

SILESIAAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
DEPARTMENT OF THEORETICAL AND APPLIED
MECHANICS

**A COMPUTATIONAL INTELLIGENCE
FRAMEWORK FOR PDE-CONSTRAINED
TOPOLOGY OPTIMIZATION**

ROZSZERZONE STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

mgr inż. Nikhil TATKE (M.Engg.)

Promotor:

dr hab. inż. Jarosław KACZMARCZYK, prof. PŚ

Gliwice, 2026

1. Wstęp

Optymalizacja topologii jest obliczeniową metodą projektowania, która wyznacza optymalny rozkład materiału w obrębie domeny konstrukcyjnej w celu minimalizacji podatności — lub równoważnie maksymalizacji sztywności — przy zadanym ograniczeniu dotyczącym ilości materiału. W sformułowaniu opartym na gęstości, stosowanym w całej niniejszej pracy, każdy element siatki elementów skończonych ma przypisaną wartość gęstości między zerem a jeden, a optymalizator iteracyjnie aktualizuje te gęstości, aż powstanie efektywna struktura przenosząca obciążenia. Podejście to stało się standardowym narzędziem w inżynierii konstrukcyjnej, ponieważ pozwala odkrywać nieintuicyjne ścieżki przenoszenia obciążeń i efektywne układy, które trudno uzyskać wyłącznie za pomocą konwencjonalnej optymalizacji kształtu lub wymiarów [1].

Pomimo praktycznego sukcesu, optymalizacja topologii na dużą skalę pozostaje kosztowna obliczeniowo. Każda iteracja wymaga rozwiązania dużego macierzowego układu liniowego w celu wyznaczenia odpowiedzi konstrukcji, a typowe uruchomienie wymaga setek takich rozwiązań na siatkach o wysokiej rozdzielczości. Wynikający z tego koszt czasu obliczeń stanowi istotną barierę dla rutynowego zastosowania inżynierskiego, szczególnie w trzech wymiarach, gdzie nawet umiarkowane problemy testowe mogą wymagać znacznych zasobów czasu i pamięci [2].

Zaproponowano dwie szerokie strategie ograniczania tego kosztu. Pierwszą jest optymalizacja oparta na modelach o wysokiej rozdzielczości, w której optymalizator wykonuje większość poszukiwań na obliczeniowo taniej siatce zgrubnej i przechodzi do siatki dokładniejszej tylko wtedy, gdy jest to konieczne [3, 4]. Drugą jest uczenie maszynowe typu warm-start (inicjalizacja z wcześniejszego rozwiązania), w którym wytrenowana sieć neuronowa przewiduje bliski optimum projekt początkowy, dzięki czemu optymalizator potrzebuje mniej iteracji, aby osiągnąć dobre rozwiązanie [5]. Oba podejścia są atrakcyjne, ponieważ zmniejszają zależność od wielokrotnego wykonywania kosztownych obliczeń na siatce dokładnej. Oba wprowadzają jednak również problem niezawodności. Siatka zgrubna może oddalać się od celu siatki dokładnej w sposób niewidoczny aż do samego końca przebiegu, a przewidywanie wyuczone może odzwierciedlać obciążenia wynikające z danych treningowych, które prowadzą optymalizator do niekorzystnych obszarów przestrzeni projektowej.

Niniejsza rozprawa podejmuje oba problemy w ramach jednego, zunifikowanego modelu. Zamiast bezwarunkowo akceptować wyniki siatki zgrubnej lub uczenia maszynowego, proponowane podejście okresowo sprawdza proponowane projekty pod względem siatki dokładnej i albo je akceptuje, albo odrzuca w zależności od tego, czy reprezentują rzeczywisty postęp. Ten mechanizm weryfikacji w czasie wykonywania — nazwany mechanizmem zabezpieczającym akceptację wielopoziomową (Multifidelity Acceptance Safeguard - MFAS) — stanowi centralny wkład metodyczny tej pracy. Jego celem jest zapewnienie oszczędności obliczeniowych bez utraty kontroli nad jakością końcowego projektu.

2. Metodyka badań

Podstawowym wkładem metodycznym jest mechanizm zabezpieczający akceptację wielopoziomową, w skrócie MFAS. MFAS jest mechanizmem weryfikacji w czasie wykonywania obliczeń wbudowanym bezpośrednio w pętlę optymalizacji topologii. Jego celem jest zachowanie przewagi obliczeniowej optymalizacji na siatce zgrubnej przy jednoczesnym ograniczeniu utraty jakości zwykle związanej z nieweryfikowanymi przepływami informacji dotyczących akceptacji wielopoziomowej.

