

**Politechnika Śląska**  
**Wydział Automatyki, Elektroniki**  
**i Informatyki**

**Rafał Marjasz**

**MODELE KOLEJKOWE**  
**Z MECHANIZMEM ZAWIESZENIA**  
**OBŚLUGI TYPU "MULTIPLE**  
**VACATION" – ANALIZA**  
**Z WYKORZYSTANIEM SD**

**Rozprawa doktorska**  
**napisana pod kierunkiem**  
**dr hab. inż. Wojciecha Kempy, prof. PŚ**

**Gliwice 20 kwietnia 2023**



# Spis treści

Spis rysunków	6
Wstęp	13
<b>1 Model kolejkowy z dyscypliną zawieszenia obsługi typu „multiple vacation”</b>	<b>18</b>
1.1 Opis modelu	23
1.2 Oznaczenia i wyniki pomocnicze	25
<b>2 Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)</b>	<b>31</b>
2.1 Prosty proces Poissona	31
2.2 Złożony proces Poissona	43
2.3 Analiza numeryczna i symulacje	58
2.3.1 Trzy wybrane scenariusze dla prostego procesu Poissona	59
2.3.2 Analiza porównawcza obliczeń numerycznych i symulacji.	60
2.3.3 Badanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń w złożonym procesie Poissona	62
2.3.4 Badanie wpływu zmian intensywności napływu zgłoszeń w złożonym procesie Poissona	64
2.3.5 Badanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w złożonym procesie Poissona	66
2.3.6 Porównanie charakterystyk rozkładów prawdopodobieństwa długości kolejki względem zmiennej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w chwili $t$ dla złożonego procesu Poissona	68
2.3.7 Badanie wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju w złożonym procesie Poissona	69
2.3.8 Badanie wpływu zmian wartości średniego rozmiaru pakietu w złożonym procesie Poissona	73
2.4 Podsumowanie rozdziału	73

<b>3</b>	<b>Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepelnienia bufora</b>	<b>79</b>
3.1	Prosty proces Poissona . . . . .	79
3.2	Złożony proces Poissona . . . . .	88
3.3	Analiza numeryczna i symulacje . . . . .	96
3.3.1	Analiza porównawcza obliczeń numerycznych i symulacji. . . . .	97
3.3.2	Badanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń w złożonym procesie Poissona . . . . .	99
3.3.3	Badanie wpływu zmian intensywności napływu zgłoszeń w złożonym procesie Poissona . . . . .	99
3.3.4	Badanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w złożonym procesie Poissona . . . . .	103
3.3.5	Badanie wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju w złożonym procesie Poissona . . . . .	106
3.4	Podsumowanie rozdziału . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Rozkład opóźnienia kolejkowania</b>	<b>113</b>
4.1	Prosty proces Poissona . . . . .	113
4.2	Złożony proces Poissona . . . . .	130
4.3	Analiza numeryczna. . . . .	148
4.3.1	Badanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń w złożonym procesie Poissona . . . . .	150
4.3.2	Badanie wpływu zmian intensywności napływu zgłoszeń w złożonym procesie Poissona . . . . .	153
4.3.3	Badanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w złożonym Procesie Poissona . . . . .	155
4.3.4	Badanie wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju w złożonym procesie Poissona . . . . .	158
4.4	Podsumowanie rozdziału . . . . .	159
<b>5</b>	<b>Analiza procesu liczącego obsłużone zgłoszenia</b>	<b>166</b>
5.1	Prosty proces Poissona . . . . .	166
5.2	Złożony proces Poissona . . . . .	177
5.3	Analiza numeryczna i symulacje. . . . .	188
5.3.1	Analiza porównawcza obliczeń numerycznych i symulacji. . . . .	190
5.3.2	Badanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń w złożonym procesie Poissona . . . . .	193
5.3.3	Badanie wpływu zmian intensywności napływu zgłoszeń w złożonym procesie Poissona . . . . .	195

5.3.4	Badanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w złożonym Procesie Poissona . . . . .	198
5.3.5	Badanie wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju w złożonym procesie Poissona . . . . .	199
5.4	Podsumowanie rozdziału . . . . .	201
<b>6</b>	<b>Modele kolejkowe w ujęciu Dynamiki Systemowej</b>	<b>209</b>
6.1	Dynamika Systemowa . . . . .	210
6.2	Model kolejkowy w oprogramowaniu Vensim . . . . .	213
6.3	Walidacja modelu . . . . .	217
6.4	Symulacje i optymalizacja długości okresu przestoju . . . . .	217
6.5	Podsumowanie rozdziału . . . . .	224
	<b>Podsumowanie</b>	<b>229</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>231</b>
	<b>Załączniki</b>	<b>247</b>
<b>A</b>	<b>Narzędzia symulacyjne i numeryczne</b>	<b>248</b>
A.1	Kod symulatora zdarzeń dyskretnych OMNeT++ . . . . .	248
A.2	Kod umożliwiający numeryczną analizę w programie Mathematica . . . . .	254
	<b>Indeks</b>	<b>270</b>

## Spis rysunków

1.1	Schemat systemu kolejkowego (a) z jednym stanowiskiem obsługi; (b) z wieloma stanowiskami obsługi. . . . .	20
2.1	Charakterystyka wybranych scenariuszy rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{X(t) = m   X(0) = n\}$ dla prostego procesu Poissona. . . . .	60
2.2	Porównanie rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = 1\}$ dla prostego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (2.1.52) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik dziesięcioletniej próby losowej – czerwone kwadraty na wykresie. . . . .	62
2.3	Porównanie rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = 0\}$ dla złożonego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (2.2.57) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik dziesięcioletniej próby losowej – czerwone kwadraty na wykresie. . . . .	63
2.4	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	64
2.5	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = 0\}$ dla $\mu = 600$ pakietów/s. . . . .	65
2.6	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = n\}$ dla $\lambda = 450$ pakietów/s. . . . .	67
2.7	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = n\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	67
2.8	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = n\}$ dla $\lambda = 750$ pakietów/s. . . . .	68
2.9	Wpływ zmian wartości pożądanej liczby zgłoszeń $m$ obecnych w systemie w chwili $t$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = m   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 450$ pakietów/s. . . . .	69

2.10	Wpływ zmian wartości pożądanej liczby zgłoszeń $m$ obecnych w systemie w chwili $t$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = m   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	70
2.11	Wpływ zmian wartości pożądanej liczby zgłoszeń $m$ obecnych w systemie w chwili $t$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = m   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 750$ pakietów/s. . . . .	70
2.12	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 450$ pakietów/s. . . . .	71
2.13	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	72
2.14	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 1   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 750$ pakietów/s. . . . .	72
2.15	Wpływ zmian wartości średniego rozmiaru grupy $\varepsilon$ na rozkład prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{Y(t) = 6   Y(0) = 1\}$ dla obciążenia systemu $\rho = 1$ . . . . .	74
3.1	Porównanie wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ dla prostego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (3.1.53) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik badań symulacyjnych – pomarańczowe kwadraty na wykresie. . . . .	97
3.2	Porównanie wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ dla złożonego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (3.2.35) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik badań symulacyjnych – pomarańczowe kwadraty na wykresie. . . . .	98
3.3	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	100
3.4	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_5 > t\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	100
3.5	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_9 > t\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	101
3.6	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ dla $\mu = 600$ pakietów/s. . . . .	102
3.7	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_5 > t\}$ dla $\mu = 600$ pakietów/s. . . . .	102
3.8	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_9 > t\}$ dla $\mu = 600$ pakietów/s. . . . .	103
3.9	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych w systemie w chwili $t = 0$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$ dla $\lambda = 250$ pakietów/s. . . . .	104

3.10	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych w systemie w chwili $t = 0$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$ dla $\lambda = 375$ pakietów/s. . . . .	105
3.11	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych w systemie w chwili $t = 0$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$ dla $\lambda = 500$ pakietów/s. . . . .	105
3.12	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych w systemie w chwili $t = 0$ na wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$ dla $\lambda = 625$ pakietów/s. . . . .	106
3.13	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ dla $\lambda = 250$ pakietów/s. . . .	107
3.14	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ dla $\lambda = 375$ pakietów/s. . . .	107
3.15	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ dla $\lambda = 500$ pakietów/s. . . .	108
3.16	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ dla $\lambda = 625$ pakietów/s. . . .	108
4.1	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartość średniego opóźnienia kolejkowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	151
4.2	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartość średniego opóźnienia kolejkowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 4\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	151
4.3	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartość średniego opóźnienia kolejkowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 7\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	152
4.4	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartość średniego opóźnienia kolejkowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 0\}$ dla $\mu = 500$ pakietów/s. . . . .	153
4.5	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartość średniego opóźnienia kolejkowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 4\}$ dla $\mu = 500$ pakietów/s. . . . .	154
4.6	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartość średniego opóźnienia kolejkowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 7\}$ dla $\mu = 500$ pakietów/s. . . . .	154
4.7	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na wartość średniego opóźnienia kolejkowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = n\}$ dla $\lambda = 300$ pakietów/s oraz $\mu = 1200$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 0.25$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 0.4375$ ). . . . .	156



