\lambda)$ dla γ_{qh}	127
24	Warunki wystarczające na bycie parametryzacją dla (23).	135
25	Warunki wystarczające na bycie parametryzacją dla (24).	136
26	Znak $\dot{\phi}_0^H(t)$ dla próbkowania (24)	137
27	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ w (312) i (313) dla γ_{sp} ze wzoru (3) i dla różnych $\lambda \in [0, 1]$	148
28	Współczynnik regresji $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ ze wzorów (312) i (313) dla γ_h z (5) i różnych $\lambda \in [0, 1]$	148
29	Obliczony współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z (312) i (313) dla γ_c z (4) i różnych $\lambda \in [0, 1]$	149
30	Współczynnik regresji dla próbkowania nie mniej lub bardziej równomiernego	150
31	Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{cd} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{60, \dots, 120\}$	150
32	Współczynnik $\alpha(\lambda)$ dla nieregularnej γ_{nr2} próbkowanej jak w (24), (167) i (168) dla $m \in \{60, \dots, 120\}$	151
33	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ z Hipotezy 5.1 dla γ_{sp}	153
34	Wartości współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda)$ z Hipotezy 5.1 dla γ_h	153
35	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z Tw. 5.1 dla γ_c danej wzorem (4) oraz $m \in \{35, \dots, 55\}$, $\lambda \in [0, 1]$	155
36	Wartość współczynnika $\bar{\alpha}(\lambda)$ z Hipotezy 5.1 dla γ_{ch}	156
37	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ z Hipotezy 5.2 dla γ_{sp}	159
38	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ z Hipotezy 5.2 dla γ_h	159
39	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ z Hipotezy 5.2 dla γ_c	160
40	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ z Hipotezy 5.3 dla γ_{sp}	162
41	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ z (332) dla γ_c	162
42	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda)$ z (332) dla γ_h	163
43	Współczynnik $\bar{\alpha}(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$ z (332) dla γ_{ch} i różnych $\lambda \in [0, 1]$	163
44	Powierzchnia nerki (px^2) dopasowanej różnymi interpolantami dla różnych λ	167

Skorowidz

- krzywa Steinmetza, 21
- asteroida, 22
- błąd interpolacyjny, 36
- błąd interpolacyjny dla int. nieparametrycznej, 36
- cardioida, 21
- dane zredukowane, 16, 23, 28
- efekt Rungego, 14
- funkcja sklejana, 14, 33
- helikoida eliptyczna, 20
- helikoida kwadratowa, 20
- helikoida stożkowa, 20
- Interpolacja funkcjami sklejanymi, 33
- interpolacja Hermita, 32
- interpolacja Lagrange'a, 31
- interpolacja nieparametryczna, 16, 17, 32
- interpolacja parametryczna, 16, 36
- klasa funkcji, 15
- krzywa kubiczna, 19
- krzywa parametryczna, 13, 17–19, 23
- lemat Hadamarda, 15
- notacja dużego O, 14, 15
- ostrość oszacowania zbieżności, 16, 36, 55, 58,
- parametryzacja wykładnicza, 28, 60, 63
- przedziałowo-kubiczna interpolacja klasy C^0 , 39
- próbki dopuszczalne, 24, 63
- próbki mniej lub bardziej równomierne, 24, 58
- próbki równomierne, 24, 27, 60
- regularność krzywej, 18, 67
- reparametryzacja, 17
- rzęd zbieżności, 14
- różnice dzielone, 30, 62, 64, 65
- spirala, 19
- splajn kubiczny, 34
- stopień nieregularności krzywej, 15
- stopień zbieżności, 36, 37
- twierdzenie Tylora, 15
- wzór interpolacyjny Lagrange'a, 31
- wzór Newtona, 29, 31
- węzły interpolacyjne, 13, 16, 23
- zbieżność, 16, 17, 24, 67