W rozprawie analizowane są cztery warianty metod. Metoda M1 jest odniesieniem dla siatki dokładnej i służy jako punkt bazowy zarówno dla podatności, jak i czasu wykonania. Metoda M2 jest bazowym wielopoziomowym wariantem opartym wyłącznie na siatce zgrubnej, bez weryfikacji w pętli na siatce dokładnej; reprezentuje najszybszą, ale najmniej wiarygodną strategię. Metoda M3 jest główną zweryfikowaną wielopoziomową strategią decyzyjną; optymalizator działa głównie na siatce zgrubnej, okresowo ocenia bieżący projekt na siatce dokładnej i wykorzystuje mechanizm akceptacji–odrzućenia–resynchronizacji do kontroli dryftu. Metoda M4 rozszerza metodę M3 przez dodanie wyuczonego warm-startu U-Net na siatce zgrubnej przed rozpoczęciem zabezpieczonej pętli i co istotne, U-Net nie omija zabezpieczenia. Jego wynik jest traktowany wyłącznie jako propozycja początkowa i podlega tej samej logice weryfikacyjnej co każda inna propozycja pochodzący z siatki zgrubnej.

To rozróżnienie jest kluczowe dla rozprawy; autor pracy nie twierdzi, że uczenie maszynowe powinno zastąpić optymalizację, ani że wyuczony model jest z natury niezawodny. Zamiast tego stawia pytanie, czy uczenie maszynowe można bezpiecznie zintegrować z przepływem informacji w procesie optymalizacji opartej na weryfikacji oraz w jakich warunkach taka integracja przynosi praktyczne korzyści.

Decyzja o akceptacji w każdym punkcie kontrolnym polega na porównaniu podatności proponowanego projektu, wyznaczonej na siatce dokładnej, z progiem wynikającym z ostatnich obliczeń. W przypadku modelu dwuwymiarowego ocenia się, czy siatka zgrubna poprawnie przewiduje kierunek poprawy na siatce dokładnej — jeśli przewidywanie okazuje się niewiarygodne, wariant zostaje odrzucony. W modelu trójwymiarowym stosuje się prostsze kryterium: wariant jest akceptowany, jeśli jego podatność na siatce dokładnej mieści się w niewielkiej tolerancji względem najlepszego dotychczasowego rozwiązania. W obu przypadkach odrzucenie uruchamia krok resynchronizacji, który przywraca stan siatki zgrubnej do ostatniej zweryfikowanej propozycji projektu, zapewniając, że kolejne iteracje rozpoczną się od znanego, zweryfikowanego punktu, zamiast prowadzić do dalszej rozbieżności.

Końcowa faza obejmuje dziesięć iteracji standardowej optymalizacji na siatce dokładnej, rozpoczynając od najlepszego zaakceptowanego wariantu projektu i używając zmniejszonego kroku. Faza ta usuwa resztkowe obszary szare — elementy o pośrednich wartościach gęstości wskazujących na niedostateczną zbieżność — i dostarcza topologię o wysokiej rozdzielczości jako wynik końcowy.

3. Wyniki obliczeń dla modelu dwuwymiarowego

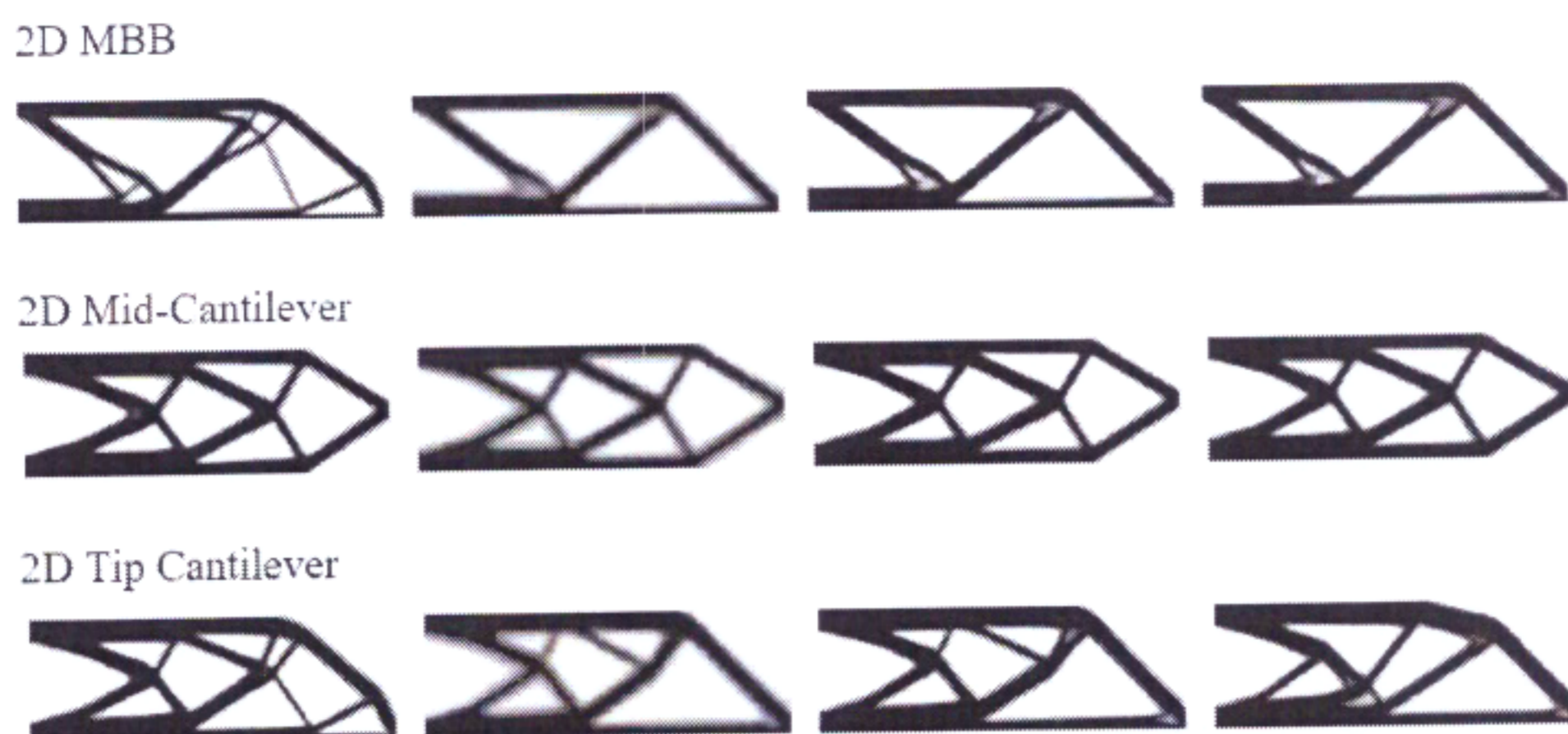
Analiza obejmuje ocenę czterech metod w oparciu o trzy standardowe problemy konstrukcyjne: belkę MBB, wspornik obciążony w środku rozpiętości oraz wspornik obciążony na końcu. Wszystkie trzy przypadki są rozwiązywane na siatce dokładnej 180 na 60 elementów oraz siatce zgrubnej 90 na 30 elementów, przy zastosowaniu udziału objętościowego odpowiednio: 0,40 dla belki MBB oraz 0,50 dla obu wsporników. Każda metoda jest uruchamiana pięć razy z różnymi ziarnami losowymi w celu oszacowania rozkładu czasu ściennego (ang. wall-clock time); ponieważ optymalizator jest w praktyce deterministyczny dla ustalonego problemu i metody, wartości podatności są takie same dla wszystkich ziaren, a zmianie podlega jedynie czas wykonania. Wyniki zestawiono w tabeli 1 oraz zoptymalizowane gęstości topologii są przedstawione na rysunku 1.