4.8	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na wartość średniego opóźnienia kolejowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = n\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s oraz $\mu = 1200$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 0.5$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 0.875$ ). . . . .	157
4.9	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na wartość średniego opóźnienia kolejowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = n\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s oraz $\mu = 800$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 0.75$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 1.3125$ ). . . . .	158
4.10	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na wartość średniego opóźnienia kolejowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = n\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s oraz $\mu = 600$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 1.0$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 1.75$ ). . . . .	159
4.11	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na wartość średniego opóźnienia kolejowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = n\}$ dla $\lambda = 600$ pakietów/s oraz $\mu = 480$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 1.25$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 2.1875$ ). . . . .	160
4.12	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość średniego opóźnienia kolejowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 375$ pakietów/s oraz $\mu = 500$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 0.75$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 1.3125$ ). . . . .	161
4.13	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość średniego opóźnienia kolejowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 500$ pakietów/s oraz $\mu = 500$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 1.0$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 1.75$ ). . . . .	162
4.14	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość średniego opóźnienia kolejowania $\mathbf{E}\{v(t)   Y(0) = 0\}$ dla $\lambda = 625$ pakietów/s oraz $\mu = 500$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 1.25$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 2.1875$ ). . . . .	163
5.1	Porównanie wartości średniej $\mathbf{E}\{h(t)   X(0) = 0\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla prostego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (5.1.52) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik badań symulacyjnych – pomarańczowe kwadraty na wykresie. . . . .	191

5.2	Porównanie wartości średniej $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 0\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla złożonego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (5.2.52) – czarne linie na wykresie, z czego przerywana uzyskana dla algorytmu Gavera-Stehfesta, zaś ciągła dla algorytmu Abate-Choudhury-Whitt odwracania transformaty Laplace’a (skrótowiec 'Abathe'); 2) jako statystyczny wynik badań symulacyjnych – pomarańczowe kwadraty na wykresie. . . . .	192
5.3	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 0\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	194
5.4	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 5\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	195
5.5	Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń $\mu$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 10\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 600$ pakietów/s. . . . .	196
5.6	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 0\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\mu = 500$ pakietów/s. . . . .	197
5.7	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 5\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\mu = 500$ pakietów/s. . . . .	198
5.8	Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń $\lambda$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 10\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\mu = 500$ pakietów/s. . . . .	199
5.9	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = n\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 600$ pakietów/s oraz $\mu = 800$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 0.75$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 1.3125$ ). . . . .	200
5.10	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = n\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 600$ pakietów/s oraz $\mu = 600$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 1.0$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 1.75$ ). . . . .	201
5.11	Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń $n$ obecnych wewnątrz systemu w chwili $t = 0$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = n\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 600$ pakietów/s oraz $\mu = 480$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 1.25$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 2.1875$ ). . . . .	202

5.12	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 0\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 375$ pakietów/s oraz $\mu = 500$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 0.75$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 1.3125$ ). . . . .	203
5.13	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 0\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 500$ pakietów/s oraz $\mu = 500$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 1.0$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 1.75$ ). . . . .	204
5.14	Wpływ zmian wartości odwrotności skali $\xi = \lambda_v$ na wartość średnią $\mathbf{E}^X\{h(t)   Y(0) = 0\}$ liczby obsłużonych do chwili $t$ pakietów dla $\lambda = 625$ pakietów/s oraz $\mu = 500$ pakietów/s (obciążenie systemu $\rho = 1.25$ , średnie zapełnienie systemu $\kappa_b = 2.1875$ ). . . . .	205
6.1	Model upływu czasu modelu symulacyjnego w ujęciu Dynamiki Systemowej. . . . .	212
6.2	Uproszczony schemat modelu kolejkowego w ujęciu Dynamiki systemowej. . . . .	213
6.3	Schemat modelu kolejkowego typu $M^X/D/1/N$ w środowisku oprogramowania Vensim. . . . .	216
6.4	Wykresy prezentujące: zajętość bufora, tryb pracy serwera (0 - okres przestoju; 1 - obsługa zgłoszeń); dla scenariusza walidacyjnego w początkowych 500 ms od startu symulacji. . . . .	218
6.5	Wykresy prezentujące: zajętość bufora, napływ pakietów w czasie, tryb pracy serwera (0 - okres przestoju; 1 - obsługa zgłoszeń), sumaryczny okres obsługi pakietów; dla scenariusza walidacyjnego. . . . .	219
6.6	Maksymalny rozmiar pakietu danych (w bajtach), bez wliczonego zmiennego rozmiaru preambuły, w zależności od prędkości transmisji danych (ang. <i>Data Rate</i> ) oraz przyjętej normy regionalnej. (źródło: [39]) . . . . .	220
6.7	Procentowe zestawienie osiągniętych dla 100 różnych wartości ziarna, używanego do inicjalizacji generatora liczb pseudolosowych odpowiadających za losowość momentów napływu i rozmiaru grupy pakietów obsługiwalnych, optymalnych długości okresu przestoju. Średnia długość: 1.317 s, mediana: 1.3 s. . . . .	222
6.8	Porównanie charakterystyk pracy serwera ze względu na długość okresu przestoju. Tryby pracy serwera: 0 - okres przestoju; 1 - obsługa zgłoszeń. . . . .	222

6.9	Porównanie zajętości bufora kolejującego napływające zgłoszenia ze względu na długość okresu przestoju, dokonane w przedziale 20 s od startu systemu. . . . .	223
6.10	Porównanie zajętości bufora kolejującego napływające zgłoszenia ze względu na długość okresu przestoju, dokonane w przedziale 1000 s od startu systemu. . . . .	223
6.11	Przedziały ufności dla zajętości bufora kolejującego zgłoszenia w przedziale 1000 s od startu systemu. Czerwonym kolorem oznaczono średnią ilość zgłoszeń w buforze. . . . .	225
6.12	Przedziały ufności dla sumarycznego okresu zawieszenia obsługi w przedziale 1000 s od startu systemu. Czerwonym kolorem oznaczono średni okres. . . . .	226
6.13	Przedziały ufności dla sumarycznej ilości utraconych z powodu zapełnienia bufora pakietów w przedziale 1000 s od startu systemu. Czerwonym kolorem oznaczono średnią ilość. . . . .	226
6.14	Porównanie zajętości bufora kolejującego napływające zgłoszenia dla systemu z nowymi wartościami parametru $LAMBDA=375$ pakietów/s i prawdopodobieństw $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25\}$ . . . . .	227
6.15	Przedziały ufności dla zajętości bufora kolejującego zgłoszenia w przedziale 10 s od startu systemu – eksperyment z nowymi wartościami parametru $LAMBDA=375$ pakietów/s i prawdopodobieństw $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25\}$ . Czerwonym kolorem oznaczono średnią ilość zgłoszeń w buforze. . . . .	228

# Wstęp

Teoria kolejek, zwana również teorią masowej obsługi, na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat przyczyniła się do znaczącego rozwoju technologii w dziedzinie telekomunikacji, w szczególności w zakresie sieci oraz systemów komputerowych. Istotą tej teorii jest badanie zjawiska przetwarzania (obsługi) napływających do systemu teleinformatycznego zgłoszeń (pakietów). W procesie tym dochodzi do akumulacji zgłoszeń oczekujących na obsługę (czyli tworzenia kolejki zgłoszeń), zaś sama obsługa odbywa się wedle przyjętej w systemie dyscypliny (regulaminu). Postępująca informatyzacja społeczeństwa przekłada się na rosnące znaczenie tego typu systemów. Zaspokojenie popytu realizowane jest przez rozwój i upowszechnianie urządzeń oraz usług telekomunikacyjnych: począwszy od komputerów i Internetu, poprzez zyskujące na znaczeniu inteligentne urządzenia (ang. *smart device*) wykorzystujące jako medium sieci komórkowe bądź Internet, a skończywszy na mniej rozpowszechnionych, operujących w koncepcji Internetu rzeczy urządzeniach IoT (ang. *Internet of Things*) dla których medium stanowią bezprzewodowe sieci sensorowe lub Internet. Każde z wymienionych urządzeń generuje właściwy dla użytej technologii ruch sieciowy mający bezpośrednie przełożenie na proces kolejowania przesyłanych zgłoszeń.

W tym miejscu wskazany jest wspomnieć powiązane tematycznie prace Erlanga, którego powszechnie uważa się za prekursora teorii kolejek. Wkład Erlanga i kontekst, w którym pracował zostały dobrze opisane przez Brockmeyera, Halstrøma i Jensena w ich magisterskich wydaniach [20] jego artykułów. W swojej pracy z 1909 r. Erlang argumentował, że liczba połączeń przychodzących do centrali telefonicznej w danym przedziale czasu może zostać opisana rozkładem Poissona. Przyjmując to założenie otrzymał reprezentację dla rozkładu czasu oczekiwania na połączenie w sytuacji, w której rozmowy (połączenia) mają równą i stałą długość. W 1963 roku Kendall [91] zaproponował wprowadzenie uniwersalnej notacji dla wszystkich modeli kolejkowych. W [94] Kingman dokonał przeglądu najważniejszych wyników teorii kolejek, szczególnie tych uzyskanych w ciągu pierwszych sześćdziesięciu lat po artykule Erlanga z 1909 roku.

Istotny wkład teoretyczny do rozwoju teorii masowej obsługi wniósł Leonard Kleinrock. Najbardziej znane są jego wczesne prace dotyczące teorii kolejek [95] [96], które znalazły zastosowanie w wielu dziedzinach. Kluczowe

znaczenie mają tu matematyczne podstawy przełączania pakietów – jednej z podstawowych technik Internetu. Poza informatyką teoria kolejek wykorzystywana jest również w ekonomii, logistyce, transporcie, zarządzaniu, a także w innych gałęziach nauk technicznych.