Tabela 1. Wyniki analizy dwuwymiarowej dla wszystkich benchmarków i metod. Luka podatności podawana jest względem metody M1. Przyspieszenie jest ilorazem czasu ściennego (ang. wall-clock time) M1 do czasu ściennego danej metody (średnia z pięciu ziaren). Wskaźnik akceptacji dotyczy wyłącznie metod: MFAS M3 i M4.

Benchmark	Metoda	Podatność C	Luka względem M1 (%)	Udział szarości	Średnie przyspieszenie	Wsk. akceptacji
MBB beam	M1	244.81	—	0.224	1.00×	—
MBB beam	M2	272.24	+11.20	0.344	6.49×	—
MBB beam	M3	242.85	-0.80	0.171	2.13×	0.893
MBB beam	M4	242.76	-0.84	0.171	2.11×	0.929
Mid cantil.	M1	178.55	—	0.198	1.00×	—
Mid cantil.	M2	199.77	+11.88	0.434	6.77×	—
Mid cantil.	M3	178.36	-0.11	0.194	2.30×	0.917
Mid cantil.	M4	178.21	-0.19	0.194	2.27×	0.861
Tip cantil.	M1	187.48	—	0.212	1.00×	—
Tip cantil.	M2	205.79	+9.77	0.376	6.54×	—
Tip cantil.	M3	187.60	+0.07	0.178	2.23×	0.917
Tip cantil.	M4	187.67	+0.10	0.183	2.22×	0.944

Nieweryfikowany bazowy wariant z siatką zgrubną M2, jest konsekwentnie najszybszą metodą, ze średnimi przyspieszeniami od 6,49 do 6,77 razy większymi względem wariantu bazowego z siatką dokładną. Jednak ta szybkość okupiona jest znacznym kosztem jakości. Podatność wzrasta o 9,8% do 11,9%, w zależności od benchmarku, a udział szarości — proporcja elementów o pośrednich wartościach gęstości — niemal podwaja się w porównaniu z M1, wskazując na słabą rozdzielczość topologii. Metoda M2 jest umieszczona w porównaniu wyłącznie po to, aby ilościowo określić karę za całkowite pominięcie weryfikacji; nie jest praktycznie użyteczną strategią projektową.

Zweryfikowane metody M3 i M4 w znacznym stopniu odzyskują jakość siatki dokładnej. Dla belki MBB obie metody dają podatności nieco niższe niż M1 — odpowiednio o 0,80% i 0,84% — przy czasie działania około 2,13 i 2,11 razy krótszym niż metoda M1. Ta niewielka poprawa względem punktu odniesienia wynika z tego, że przeszukiwanie na siatce zgrubnej obejmuje szersze otoczenie przestrzeni projektowej przed fazą końcową, czasami odkrywając topologię, dla której standardowy przebieg na siatce dokładnej, ograniczony przez jednorodną inicjalizację, nie dociera. Dla wspornika obciążonego w środku rozpiętości, metody M3 i M4 ponownie przewyższają metodę M1 pod względem podatności o 0,11% i 0,19%, przy przyspieszeniach 2,30 i 2,27. Dla wspornika końcowego relacja się odwraca, lecz tylko marginalnie: M3 i M4 mają podatność wyższą od M1 odpowiednio o 0,07% i 0,10%, przy zachowaniu przyspieszeń 2,23 i 2,22.



Rysunek 1. Gęstości zoptymalizowanej topologii dla trzech przypadków w przestrzeni 2D

We wszystkich trzech benchmarkach M3 i M4 zapewniają około dwukrotne skrócenie czasu ściennego przy utrzymaniu podatności w granicach poniżej jednego procenta względem odniesienia z siatki dokładnej. Udział szarości jest również konsekwentnie niższy dla metod zweryfikowanych niż dla M2, a w kilku przypadkach niższy nawet niż dla samej M1 — co jest korzyścią wynikającą z okresowej weryfikacji na siatce dokładnej, zapobiegającej przedłużonemu dryfowi na siatce zgrubnej, w połączeniu z fazą końcową. Dla belki MBB udział szarości spada z 0,344 dla M2 do 0,171 dla obu metod M3 i M4. Dla wspornika końcowego spada z 0,376 dla M2 do 0,178 i 0,183 odpowiednio dla M3 i M4.

W analizie dwuwymiarowej, metoda M4 jest bezpieczna i konkurencyjna, ale nie zapewnia żadnej dodatkowej korzyści czasowej względem metody M3. Jej przyspieszenia są nieznacznie niższe we wszystkich benchmarkach, co odzwierciedla fakt, że optymalizator na siatce zgrubnej już na podstawie jednorodnej inicjalizacji osiąga korzystną trajektorię w przypadku stosunkowo prostych problemów, więc wyuczony warm-start wnosi niewiele.

4. Wyniki obliczeń dla modelu trójwymiarowego

Analiza obejmuje dwa benchmarki: belkę wspornikową oraz wspornik typu L z pasywnym obszarem pustym. Każda kombinacja metody i problemu jest oceniana dla trzech ziaren. W odróżnieniu od przypadku dwuwymiarowego, przebiegi trójwymiarowe wykazują znaczącą zmienność zarówno czasu wykonania, jak i podatności między ziarnami, wynikającą z zachowania solvera i perturbacji zależnych od ziarna. Wyniki są zatem przedstawiane jako średnie z trzech ziaren i powinny być interpretowane jako trendy specyficzne dla danego benchmarku.

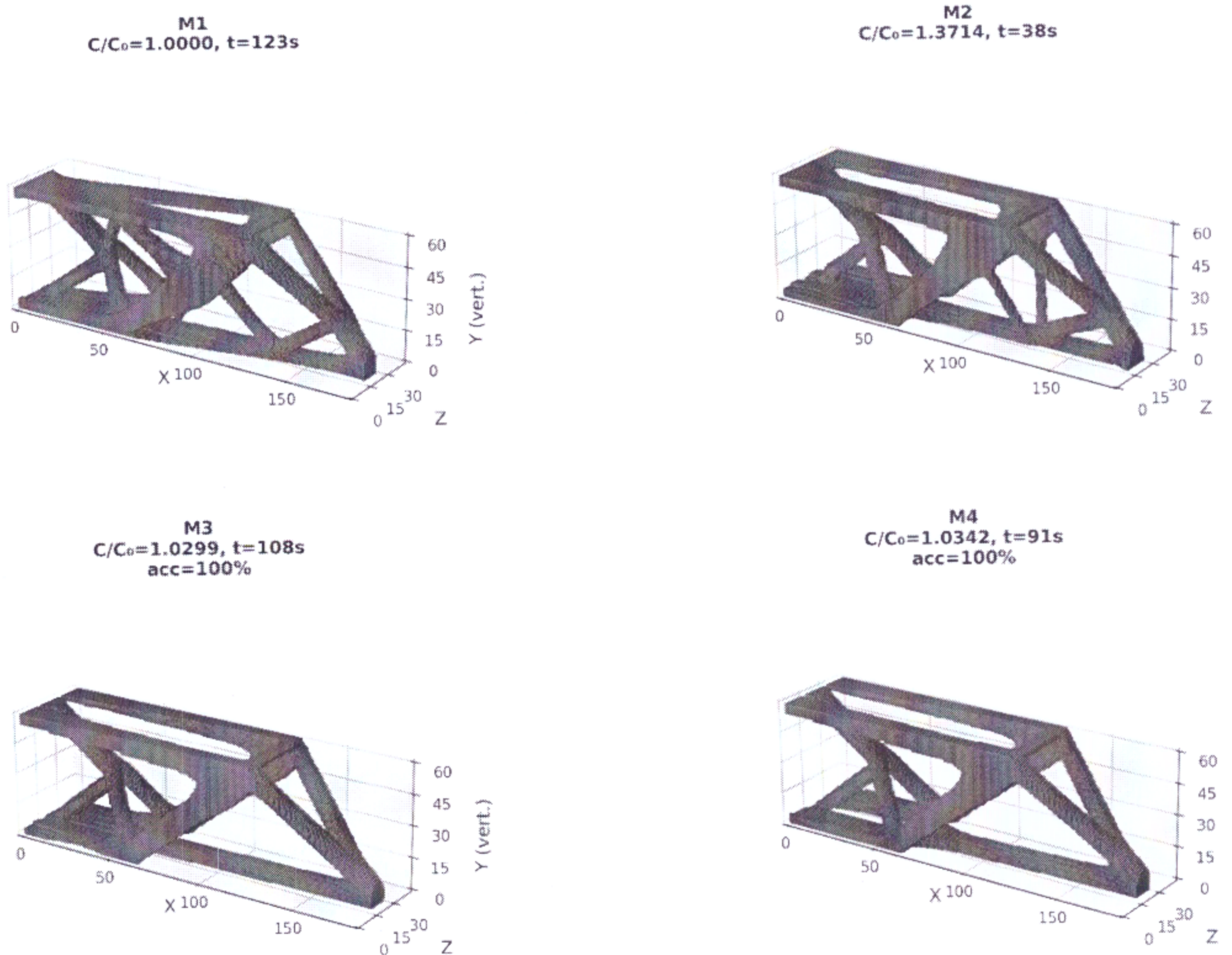
4.1 Wspornik w przestrzeni trójwymiarowej