Tematyka niniejszej rozprawy wpisuje się w nurt badań nad zagadnieniami występującymi w teorii masowej obsługi, koncentrując się na analizie systemów kolejkowych mających zastosowanie w sieciach komputerowych i telekomunikacji. W szczególności, przedmiotem rozważań ujętych w dysertacji są jednokanałowe modele kolejkowe z poissonowskim strumieniem wejściowym, skończonym rozmiarem bufora kolejki oraz dyscypliną zawieszania obsługi typu „multiple vacation”. Modele kolejkowe z ograniczoną pojemnością bufora akumulującego są przedmiotem intensywnych badań. Dzieje się tak ze względu na ich charakterystyczne właściwości, umożliwiające modelowanie procesów zachodzących np. w przełącznikach sieciowych (routerach), w których zachodzą zjawiska związane z: akumulacją pakietów w buforze urządzenia bądź ich utratą na skutek przepełnienia tegoż bufora, przetwarzaniem pakietów zgodnie z przyjętą dyscypliną, czy też opóźnieniem kolejkowania wynikającym z oczekiwania pakietów w buforze. W przypadku modeli kolejkowych z ograniczeniami w dostępie do serwera pojawia się dodatkowo możliwość bardziej precyzyjnego opisu rzeczywistych systemów, w których może dochodzić do tymczasowych przestoju w dostępie do urządzenia przetwarzającego pakiety. Rzeczony przestoje mogą wynikać m. in. z konieczności oszczędzania energii w urządzeniu zasilanym bateryjnie, które wobec zaistnienia odpowiednich okoliczności przechodzi z trybu pełnej gotowości w tryb zużywający mniejszą ilość energii. Przykładem takowej okoliczności jest sytuacja, w której system kolejkowy zostaje opróżniony z pakietów, wówczas urządzenie może przejść w niskoenergetyczny tryb nasłuchu i akumulacji nadchodzących w przyszłości pakietów.

Problem oszczędności energii w sieciach sensorowych został poruszony m. in. w pracach [107], [64], [77], przedstawiających różne typy modeli kolejkowych. Jak łatwo zauważyć, znakomita większość dostępnych w literaturze wyników analitycznych opracowanych dla modeli kolejkowych z ograniczeniami w dostępie do serwera dotyczy stanu ustalonego systemu. Charakterystyki stanu ustalonego ilustrują długoterminową pracę systemu, stanowiąc niezbędną podstawę do oceny efektywności ich pracy. Jednakże czasami w praktyce tranzytywna (niestacjonarna) analiza charakterystyk systemów kolejkowych jest wskazana lub wręcz konieczna. Wynika to m. in. z faktu występowania w ruchu sieciowym następujących zjawisk: samopodobieństwa (ang. *self-similarity*) – [35], [108], [168]; długookresowej zależności (ang. *long-range dependence*) – [38], [40], [176]; spiętrzenia pakietów (ang. *burstiness*) – [59], [122], [148]. Owe zjawiska mogą przyczyniać się do niemożności osiągnięcia przez system stanu ustalonego w krótkim horyzoncie czasu. Tranzytywna analiza zachowania systemów kolejkowych pozwala na monitorowanie ich pracy bezpośrednio po uruchomieniu systemu, a także w okresach przesto-

jów i sytuacjach destabilizacji pracy serwera oraz w przypadku, gdy stabilizacja systemu trwa relatywnie długo np. wskutek nieregularnego ruchu wejściowego. Ogólna postać zaprezentowanych w pracy wyników umożliwia modelowanie systemów, w których obsługa pakietów odbywa się zgodnie z dowolnym rozkładem prawdopodobieństwa.

Zaprezentowane w niniejszej rozprawie wyniki badań dotyczą tranzytowych (niestacjonarnych) charakterystyk modeli kolejkowych z jedną stacją obsługi zgłoszeń, skończonym buforem, poissonowskim strumieniem wejściowym oraz dyscypliną zawieszenia obsługi składającą się z wielokrotnych okresów przestoju (ang. *multiple vacation*), których długości w ogólnym przypadku są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa. Założenie skończoności bufora jest wysoce znaczące w przypadku modelowania procesów zachodzących w sieciach komputerowych, w szczególności w będących przedmiotem zainteresowań autora sieciach sensorowych, opartych często na urządzeniach o znacząco ograniczonej mocy przetwarzania i zasobach systemowych. Uzyskane w dysertacji wyniki analityczne charakterystyk kolejkowania są podane w postaci transformat Laplace'a oraz funkcji tworzących transformat Laplace'a. W pracy uzyskano szczegółowe wyniki dla następujących charakterystyk: długości kolejki, czasu do wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora akumulującego, czasu oczekiwania na obsługę oraz procesu liczącego obsłużone pakiety. Ponadto, wszystkie wymienione charakterystyki zostały wyznaczone zarówno dla pojedynczego jak i grupowego napływu pakietów do systemu.

Opisane w dysertacji wyniki badań uzyskano metodami analitycznymi, a zaprezentowane zostały w postaci twierdzeń, w których to wymienione w poprzednim akapicie charakterystyki są przedstawione w postaci funkcjonalów zależnych od parametrów modelu (np. rozmiaru bufora) oraz rozkładów prawdopodobieństwa (np. intensywności strumienia wejściowego, czasu obsługi zgłoszeń). Otrzymane wyniki teoretyczne są zilustrowane licznymi przykładami numerycznymi, wygenerowanymi z użyciem środowiska obliczeniowego Mathematica 12.1 [170]. Poprawność przedstawionych rozważań jest zweryfikowana metodą symulacji wykonanych w symulatorze zdarzeń dyskretnych OMNeT++ 5.6.1 [163] i zaprezentowana w podrozdziałach opisujących analizę porównawczą obliczeń numerycznych i symulacyjnych. Ponadto, z uwagi na specyfikę badanych w rozprawie modeli kolejkowych, zaproponowana została koncepcja wykorzystania metody Powella [131] przy doborze zoptymalizowanej długości okresów przestoju, występujących w rozważanym mechanizmie zawieszenia obsługi. W celu realizacji tej koncepcji, zagadnienia kolejkowania pakietów przeniesione zostały na grunt Dynamiki Systemowej, a za pomocą dedykowanego oprogramowania Vensim [165] stworzono model symulacyjny. Model ten został zweryfikowany poprzez wykonanie analizy porównawczej wyników symulacji, w zestawieniu z oczekiwanymi wartościami liczbowymi. Rezultaty przedstawionej metodyki uzyskiwania (przy użyciu symulacji) optymalnej długości okresu przestoju w rozważa-

nych modelach kolejkowych zostały zaprezentowane na przedstawionych w pracy wykresach.

Zasadnicza część zawartych w pracy rozważań, a mianowicie: Rozdziały 3, 5 i 6 oraz Rozdziały 2 i 4 za wyjątkiem zawartych w nich podrozdziałów 2.1 i 4.1 odpowiednio, stanowią oryginalne wyniki badań autora. Wyniki uzyskane m.in. z wykorzystaniem metodologii włożonych łańcuchów Markowa, twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych, metody potencjału oraz teorii odnowy zostały w znaczącej większości opublikowane w międzynarodowych czasopismach bądź materiałach konferencyjnych, a jeden wynik pochodzący z podrozdziału 3.1 ukazał się w monografii.

### **Cel rozprawy**

*Celem rozprawy jest stochastyczna analiza najważniejszych charakterystyk modeli kolejkowych z dyscypliną zawieszenia obsługi typu „multiple vacation” w stanie niestacjonarnym (tranzytywnym, w ustalonej chwili czasu t). Przedstawione w dysertacji rezultaty badań dotyczą:*

- precyzyjnego modelowania ruchu sieciowego z uwzględnieniem mechanizmu zawieszenia obsługi oraz skończonego rozmiaru bufora urzędzenia kolejującego pakiety;
- czterech kluczowych charakterystyk modeli w stanie nieustalonym, których rozkłady prawdopodobieństwa zostały wyznaczone analitycznie w postaci jawnej z użyciem transformat Laplace’a;
- strumienia wejściowego uwzględniającego zarówno pojedynczy jak i grupowy napływ pakietów;
- numerycznej analizy funkcjonowania rozważanych modeli;
- wykorzystania Dynamiki Systemowej oraz metody Powella przy doborze zoptymalizowanej długości okresów przestoju występujących w rozważanym mechanizmie zawieszenia obsługi.

### **Teza rozprawy**

*Matematyczne metody, oparte na wykorzystaniu koncepcji włożonego łańcucha Markowa, twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych, układów równań całkowitych typu Volterra, metody potencjału, a także wybranych narzędzi i wyników analizy matematycznej oraz teorii odnowy, umożliwiają precyzyjne modelowanie zachowania się systemów kolejkowych z mechanizmem zawieszenia obsługi w stanie nieustalonym. Dynamika zmian charakterystyk rozważanych systemów kolejkowych w stanie nieustalonym jest możliwa do odwzorowania w modelu symulacyjnym zbudowanym w oparciu o metodologię Dynamiki Systemowej, a analiza tejże dynamiki w skonstruowanym modelu z jednoczesnym zastosowaniem metody*



*Powella umożliwia dobór optymalnej długości okresów przestoju mechanizmu zawieszenia obsługi.*

Zawarte w pracy wyniki umożliwiają uzyskanie odpowiedzi na pytania, jak zmiana długości okresów przestoju, a także zmiany intensywności wpływu, intensywności obsługi, bądź wartości początkowej liczby obecnych w systemie pakietów, wpływają na:

- długość kolejki,
- rozkład prawdopodobieństwa czasu do pierwszego przepełnienia bufora,
- wirtualny czas oczekiwania na obsługę,
- liczbę obsłużonych pakietów w określonym czasie.