Wyniki dla wspornika 3D odtwarzają ten sam jakościowy wzorzec, co w dwóch wymiarach, lecz przy większych wartościach bezwzględnych (tabela 2). W metodzie M2 osiąga się średnie przyspieszenie około 2,95 razy większe kosztem 32-procentowego wzrostu podatności — znacznie większej straty jakości niż w 2D, co odzwierciedla większą rozbieżność między siatką zgrubną i dokładną w trzech wymiarach. W metodzie M3 osiąga się zweryfikowane przyspieszenie 1,64 razy większe przy średniej podatności jedynie o dwa procent wyższej niż w metodzie M1, pokazując, że zabezpieczenie skutecznie kontroluje jakość nawet w trudniejszym środowisku trójwymiarowym. Metoda M4 jest wolniejsza od metody M3 w tym benchmarku, osiągając przyspieszenie 1,28 razy większe przy luce podatności 3,5%, lecz jej

zmienność podatności między przebiegami jest istotnie mniejsza niż w przypadku metody M3. Sugeruje to, że wyuczony warm-start może poprawiać spójność procesu rozwiązywania — zmniejszając nieprzewidywalność między niezależnymi uruchomieniami — nawet wtedy, gdy nie poprawia średniej szybkości. Zoptymalizowane topologie są przedstawione na rysunku 2.

Tabela 2. Wyniki dla wspornika trójwymiarowego; średnia z trzech ziaren. Luka podatności obliczana jest względem średniej podatności metody M1.

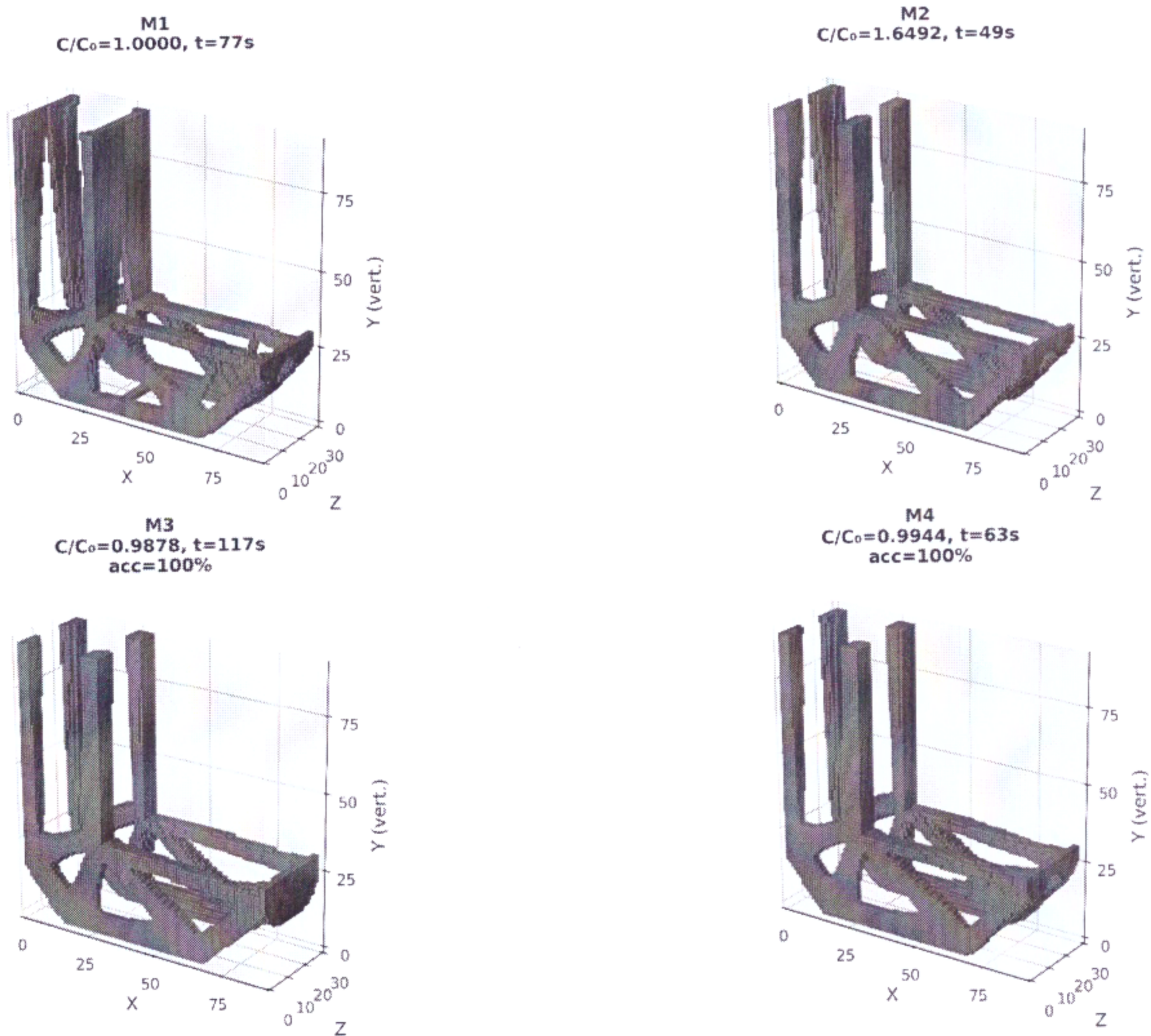
Metoda	Średnia podatność	Średnie przyspieszenie	Luka względem M1 (%)	Wsk. akceptacji
M1 (odniesienie)	12.09	1.00×	—	—
M2 (nieweryfikowana)	15.96	2.95×	+32.1	—
M3 (zweryfikowana)	12.33	1.64×	+2.0	0.833
M4 (ML + weryf.)	12.51	1.28×	+3.5	1.000



Rysunek 2. Gęstości zoptymalizowanej topologii dla wspornika 3D

4.2 Wspornik typu L w przestrzeni trójwymiarowej

Wspornik typu L jest najbardziej wymagającym benchmarkiem w badaniu. Geometria z narożem wklęsłym i pasywnym obszarem pustym szczególnie utrudnia przenoszenie projektu ze skali zgrubnej do dokładnej, co znajduje odzwierciedlenie w karze podatności dla metody M2 wynoszącej niemal 65% — największej spośród wszystkich benchmarków. Metoda M3 utrzymuje bardzo dobrą zgodność podatności (jej średnia podatność jest o 1,2% niższa niż dla metody M1, co oznacza, że zabezpieczenie uznaje topologię za marginalnie lepszą), ale przy znacznym koszcie czasowym. Powtarzające się cykle odrzucania i resynchronizacji niwelują oczekiwaną przewagę czasową i prowadzą do spowolnienia: metoda M3 działa dla tego problemu z prędkością zaledwie 0,66 czasu wymaganego w metodzie M1. W tabeli 3 przedstawiono wyniki dla trójwymiarowego wspornika w kształcie litery L, a na rysunku 3 przedstawiono zoptymalizowane topologie.



Rysunek 3. Gęstości zoptymalizowanej topologii dla wspornika typu L

W metoda M4 rozwiązuje się trudność związaną ze spowolnieniem obliczeń w następujący sposób. Rozpoczynając zabezpieczoną pętlę od predykcji U-Net, która już jest bliższa wykonalnej topologii, metoda M4 zmniejsza liczbę zdarzeń odrzucenia i cykli resynchronizacji, zanim trajektoria na siatce zgrubnej ustabilizuje się w akceptowalnym obszarze. Wynikiem jest średnie przyspieszenie 1,25 razy większe dla metody M4 przy utrzymaniu podatności w granicach 0,5% względem metody M1. Jest to przypadek w rozprawie, w którym sam model zgrubny ma trudność ze znalezieniem dobrego obszaru akceptacji.

Tabela 3. Wyniki dla wspornika trójwymiarowego typu L; średnia z trzech ziaren.

Metoda	Średnia podatność	Średnie przyspieszenie	Luka względem M1 (%)	Wsk. akceptacji
M1 (odniesienie)	22.79	1.00×	—	—
M2 (nieweryfikowana)	37.59	1.60×	+64.9	—
M3 (zweryfikowana)	22.52	0.66×	-1.2	1.000
M4 (ML + weryf.)	22.67	1.25×	-0.5	1.000

Ten kontrast specyficzny dla benchmarku między M3 a M4 jest jednym z najbardziej istotnych wyników badania. Pokazuje, że użyteczność inicjalizacji z wykorzystaniem uczenia maszynowego zależy od geometrii problemu: metoda M4 nie jest uniwersalnie lepsza od metody M3, ale w przypadku geometrycznie złożonych problemów, gdzie zweryfikowana optymalizacja na siatce zgrubnej jest kosztowna, dobra predykcja początkowa może znacząco zmniejszyć ten koszt.