Inną kwestią, którą można rozstrzygnąć na podstawie wyników badań zaprezentowanych w dysertacji, jest ustalenie, po jakim czasie od startu praca systemu stabilizuje się i jaki wpływ na tę stabilizację ma jego stan początkowy. Ponadto, możliwe jest także określenie stopnia przełożenia warunków transmisyjnych występujących w systemie na możliwość doboru oraz wynikową wartość optymalnej długości okresów przestoju mechanizmu zawieszenia obsługi.

Zawarte w rozprawie wyniki przedstawione zostały według następującego porządku. W Rozdziale 1 opisano wstępne informacje na temat systemów kolejkowych typu  $M/G/1/N$ , a także stosowane oznaczenia i wyniki pomocnicze. Rozdziały 2 - 5 stanowią główną część rozprawy. Prezentują wyniki uzyskane dla tranzytywnych rozkładów prawdopodobieństwa charakterystyk takich jak długość kolejki, czas do pierwszego przepełnienia bufora, opóźnienia kolejkowania oraz proces liczący obsłużone zgłoszenia w modelach typu  $M/G/1/N$  z mechanizmem zawieszenia obsługi. Wyniki odnoszą się do kolejkowania prostych i złożonych procesów Poissona (co w praktyce oznacza uwzględnianie pojedynczego i grupowego napływu pakietów). Rozdział 6 opisuje zastosowanie Dynamiki Systemowej w celu symulowania zachowania się systemu  $M^X/D/1/N$  z mechanizmem zawieszenia obsługi rozważanym w rozprawie w dedykowanym oprogramowaniu Vensim. Stworzony model symulacyjny umożliwia wyznaczenie optymalnej długości okresów przestoju, występujących w rozważanym mechanizmie zawieszenia obsługi. Informacje uzupełniające w postaci kodu programu symulatora zdarzeń dyskretnych, umożliwiającego symulowanie zachowania się systemów kolejkowych  $M^X/G/1/N$  z dyscypliną zawieszenia obsługi, znajdują się w dodatku A w postaci dołączonego załącznika.

# Rozdział 1

## Model kolejkowy z dyscypliną zawieszenia obsługi typu „multiple vacation”

Sformułowanie *teoria kolejek* po raz pierwszy użyte zostało w pracy Kendalla [90], który to dwa lata później w artykule [91] zaproponował notację  $A/B/C$  wprowadzającą podział systemów masowej obsługi na poszczególne podtypy. W roku 1966 notacja Kendalla została rozwinięta przez Lee w pracy [104] poprzez wprowadzenie dodatkowych symboli  $K, L, D$ . W rezultacie notacja  $A/B/C/K/L/D$  określa system kolejkowy, w którym

- $A$  określa typ rozkładu zmiennej losowej czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami;
- $B$  określa typ rozkładu zmiennej losowej czasu obsługi zgłoszeń;
- $C$  oznacza liczbę stanowisk obsługi;
- $K$  oznacza rozmiar kolejki (maksymalną liczbę zgłoszeń, które mogą być równocześnie obecne w systemie);
- $L$  oznacza rozmiar źródła zgłoszeń;
- $D$  oznacza dyscyplinę obsługi zgłoszeń.

Przypadki, w których oznaczenia  $K$  i/lub  $L$  zostały pominięte odnoszą się do systemów, dla których dopuszczalny rozmiar kolejki i/lub rozmiar źródła zgłoszeń są nieskończone. Ponadto, pominięcie symbolu  $D$  jest utożsamiane z założeniem rozpatrywania naturalnej dyscypliny obsługi zgłoszeń FIFO (ang. *First In First Out*). W notacji Kendalla literze  $A$  mogą odpowiadać m. in. następujące symbole  $M, M^X, D, E_k, G$  oznaczające odpowiednio strumień wejściowy opisany procesem Poissona z pojedynczym bądź grupowym napływem zgłoszeń, rozkład deterministyczny, rozkład Erlanga rzędu  $k$  oraz rozkład dowolny czasów pomiędzy pojawianiem się kolejnych zgłoszeń. Wymienione oznaczenia mogą także odpowiadać literze  $B$ , przy czym  $M$  oznacza wówczas rozkład wykładniczy czasu obsługi pojedynczego zgłoszenia.

Uściślając, typowy model kolejkowy charakteryzowany jest przez:

1. Strumień wejściowy, czyli proces stochastyczny opisujący napływ zgłoszeń do systemu. Częstotliwość pojawiania się zgłoszeń jest charakteryzowana przez intensywność strumienia  $\lambda$ , oznaczającą średnią liczbę zgłoszeń pojawiających się w jednostce czasu, bądź też średni czas pomiędzy kolejnymi momentami wpływu zgłoszeń. W zależności od zastosowania konkretnego modelu kolejkowego zamiennie stosuje się określenia zgłoszenie, pakiet, klient, wiadomość. W niniejszej rozprawie głównie używamy będziemy terminów zgłoszenie i pakiet, przy czym szczegóły dotyczące stosowanej terminologii opisano w podrozdziale 1.2 po wprowadzeniu Definicji 1.9. Mając na uwadze matematyczną strukturę strumienia zdarzeń, możliwym jest scharakteryzowanie strumienia wejściowego poprzez rozkłady prawdopodobieństwa czasów pomiędzy występującymi po sobie momentami wpływu zgłoszeń. Najczęściej przyjmuje się, iż czasy te opisane są za pomocą niezależnych zmiennych losowych o takich samych rozkładach prawdopodobieństwa. W takim przypadku strumień wejściowy jest często modelowany za pomocą procesu Poissona: prostego bądź złożonego (rozkład wykładniczy czasów pomiędzy pojawianiem się kolejnych zgłoszeń lub grup zgłoszeń, odpowiednio). Innym szczególnym przypadkiem jest stałość odstępów czasów pomiędzy kolejnymi momentami napływu zgłoszeń – wówczas strumień wejściowy opisany jest w sposób deterministyczny.
2. Czas obsługi pojedynczego zgłoszenia, który może być zmienną losową bądź też może być stały (określony deterministycznie). Analogicznie jak w przypadku strumienia wejściowego, określa się intensywność obsługi zgłoszeń  $\mu$  na jednostkę czasu lub średni czas obsługi pojedynczego zgłoszenia. Modelując proces obsługi zgłoszeń zakładamy, że czas ich obsługi jest niezależny od strumienia wyjściowego. Zwróćmy także uwagę na fakt, iż czas obsługi zgłoszenia nie jest tożsamy z czasem pobytu pakietu w systemie. Powodem tego są opóźnienia kolejkowania zaistniałe w sytuacjach, gdy stanowisko obsługi jest zajęte, co wymusza oczekiwanie pakietu na obsługę w buforze kolejki. Obsługa zgłoszeń może również przebiegać grupowo, jednakże w niniejszej rozprawie nie będziemy zajmować się takimi przypadkami.
3. Liczbę stanowisk obsługi, odpowiedzialnych za równoległą obsługę zgłoszeń. Stanowiska te mogą współdzielić kolejkę lub też posiadać oddzielne kolejki. W terminologii zamiennie stosujemy określenia stanowisko obsługi, serwer, stacja obsługi.
4. Rozmiar (długość) kolejki, określający ilość miejsc na których akumuluje się zgłoszenia oczekujące na obsługę. Ilość tychże miejsc określana jest najczęściej słowem *pojemność bufora*. Należy zwrócić uwagę na fakt, iż pojemność systemu kolejkowego nie jest równa rozmiarowi bufora, gdyż pakiet bądź pakiety będące w trakcie obsługi nie są wliczane

## 1. Model kolejkowy z dyscypliną zawieszenia obsługi typu...

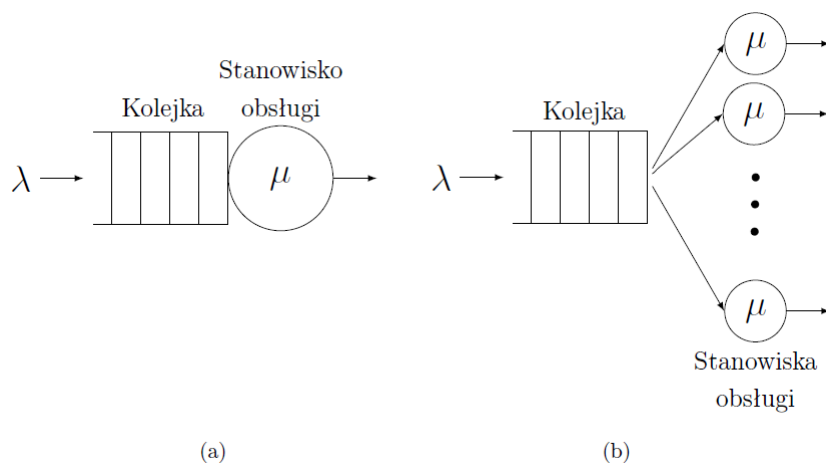
---

do tegoż rozmiaru. Jeśli w systemie kolejkowym znajdzie sytuacja, w której bufor zostaje zapełniony zgłoszeniami, wówczas - tak długo, jak trwa taka sytuacja - każde przychodzące zgłoszenie jest tracone - nie wchodzi do systemu z braku miejsca.

5. Dyscyplinę obsługi zgłoszeń, określającą kolejność, z jaką obsługiwane są zgłoszenia zakumulowane w buforze kolejki. Wyróżniamy następujące klasyczne algorytmy szeregowania:

- FIFO (ang. *First In First Out*) – kolejność obsługi jest zgodna z kolejnością napływu zgłoszeń do systemu ( regulamin *listy*);
- LIFO (ang. *Last In First Out*) – jako pierwsze obsługiwane jest ostatnie zakumulowane w buforze zgłoszenie, innymi słowy obowiązuje odwrotna względem napływu zgłoszeń kolejność ich obsługi (regulamin *stosu*);
- SIRO (ang. *Service In Random Order*) – losowa kolejność obsługi zgłoszeń;
- priorytetowa obsługa zgłoszeń, w której zgodnie z ustalonym algorytmem zgłoszeniom przypisany zostaje priorytet, wedle którego zgłoszenia uzyskują pierwszeństwo do bycia obsłużonym.

Rysunek 1.1 przedstawia schematy dwóch typowych systemów kolejkowych, posiadających jedno bądź wiele stanowisk obsługi.



Rysunek 1.1: Schemat systemu kolejkowego (a) z jednym stanowiskiem obsługi; (b) z wieloma stanowiskami obsługi.

Systemy kolejkowe ze skończonym buforem mają szerokie zastosowanie w modelowaniu kolejek występujących w węzłach sieci komputerowych oraz

telekomunikacyjnych [50], [149], [161]. Stąd znajomość charakterystyk stochastycznych takich systemów ma kluczowe znaczenie w ocenie wydajności modelowanych sieci [36], [37], [91]. Posiadając informacje o natężeniu ruchu w sieci oraz o intensywności obsługi zgłoszeń, możemy ustalić rozmiar kolejki w czasie, a tym samym dobrać odpowiedni rozmiar bufora w celu zminimalizowania liczby utraconych pakietów. Stopień intensywności obsługi zgłoszeń ma swoje przełożenie na czas pobytu pakietów w systemie, a z drugiej strony ma także wpływ na energooszczędność stanowiska obsługi. Modele kolejkowe są pomocne w osiąganiu satysfakcjonującego kompromisu pomiędzy kosztami obsługi zgłoszeń, a czasem oczekiwania w kolejce. Podstawą oceny wydajności modelu kolejkowego jest wyznaczenie probabilistycznych charakterystyk dotyczących:

- długości kolejki,
- czasu do wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora,
- czasu oczekiwania na obsługę pojedynczego zgłoszenia,
- liczby obsłużonych zgłoszeń w ustalonym okresie czasu,
- czasów trwania okresów przepełnienia bufora,
- czasów trwania okresów zajętości systemu,
- czasów trwania okresów bezczynności stacji obsługi,
- współczynnika wykorzystania stanowiska obsługi,
- współczynnika strat zgłoszeń z powodu przepełnienia bufora.

Systemy kolejkowe ze skończonym buforem są dosyć dobrze omówione w literaturze teorii kolejek, niemniej jednak stanowcza większość opracowań dotyczy stanu ustalonego. Analiza stanu ustalonego w niemarkowskich modelach najczęściej dokonywana jest poprzez wykorzystanie metody zmiennych uzupełniających (ang. *supplementary variables*) [171] do wyznaczenia równań Kołmogorowa [97], które to są rozwiązywane metodą operatorową. Odmienne podejście wykorzystuje zaproponowaną przez Kendalla [91] opartą na włożonych łańcuchach Markowa metodę wyznaczania charakterystyk kolejkowych za pomocą łańcuchów Markowa, które są wyekstrahowane z procesów niemarkowskich przy użyciu punktów regeneracji [128]. Rozwój przytoczonej metodyki postępowania został opisany w pracach [110] oraz [147], a polega on na zastosowaniu układów równań całkowych w analizie rozkładów prawdopodobieństwa. Kolejnym rozwinięciem tejże metodologii jest uwzględnianie teorii odnowy, dającej narzędzia umożliwiające wykonanie analizy tranzytywnej.

Jedną z pierwszych prac skupiających się na temacie analizy stanu nieustalonego w systemach kolejkowych jest artykuł [45], w którym zaproponowano metodę symulacyjnej analizy tranzytywnej modeli kolejkowych zależną od przyjętych warunków początkowych. W przypadku systemów kolejkowych typu  $M/M/1$ , w [129] została zaprezentowana analityczna charakterystyka napływu dokładnie  $i$  pakietów przy jednoczesnej obsłudze  $j$  pakietów, w zadanym przedziale czasu  $t$ . Charakterystyka ta ma szczególne znaczenie w przypadku modeli, w których następuje okresowe opróżnienie kolejki, poprzedzane akumulacją zgłoszeń w buforze. Innym artykułem traktującym o tranzytywnej analizie systemów typu  $M/M/1$ , jest [2]. Dokonano w nim aproksymacji momentów silni długości kolejki w funkcji czasu  $t$ , w których to momentach kolejka zostaje opróżniona. Proste przybliżenia wykładnicze i hiperwykładnicze dla funkcji pierwszych dwóch momentów pomagają pokazać, w jaki sposób kolejka zbliża się do stanu ustalonego w miarę upływu czasu. Wzory te pomagają również określić, czy opisy stanu ustalonego są uzasadnione, gdy intensywności napływu i obsługi pakietów są prawie stałe w pewnym przedziale czasu, ale ewolucja systemu nie rozpoczyna się w stanie ustalonym. W kolejnym artykule [3] pokazano, w jaki sposób można rozszerzyć analizę opartą na transformacie Laplace'a przeprowadzoną przez Baileya w pracach [12] i [13], aby uzyskać dodatkowe informacje na temat zależnej od czasu charakterystyki długości kolejki w modelu  $M/M/1$ . Zaprezentowano faktoryzację transformaty, która prowadzi do przedstawienia pierwszego momentu rozkładu długości kolejki jako funkcji czasu posiadającej dwie składowe monotoniczne. Faktoryzacja ułatwia opracowanie przybliżeń dla momentów i określenie ich asymptotycznego zachowania, gdy czas  $t \rightarrow \infty$ . Dalsze uogólnienie wyników analizy tranzytywnej przedstawiono w [65], gdzie wyprowadzony został rozkład czasu przebywania  $n$ -tego klienta w kolejce  $M/M/s$  z początkowo obecnymi  $k$  klientami. Opracowane są również algorytmy do obliczania kowariancji między czasami przebywania w kolejce  $M/M/1$  z  $k$  klientami obecnymi w czasie  $t = 0$ . W pracy zaprezentowano także opracowany kod komputerowy *Maple* do praktycznego zastosowania analizy tranzytywnej kolejek dla wielu miar wydajności systemu, bez względu na natężenie ruchu (także w przypadku niestabilnego systemu o zbyt dużym natężeniu ruchu).

Zaprezentowane w niniejszej dysertacji wyniki dla czterech wybranych tranzytywnych charakterystyk kolejkowych zostały uzyskane poprzez zastosowanie podejścia wykorzystującego różne techniki analityczne: ideę włożonego łańcucha Markowa, ciągłą formułę prawdopodobieństwa całkowitego, równania całkowe typu Volterra, metodę potencjału opracowaną przez V.S. Korolyuka oraz teorię odnowy. Otrzymane w rozprawie wyniki analityczne dla poszczególnych charakterystyk mają postać twierdzeń, w których w zwartej postaci podano reprezentacje (wzory) dla transformat Laplace'a bądź funkcji tworzących transformat Laplace'a rozkładów prawdopodobieństw badanych charakterystyk.

W celu otrzymania i wizualizacji wyników numerycznych dla uzyskanych transformat, zastosowano algorytmy numerycznego odwracania transformaty Laplace'a, a mianowicie algorytm Gavera-Stehfesta lub algorytm Abate-Choudhury-Whitt (obydwa algorytmy zaczerpnięto z pracy [1]). Do weryfikacji zaprezentowanych wyników numerycznych użyto symulacji zdarzeń dyskretnych, którą wykonano w dedykowanym środowisku OMNeT++, umożliwiającym symulowanie zachowania się systemów kolejkowych. W części A dołączonego załącznika zamieszczono napisane w języku C++ kluczowe funkcje, występujące w kodzie źródłowym napisanego symulatora.

## 1.1 Opis modelu

W rozprawie rozważamy modele kolejkowe typu  $M/G/1/N$  oraz  $M^X/G/1/N$ , w których napływ zgłoszeń opisywany jest odpowiednio za pomocą prostego i złożonego procesu Poissona, o zadanej parametrem  $\lambda$  intensywności. Obsługa zgłoszeń jest zgodna z naturalną dyscypliną FIFO, a czasy obsługi poszczególnych zgłoszeń są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach z dystrybuantą  $F(\cdot)$ . Maksymalna pojemność systemu (w sensie liczby zgłoszeń mogących przebywać w nim równocześnie) jest równa  $N$  ( $N - 1$  miejsc w buforze i jedno miejsce dla zgłoszenia aktualnie obsługiwanego). Każdorazowo w momencie, w którym kończy się obsługa zgłoszenia, a bufor nie zawiera innych zgłoszeń, serwer rozpoczyna okres zawieszenia obsługi. Okres ten składa się z kolejnych (*multiple*) okresów przestoju (*vacation*) będących zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach z dystrybuantą  $G(\cdot)$ . Po zakończeniu każdego z pojedynczych okresów przestoju monitorowany jest stan bufora, a wówczas jeśli zawiera on choć jedno zakolejkowane zgłoszenie, serwer nie uruchamia kolejnego okresu przestoju. W przeciwnym wypadku inicjalizowany jest kolejny okres przestoju określony dystrybuantą  $G(\cdot)$ .