5. Badania dotyczące ablacji

W badaniach tych analizuje się, jak wrażliwy jest model mechanizmu zabezpieczającego akceptację wielopoziomową (Multifidelity Acceptance Safeguard - MFAS) na dwa główne hiperparametry: częstotliwość wykonywania kontroli weryfikacyjnych na siatce dokładnej oraz tolerancję stosowaną do decydowania, czy wariant projektu jest akceptowany, czy odrzucany.

W analizie dwuwymiarowej na trzech ziarnach wykorzystano belkę MBB. Gdy zmieniana jest częstotliwość weryfikacji — od sprawdzania co trzy iteracje zgrubne do co dziesięć — końcowa podatność zmienia się o mniej niż 0,06 % w całym zakresie. Wskaźnik akceptacji maleje wraz z mniejszą częstotliwością kontroli, ponieważ między punktami kontrolnymi może kumulować się większy dryf siatki zgrubnej, ale nie przekłada się to na istotną utratę jakości przy testowanych ustawieniach. Podobny obraz wyłania się dla tolerancji akceptacji: w czterokrotnym zakresie wartości progowych końcowa podatność w metodzie M3 jest

identyczna do czterech cyfr znaczących, a dla metody M4 zmienia się o mniej niż 0,001. Wyniki te potwierdzają, że model nie jest wąsko dostrojony do konkretnych wartości hiperparametrów, lecz działa stabilnie w praktycznym zakresie ustawień.

W analizie trójwymiarowej benchmark wspornika ujawnia bardziej złożony obraz sytuacji. Gdy częstotliwość weryfikacji zostaje obniżona do sprawdzania tylko co dziesięć iteracji zgrubnych, średni wskaźnik akceptacji spada do 0,20 — co oznacza, że cztery na pięć punktów kontrolnych kończą się odrzuceniem — a średnia końcowa podatność rośnie z 12,33 do 12,71. To pogorszenie, choć nadal znacznie lepsze niż dla metody M2 z wynikiem 15,96, jest na tyle duże, że ma znaczenie praktyczne. Wynik ten pokazuje, że w analizie trójwymiarowej, gdzie niedopasowanie między siatką zgrubną a dokładną narasta szybciej, weryfikacja musi być prowadzona wystarczająco często, aby wykrywać i korygować dryf, zanim stanie się on poważnym problemem. Domyślne ustawienie sprawdzania co pięć iteracji zapewnia właściwą równowagę między koniecznością monitorowania a częstością korekt.

Zmniejszenie tolerancji akceptacji w badaniu ablacyjnym dla wspornika 3D czyni bramkę bardziej rygorystyczną. Dla metody M4 powoduje to spadek średniego wskaźnika akceptacji do 0,55 i wzrost końcowej podatności o około 0,6% względem ustawienia domyślnego, podczas gdy w metodzie M3 podatność pozostaje w dużej mierze niezmienną. Potwierdza to, że mechanizm akceptacji jest rzeczywiście selektywny w bardziej restrykcyjnych warunkach i że tolerancja domyślna zapewnia dobrą skuteczność bez nadmiernego ograniczania procesu przeszukiwania.

6. Dyskusja

Porównanie metod M2 i M3 konkretyzuje główny argument rozprawy. Zastosowanie metody M2 jest zawsze tańsze, ale jej utrata jakości wynosi od dziesięciu procent w przestrzeni dwuwymiarowej do ponad sześćdziesięciu procent dla trójwymiarowego wspornika typu L — zbyt dużo, aby rekomendować ją do jakiegokolwiek praktycznego zadania projektowania konstrukcji. W metodzie M3 rezygnuje się z części szybkości obliczeń, ale zachowuje się wierność rozwiązania na poziomie wiarygodnym z punktu widzenia zastosowań inżynierskich. Mechanizm weryfikacji nie jest zatem opcjonalnym udoskonaleniem ale jest składnikiem, który sprawia, że przyspieszenie mechanizmu zabezpieczającego akceptację wielopoziomą staje się wiarygodne, a nie jedynie szybkie.

Metoda M4 pokazuje, że sieć neuronowa może zostać bezpiecznie zintegrowana z przepływem informacji w optymalizacji ograniczonej weryfikacją, lecz jej praktyczna korzyść zależy od postawionego problemu badawczego. W analizie dwuwymiarowej oraz dla trójwymiarowego wspornika metoda M4 dorównuje metodzie M3 pod względem podatności i nie oferuje znaczącej przewagi szybkości. Dla trójwymiarowego wspornika typu L metoda M4 wnosi najistotniejszy wkład w całym badaniu: przywraca przyspieszenie w sytuacji, w której sama metoda M3 staje się wolniejsza od wariantu bazowego z siatką dokładną. Wniosek jest taki, że

uczenie maszynowe wnosi największą korzyść wtedy, gdy sam optymalizator zgrubny ma trudność z wejściem do dobrego obszaru akceptacji, a jego wpływ pozostaje ograniczony i kontrolowany przez zabezpieczenie niezależnie od jakości predykcji.

Wyniki analizy trójwymiarowej pokazują, że średni czas ścienny nie jest jedyną istotną miarą skuteczności optymalizatora. Zmniejszona wariancja podatności dla metody M4 w benchmarku wspornika — mimo braku przewagi średniego przyspieszenia nad metodą M3 — sugeruje, że warm-start może uczynić proces optymalizacji bardziej powtarzalnym i przewidywalnym między niezależnymi uruchomieniami. W przepływach informacji, w których spójność ma znaczenie równie ważne jak średnia szybkość, jest to praktycznie użyteczna właściwość, nawet jeśli nie pojawia się w głównym wskaźniku przyspieszenia.

7. Wnioski

W niniejszej rozprawie opracowano i oceniono model mechanizmu zabezpieczającego akceptację wielopoziomową (MFAS) dla optymalizacji topologii opartej na gęstości. Model ten łączy przyspieszenie wynikające z użycia siatki zgrubnej, okresową weryfikację na siatce dokładnej, mechanizm akceptacji–odrzućenia–resynchronizacji oraz opcjonalny warm-start (inicjalizacja z wcześniejszego rozwiązania) z wykorzystaniem uczenia maszynowego w połączonego z weryfikacją. Na podstawie badań przedstawionych w rozprawie można wyciągnąć następujące wnioski:

- zweryfikowana optymalizacja dotycząca mechanizmu zabezpieczającego akceptację wielopoziomową zapewnia znaczące przyspieszenie bez pogorszenia jakości. W analizie dwuwymiarowej zweryfikowane metody M3 i M4 osiągają około dwukrotne przyspieszenie czasu ściennego (ang. wall-clock time) względem wariantu bazowego z siatką dokładną we wszystkich trzech benchmarkach, utrzymując podatność w granicach 0,85% wartości bazowej i generując bardziej wyraźne topologie niż nieweryfikowana alternatywa. W analizie trójwymiarowej metoda M3 osiąga 1,64-krotne przyspieszenie na wsporniku przy luce podatności wynoszącej dwa procent, a metoda M4 osiąga 1,25-krotne przyspieszenie na wsporniku typu L, pozostając w granicach 0,5% względem wariantu bazowego,
- nieweryfikowana optymalizacja na siatce zgrubnej nie stanowi użytecznej strategii projektowej. Chociaż metoda M2 jest najszybszą metodą we wszystkich eksperymentach, konsekwentnie powoduje kary podatności od dziesięciu do sześćdziesięciu pięciu procent i prowadzi do słabo rozdzielonych topologii z dużymi udziałami obszarów szarych. Pokazuje efektywność obliczeniową optymalizacji na siatce zgrubnej, a zarazem jej fundamentalne ryzyko w przypadku braku mechanizmów kontroli jakości,
- warm-start (inicjalizacja z wcześniejszego rozwiązania) z wykorzystaniem uczenia maszynowego może być bezpiecznie zintegrowany, ale korzyści z tego płynące zależą od geometrii. Metoda M4 nigdy nie pogarsza niezawodności w sposób istotny, ponieważ pozostaje za tą samą bramką akceptacji co metoda M3. Najsilniejszy efekt metody obserwuje się w przypadku trójwymiarowego wspornika typu L, gdzie przekształca ona zweryfikowany przepływ informacji — początkowo wolniejszy od

wariantu bazowego — w wariant o wyższej efektywności czasowej. Korzyści te wynikają z zapewnienia lepszego punktu startowego dla zabezpieczonego przeszukiwania na siatce zgrubnej. W prostszych przypadkach testowych przewaga nad metodą M3 jest marginalna, jednak metoda nie prowadzi do pogorszenia jakości rozwiązań.

Przyspieszenie i niezawodność nie muszą być traktowane jako cele sprzeczne. Zarówno siatka zgrubna, jak i wyuczony inicjalizator mogą być wykorzystywane skutecznie, pod warunkiem, że ich wyniki są ograniczane przez okresową weryfikację. Przyszłe prace powinny koncentrować się na badaniach adaptacyjnych dotyczących wyboru między metodami M3 i M4 na podstawie diagnostyki z wczesnej fazy przebiegu procesu optymalizacji, większej liczby ziaren w celu poprawienia statystyki zwłaszcza w analizie trójwymiarowej oraz rozszerzeniu koncepcji zabezpieczenia na problemy optymalizacji topologii z ograniczeniami nałożonymi na naprężenia lub inne wielkości fizyczne.

Bibliografia

1. M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. doi: 10.1007/978-3-66205086-6.
2. S. Mukherjee, D. Lu, B. Raghavan, P. Breitkopf, et al., “Accelerating large-scale topology optimization: State-of-the-art and challenges,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2021. doi: 10.1007/s11831-021-09544-3.
3. K. Yaji, S. Yamasaki, and K. Fujita, “Multifidelity design guided by topology optimization,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 61, no. 3, pp. 1071–1085, 2020. doi: 10.1007/s00158-019-02406-4.
4. S. G. Kontogiannis and M. A. Savill, “A generalized methodology for multi disciplinary design optimization using surrogate modelling and multifidelity analysis,” *Optimization and Engineering*, vol. 21, no. 3, pp. 723–759, 2020. doi: 10.1007/s11081-020-09504-z.
5. S. Shin, D. Shin, and N. Kang, “Topology optimization via machine learning and deep learning: A review,” *Journal of Computational Design and Engineering*, vol. 10, no. 4, pp. 1736–1766, 2023. doi: 10.1093/jcde/qwad072.