Jedną z pierwszych prac badawczych opisujących rozważany w dysertacji model  $M/G/1/N$  z dyscypliną zawieszenia obsługi jest [105] autorstwa Lee, w której to rozkład długości kolejki jest badany przy użyciu złożonych łańcuchów Markowa. Wykorzystując technikę zmiennej uzupełniającej wyprowadzony został wzór ogólny dla rozkładu długości kolejki w stanie ustalonym, jak również wzór na prawdopodobieństwo zapełnienia bufora w tymże stanie. Poprzez stosowanie funkcji tworzących rozkładów prawdopodobieństwa otrzymano także rozkłady okresu zajętości i czasu oczekiwania. Autor dokonuje rozszerzenia badań, prezentując je w kolejnej pracy [106], w której rozważany jest model z serwerem rozpoczynającym okres zawieszenia obsługi, jeśli kolejka została opróżniona lub obsłużono  $m$  zgłoszeń w trakcie nieprzerwanej obsługi. Prezentowane w pracy charakterystyki długości kolejki oraz okresu zajętości w stanie ustalonym są wyprowadzone również dla bufora o nieograniczonej pojemności ( $N \rightarrow \infty$ ). Kolejny postęp w bada-

niach nad modelem został zaprezentowany m. in. przez Takagię w [152]. Autor wykorzystał analizę cyklu odnowy okresów zajętości serwera oraz zawieszenia przez niego obsługi do uzyskania miary przepustowości systemu i średniego czasu oczekiwania dla stanu ustalonego. Otrzymał On również transformatę Laplace'a-Stieltjesa funkcji rozkładu wirtualnego czasu oczekiwania na obsługę, poprzez zastosowanie metody zmiennych uzupełniających do łącznego rozkładu wielkości kolejki i czasu obsługi bądź jej zawieszenia. W pracy [116] analizowany jest stan nieustalony (tranzytywny) modelu  $M/G^{a,b}/1$  z grupową obsługą  $i$  zgłoszeń ( $a \leq i \leq b$ ) oraz buforem, który pozwala na zakumulowanie maksymalnie  $b$  zgłoszeń. Aby rozpocząć obsługę, wymagane jest minimum  $a$  zgłoszeń, a serwer rozpoczyna okres zawieszenia obsługi, gdy w buforze znajdzie mniej niż  $a$  zgłoszeń oczekujących. Jeśli serwer kończy okres przestoju i ponownie zastaje mniej niż  $a$  zgłoszeń oczekujących, natychmiast rozpoczyna kolejny okres, a wszystkie następujące kolejno po sobie okresy przestoju wspólnie stanowią jeden ciągły okres zawieszenia obsługi. Autorzy, korzystając z teorii procesów odnowy, wyprowadzili formuły na zależne od czasu prawdopodobieństwo, iż system w chwili  $t$  znajduje się w stanie  $(i, j)$  należącym do następującej przestrzeni stanów  $S = \{(i, j); a \leq i \leq b, 0 \leq j \leq b\} \cup \{(0, j); 0 \leq j \leq b\}$ .

Zaprezentowane w niniejszej dysertacji wyniki również zostały uzyskane poprzez zastosowanie idei włożonych łańcuchów Markowa do badania konkretnych charakterystyk stochastycznych modeli, lecz dodatkowo wykorzystano wiele innych narzędzi, takich jak układy równań całkowych typu Volterra, które to równania są sformułowane w oparciu o identyfikację momentów Markowa (odnowy) oraz na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych. Otrzymanie wyników analitycznych w zwartej postaci było możliwe dzięki wykorzystaniu metody potencjału Korolyuka, pozwalającej na zapis rozwiązania pewnego specyficznego układu równań liniowych za pomocą rekurencyjnie zdefiniowanego ciągu. Takie podejście umożliwia precyzyjne modelowanie zachowania systemów kolejkowych z mechanizmem zawieszenia obsługi w stanie nieustalonym, co stanowi istotny wkład do stanu wiedzy o modelach kolejkowych typu  $M/G/1/N$  i  $M^X/G/1/N$ .

Wyniki analityczne dla czterech wybranych charakterystyk zostaną opisane w kolejnych rozdziałach:

- długość kolejki (dokładniej: rozkład prawdopodobieństwa łącznej liczby zgłoszeń znajdujących się w systemie) – Rozdział 2,
- rozkład prawdopodobieństwa czasu do pierwszego przepełnienia bufora – Rozdział 3,
- opóźnienie kolejkowania – Rozdział 4,
- proces liczący obsłużone zgłoszenia – Rozdział 5.



Każdy z rozdziałów posiada podobny układ. Najpierw wyznaczana jest transformata Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa opisywanej charakterystyki dla prostego procesu Poissona (pojedynczy napływ zgłoszeń). Następnie analogiczny wynik osiągany jest dla procesu złożonego (grupowy napływ zgłoszeń). W kolejnym kroku prezentowana jest analiza numeryczna, wykorzystująca odwracanie transformat Laplace'a (Rozdziały 2 i 3), bądź wyznaczona zostaje funkcja tworząca transformaty Laplace'a (Rozdziały 4 i 5), która to podlega procesowi odwracania. Na koniec dokonywane jest podsumowanie uzyskanych wyników oraz zestawienie ich ze stanem wiedzy w istniejącej literaturze przedmiotu.

## 1.2 Oznaczenia i wyniki pomocnicze

W tym podrozdziale wprowadzimy niezbędne definicje i przytoczymy pewne wyniki pomocnicze, które będą wykorzystywane w rozprawie.

**Definicja 1.1.** Funkcję dwuargumentową  $\delta : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$  określoną w następujący sposób:

$$\delta(i, j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

nazywamy *deltą Kroneckera*.

**Definicja 1.2.** Niech  $\mathbb{A}$  będzie zdarzeniem losowym. *Indykatozem* zdarzenia  $\mathbb{A}$  nazywamy funkcję określoną w następujący sposób:

$$I(\mathbb{A}) = \begin{cases} 1, & \text{gdy zachodzi zdarzenie } \mathbb{A}, \\ 0, & \text{gdy nie zachodzi zdarzenie } \mathbb{A}. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

**Definicja 1.3.** Symbolem  $\bar{G}(\cdot)$  oznaczamy tzw. *ogon dystrybuanty*  $G(\cdot)$ , który jest funkcją określoną dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  zależnością  $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$ .

**Definicja 1.4.** Dla dystrybuanty  $G(\cdot)$  nieujemnej zmiennej losowej symbolem  $G^{i*}(\cdot)$  oznaczamy *i-krotny splot Laplace'a-Stieltjesa*  $G^{i*}(\cdot)$  tej dystrybuanty (z sobą), który określony jest w następujący sposób:

$$G^{0*}(t) = 1, \quad G^{i*}(t) = \int_0^t G^{(i-1)*}(t-y) dG(y) \quad (1.2.3)$$

gdzie  $t \geq 0$  oraz  $i = 1, 2, \dots$

**Definicja 1.5.** Dla ciągu liczbowego  $(p_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , symbolem  $p_j^{i*}$  oznaczamy *j-ty element i-krotnego splotu* elementów ciągu  $(p_k)$  (z sobą), który określamy w następujący sposób:

$$p_j^{0*} = \delta_{0,j}, \quad p_j^{1*} = p_j, \quad p_j^{i*} = \sum_{k=0}^j p_k^{(i-1)*} p_{j-k} \quad (1.2.4)$$

gdzie  $i = 2, 3, \dots$

**Definicja 1.6.** Niech  $G(\cdot)$  będzie dystrybuantą nieujemnej zmiennej losowej. *Transformatę Laplace'a-Stieltjesa* dystrybuanty  $G(\cdot)$  definiujemy za pomocą równości

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} dG(u), \quad (1.2.5)$$

gdzie  $s > 0$ .

W rozprawie wprowadzimy następującą terminologię z zakresu przetwarzania danych (Definicje 1.7 – 1.13).

**Definicja 1.7.** *Podstawową jednostką objętości*, oznaczoną symbolem  $v$ , nazywamy ustaloną wielkość wyrażoną w bajtach [B], która określać będzie rozmiar strumienia bitów możliwego do przetworzenia przez serwer pojedynczo jako całość.

**Definicja 1.8.** *Zgłoszeniem (pakietem) napływającym* do systemu nazywamy pakiet będący sformatowaną jednostką informacji o rozmiarze, wyrażonym w bajtach, będącym wielokrotnością  $k \cdot v$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) podstawowej jednostki objętości.

**Definicja 1.9.** *Zgłoszeniem (pakietem) obsługiwalnym* nazywamy pakiet o rozmiarze podstawowej jednostki objętości  $v$ , który jest sformatowaną jednostką informacji możliwą do umieszczenia w buforze i do przetworzenia przez serwer.

Zgłoszenie napływające, którego rozmiar jest równy podstawowej jednostce objętości, jest zgłoszeniem obsługiwalnym. Każde zgłoszenie napływające do systemu, posiadające rozmiar  $k \cdot v$ ,  $k = 2, 3, \dots$  jest utożsamiane z grupą  $k$  zgłoszeń obsługiwalnych. Słów „zgłoszenie” i „pakiet” będziemy używać zamiennie jako synonimów w całej rozprawie, a słowa te występujące bez przymiotnika (określenia) w domyśle odnosić się będą do zgłoszeń obsługiwalnych.

**Definicja 1.10.** Dla ciągu liczbowego  $(p_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , określającego prawdopodobieństwa nadejścia zgłoszenia napływającego o rozmiarze  $k \cdot v$ , symbolem  $\varepsilon$  oznaczamy tzw. *średni rozmiar grupy*, który określamy zależnością

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \quad (1.2.6)$$

gdzie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ .

**Definicja 1.11.** Symbolem  $B_\varepsilon$  oznaczamy tzw. *średni rozmiar pakietu* w bajtach, który jest określony zależnością  $B_\varepsilon = v \cdot \varepsilon$ .

**Definicja 1.12.** *Obciążeniem systemu*, oznaczonym symbolem  $\rho$ , nazywać będziemy iloraz wartości intensywności napływu zgłoszeń (napływających)  $\lambda$  [pakietów/s] oraz intensywności obsługi zgłoszeń (obsługiwalnych)  $\mu$  [pakietów/s]:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1.2.7)$$

W teorii kolejek istnieje dwoistość sposobu obliczania obciążenia systemu z uwagi na pojedynczy bądź grupowy napływ zgłoszeń. Wzorem dla Definicji 1.12 jest opracowanie [30] (str. 41, przypis numer 8) w którym obciążenie systemu dla kolejkowania procesu (prostego) Poissona jest zdefiniowane jako tak zwane obciążenie oferowane, tzn. iloczyn wartości intensywności strumienia wejściowego i średniego czasu obsługi. Sposób obliczania obciążenia zmienia się w przypadku kolejkowania złożonego procesu Poissona (np. [30], wzór (2.72), str. 49), gdyż należy wówczas uwzględnić średni rozmiar grupy  $\varepsilon$ . Zaprezentowana dwoistość stanowi standardowe podejście w kwestii definiowania obciążenia. W rozprawie posłużymy się wprowadzonym w Definicji 1.13 terminem „średniego zapełnienia systemu” (ang. *average fullness metric*), pozostając przy jednolitej definicji obciążenia systemu dla procesów prostego i złożonego (jako stosunku liczby zgłoszeń napływających do liczby zgłoszeń obsługiwalnych w jednostce czasu). Termin średniego zapełnienia inspirowany jest opracowaniami:

- [135] – gdzie występuje średnie zapełnienie wirtualnego bufora wykorzystywanego w symulatorze dekodera DVB-H;
- [134] – w rozprawie wprowadzono średnie zapełnienie bufora w koncepcyjnym modelu algorytmów adaptacyjnych DASH;
- [56] – w którym występuje średnie zapełnienie pamięci podręcznej w systemach pamięci masowej (tłumaczenie w języku polskim dostępne w [57]);
- [101] – w artykule zaproponowano system obsługi strumieniowego przesyłu wideo przez sieć bezprzewodową, który opiera się na adaptacyjnym zarządzaniu buforem odtwarzania po stronie protokołu HTTP klienta. Wykorzystuje on koncepcję regresji do przewidywania przyszłego zapełnienia bufora dla ustalonego przedziału czasu. Informacja zwrotna wysyłana do serwera zależy od wartości średniego zapełnienia bufora i jego trendu w zadanym przedziale czasowym.

**Definicja 1.13.** Średnim wypełnieniem systemu, oznaczonym symbolem  $\kappa_b$ , nazywamy iloczyn średniego rozmiaru pakietu  $\varepsilon$  [B] oraz obciążenia systemu  $\rho$ :

$$\kappa_b = \varepsilon \cdot \rho. \quad (1.2.8)$$

Występująca w Definicji 1.13 miara ma jednolitą i uniwersalną postać zarówno dla prostego jak i złożonego procesu Poissona – w przypadku prostego procesu jej wartość jest równa obciążeniu systemu (wyliczony ze wzoru (1.2.6) średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1$ ).

Poniższe twierdzenia, o kluczowym znaczeniu dla rozprawy, zaczerpnięte zostały z prac [30] i [99]. Ich istotą jest możliwość zapisu w zwartej postaci rozwiązania pewnego specyficznego układu równań liniowych. W zapisie rozwiązania wykorzystuje się tzw. potencjał zdefiniowany rekurencyjnie dla ciągu współczynników układu. Stąd samą metodę otrzymywania w ten sposób rozwiązania układu nazywa się metodą potencjału (w szczególności jest ona opisana w pracy V.S. Korolyuka [99]).

**Twierdzenie 1.1.** Niech dane będą dwa ciągi liczbowe  $(a_n)$  oraz  $(\phi_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dodatkowo niech  $a_0 \neq 0$ .

*Każde rozwiązanie następującego układu równań liniowych:*

$$\sum_{k=-1}^{n-1} a_{k+1}x_{n-k} - x_n = \phi_n, \quad n \geq 1, \quad (1.2.9)$$

można wyrazić za pomocą wyrazów ciągów  $(a_n)$  i  $(\phi_n)$  w następującej formie:

$$x_n = CR_n + \sum_{k=1}^n R_{n-k}\phi_k, \quad n \geq 1, \quad (1.2.10)$$

gdzie  $C$  jest pewną stałą, zaś ciąg  $R_k$  (nazywany potencjałem ciągu  $(a_n)$ ) ma następującą postać:

$$R_0 = 0, R_1 = a_0^{-1}, R_{k+1} = R_1 \left( R_k - \sum_{i=0}^k a_{i+1}R_{k-i} \right) \quad (1.2.11)$$

dla  $k \geq 1$ .

Za pomocą operacji na indeksach z Twierdzenia 1.1 można otrzymać następujące:

**Twierdzenie 1.2.** Niech dane będą dwa ciągi liczbowe  $(a_n)$  oraz  $(\psi_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dodatkowo niech  $a_0 \neq 0$ .

*Każde rozwiązanie następującego układu równań liniowych:*

$$\sum_{k=-1}^n a_{k+1}x_{n-k} - x_n = \psi_n, \quad n \geq 0, \quad (1.2.12)$$

można wyrazić za pomocą wyrazów ciągów  $(a_n)$  i  $(\psi_n)$  w następującej formie:

$$x_n = CR_{n+1} + \sum_{k=0}^n R_{n-k}\psi_k, \quad n \geq 0, \quad (1.2.13)$$

gdzie  $C$  jest stałą, a ciąg  $R_k$  został określony w (1.2.11).

W rozprawie powyższe twierdzenia zostaną zastosowane w następujących wersjach, w których zamiast ciągów liczbowych występują odpowiadające im ciągi funkcyjne o ustalonych wartościach argumentów (por. [30]).

**Twierdzenie 1.3.** Niech dane będą dwa ciągi funkcyjne  $(a_n(s))$  oraz  $(\phi_n(s))$ , przy czym  $a_0(s) \neq 0$ . Każde rozwiązanie układu równań postaci

$$\sum_{k=-1}^{n-1} a_{k+1}(s)x_{n-k}(s) - x_n(s) = \phi_n(s), \quad n \geq 1 \quad (1.2.14)$$

można wyrazić w następującej formie:

$$x_n(s) = C(s)R_n(s) + \sum_{k=1}^n R_{n-k}(s)\phi_k(s), \quad n \geq 1 \quad (1.2.15)$$

gdzie  $C(s)$  nie zależy od  $n$ , zaś ciąg  $R_k(s)$  jest zdefiniowany w następujący sposób (por. (1.2.11)):

$$R_0(s) = 0, \quad R_1(s) = a_0^{-1}(s), \quad R_{k+1}(s) = R_1(s) \left[ R_k(s) - \sum_{i=0}^k a_{i+1}(s)R_{k-i}(s) \right] \quad (1.2.16)$$

dla  $k \geq 1$ .

**Twierdzenie 1.4.** Niech dane będą dwa ciągi funkcyjne  $(a_n(s))$  oraz  $(\psi_n(s, y))$ , przy czym  $a_0(s) \neq 0$ . Każde rozwiązanie układu równań postaci

$$\sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s)x_{n-k}(s, y) - x_n(s, y) = \psi_n(s, y), \quad n \geq 0 \quad (1.2.17)$$

można wyrazić w następującej formie:

$$x_n(s, y) = C(s, y)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s)\psi_k(s, y), \quad n \geq 0 \quad (1.2.18)$$

gdzie  $C(s, y)$  nie zależy od  $n$ , zaś ciąg  $R_k(s)$  został określony w (1.2.16).

W uzyskaniu wyników analitycznych zaprezentowanych w rozprawie istotne będzie także wykorzystanie formuły prawdopodobieństwa całkowitego (w wersji ciągłej) występujące m. in. w [30].

**Twierdzenie 1.5.** *(o prawdopodobieństwie całkowitym) Jeżeli zmienna losowa  $\zeta$  ma dystrybuantę  $\Gamma_\zeta(\cdot)$ , to*

$$\Gamma_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi < x | \zeta = y) d\Gamma_\zeta(y) \quad (1.2.19)$$

zachodzi dla dowolnej zmiennej losowej  $\xi$ .

W podsumowaniach rozdziałów dotyczących długości kolejki i opóźnienia kolejowania opisano sposób otrzymania wyników (w postaci transformaty) w stanie ustalonym (stacjonarnym). Metoda ta korzysta z cytowanego poniżej Twierdzenia, którego źródło możemy znaleźć m. in. w [31], [98], [125], [75].

**Twierdzenie 1.6.** *(Taubera) Niech  $W(t)$  będzie funkcją rzeczywistą. Jeżeli istnieje granica  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)$  oraz zbieżna jest całka  $\int_0^\infty e^{-st} W(t) dt$ , wówczas*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \lim_{s \downarrow 0} s \cdot \int_0^\infty e^{-st} W(t) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (1.2.20)$$

# Rozdział 2

## Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

Wyznaczanie charakterystyk kolejkowania rozważanego przez nas modelu z dyscypliną zawieszenia obsługi rozpoczniemy od rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki (dokładniej: całkowitej liczby zgłoszeń) w systemie w ustalonej chwili  $t$ , czyli w stanie niestacjonarnym (tranzytywnym) systemu. Zaprezentowana w rozdziale metodologia pozwoli nam na otrzymanie ogólnych wyników w zwartej postaci (twierdzeń) zarówno dla prostego (podrozdział 2.1) jak i złożonego procesu Poissona (podrozdział 2.2). Następnie zastosujemy algorytm numerycznego odwracania transformaty Laplace'a [1] i przyjrzymy się wynikom obliczeń numerycznych zobrazowanych na wykresach (podrozdział 2.3). Otrzymane rozkłady liczby zgłoszeń (pakietów) są uzależnione od przyjętych w eksperymentach parametrów początkowych. W końcowej części rozdziału omówimy otrzymane charakterystyki długości kolejki.

### 2.1 Prosty proces Poissona

Rozważmy model kolejkowy typu  $M/G/1/N$ , w którym zgłoszenia napływają do systemu zgodnie z prostym procesem Poissona o intensywności  $\lambda$ . Obsługa zgłoszeń jest zgodna z naturalną dyscypliną FIFO (ang. *First In First Out*), w której zgłoszenia obsługiwane są w takiej kolejności, w jakiej pojawiają się w systemie. Czasy obsługi poszczególnych zgłoszeń są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach z dystrybuantą  $F(\cdot)$ . Nadchodzące zgłoszenie, które zastanie serwer zajęty obsługą zostaje umieszczone w buforze, którego pojemność wynosi  $N - 1$  zgłoszeń. Maksymalna pojemność systemu (w sensie liczby zgłoszeń, które mogą w nim przebywać równocześnie) jest zatem równa  $N$  ( $N - 1$  miejsc w buforze i jedno miejsce dla zgłoszenia aktualnie obsługiwanego).

Każdorazowo w momencie, w którym system zostaje opróżniony ze zgłoszeń (kończy się obsługa zgłoszenia, a bufor nie zawiera innych zgłoszeń) serwer rozpoczyna okres zawieszenia obsługi składający się z kolejnych okre-

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

sów przestoju (ang. *vacation*) będących zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach z dystrybuantą  $G(\cdot)$ . Po zakończeniu każdego z pojedynczych okresów przestoju monitorowany jest stan bufora. Jeśli zawiera on choć jedno zgłoszenie oczekujące na przetworzenie, serwer nie uruchamia kolejnego okresu przestoju. W przeciwnym wypadku kolejny okres przestoju określony dystrybuantą  $G(\cdot)$  jest inicjalizowany (ang. *multiple vacation policy*).

Oznaczmy przez  $X(t)$  liczbę zgłoszeń obecnych w systemie w chwili  $t$ , wliczając tu zgłoszenia znajdujące się w buforze oraz zgłoszenie ewentualnie obsługiwane w tej chwili. Przyjmijmy następujące oznaczenie:

$$P_n(t, m) = \mathbf{P}\{X(t) = m \mid X(0) = n\}, \quad t > 0, 0 \leq m, n \leq N. \quad (2.1.1)$$

$P_n(t, m)$  jest prawdopodobieństwem warunkowym, że w systemie w chwili  $t$  znajduje się dokładnie  $m$  zgłoszeń, jeśli system ten rozpoczyna pracę w chwili 0 z dokładnie  $n$  zgłoszeniami obecnymi.

Przy założeniu, że system jest pusty ( $n = 0$ ) w chwili  $t = 0$  (czyli w momencie jego uruchomienia), w chwili tej rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi. Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym ([30] podrozdział 5.4) otrzymujemy następujące równanie:

$$\begin{aligned} P_0(t, m) &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(u+v-y)]^k}{k!} \right. \\ &\times e^{-\lambda(u+v-y)} P_{k+1}(t-u-v, m) + P_N(t-u-v, m) \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{[\lambda(u+v-y)]^k}{k!} \\ &\times e^{-\lambda(u+v-y)} \left. \right\} dG(v) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} \bar{G}(t-u) dy \\ &\times \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} \frac{[\lambda(t-y)]^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda(t-y)} + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{[\lambda(t-y)]^k}{k!} \right. \\ &\times e^{-\lambda(t-y)} \left. \right\} + \delta_{m,0} e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

gdzie  $\delta_{i,j}$ ,  $I\{A\}$ ,  $\bar{G}(\cdot)$ ,  $G^{i*}(\cdot)$  określono w Definicjach 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 odpowiednio.

Z prawej strony wzoru (2.1.2) możemy wyróżnić pięć składników stanowiących sumę. Pierwszy element sumy odpowiada sytuacji, w której okres zawieszenia obsługi kończy się przed chwilą  $t$  i w chwili jego zakończenia liczba zgłoszeń zakumulowanych w buforze jest mniejsza od całkowitej jego pojemności – w tej sytuacji obsługa zgłoszeń rozpoczyna się po zakończeniu ostatniego okresu przestoju (w momencie  $u+v$ ). Drugi składnik reprezentuje stan całkowitego zapelnienia bufora w momencie zakończenia okresu



## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

zawieszenia obsługi, kończącego się przed chwilą  $t$ . Trzeci składnik opisuje przypadek, w którym pierwsze zgłoszenie wpływa do systemu przed chwilą  $t$ , jednakże okres zawieszenia obsługi kończy się po tej chwili, przy czym  $m \leq N - 1$ . Czwarty składnik sumy reprezentuje stan przedstawiony w trzecim, z tą różnicą, że  $m = N$ . Ostatni element sumy odpowiada sytuacji, w której pierwsze zgłoszenie napływa do serwera po chwili  $t$ , tym samym zdarzenie losowe  $\{X(t) = m\}$  ma prawdopodobieństwo równe 1 dla  $\{m = 0\}$  oraz 0 w każdym innym przypadku.

W modelu kolejkowym typu  $M/G/1$  momenty zakończenia obsługi pakietów, a w szczególności momenty przechodzenia w stan zawieszenia obsługi, są momentami Markowa. Wynika to z własności „braku pamięci” rozkładu wykładniczego czasów pomiędzy pojawianiem się kolejnych zgłoszeń [61]. Załóżmy, że w systemie w momencie rozpoczęcia jego pracy (czyli w chwili  $t = 0$ ) znajduje się dokładnie  $n$  zgłoszeń ( $X(0) = n$ ), przy czym  $1 \leq n \leq N$ . Zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym względem pierwszej chwili ukończenia obsługi umożliwia nam wyprowadzenie następującego układu równań całkowych:

$$\begin{aligned}
 P_n(t, m) &= \int_{y=0}^t \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} P_{n+k-1}(t-y, m) + P_{N-1}(t-y, m) \right. \\
 &\times \left. \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} \right] dF(y) + \left( I\{n \leq m \leq N-1\} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} \right. \\
 &\left. + \delta_{m,N} \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) e^{-\lambda t} \bar{F}(t). \tag{2.1.3}
 \end{aligned}$$

Prawa strona równania (2.1.3), analogicznie do wzoru (2.1.2), jest sumą czterech składników. Pierwszy ze składników odpowiada sytuacji, w której pierwsza chwila ukończenia obsługi  $y$  występuje przed czasem  $t$  oraz do momentu  $y$  nie wystąpiło całkowite wypełnienie bufora – w takim przypadku liczba pakietów przybyłych do momentu  $y$  nie może przekroczyć wartości  $N - n - 1$ . Drugi element sumy reprezentuje stan przedstawiony w pierwszym, z tą różnicą, że do momentu  $y$  bufor został całkowicie wypełniony. W konsekwencji do tej chwili napłynęło co najmniej  $N - n$  zgłoszeń. Trzeci składnik opisuje przypadek, w którym pierwsze ukończenie obsługi wypada po czasie  $t$  (ma to miejsce z prawdopodobieństwem  $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ ) dla kolejki o długości  $m$  nieprzekraczającej pojemności bufora (tj.  $n \leq m \leq N - 1$ ), co oznacza iż do systemu do chwili  $t$  przybyło dokładnie  $m - n$  zgłoszeń. Ostatni element sumy odpowiada sytuacji opisanej w trzecim, z tą różnicą, że w chwili  $t$  stan systemu wynosi  $N$ , zatem do tej chwili przybyło co najmniej  $N - n$  pakietów.

Wprowadźmy następujące oznaczenie transformaty Laplace’a rozkładu

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

liczby zgłoszeń:

$$\widehat{P}_n(s, m) = \int_0^\infty e^{-st} P_n(t, m) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (2.1.4)$$

Wyznaczenie układu równań dla transformat Laplace'a wzorów (2.1.2) i (2.1.3) podzielimy na kilka etapów, których liczba jest uwarunkowana ilością zgrupowanych pod wspólnymi całkami składników w obydwu rozważanych sumach (trzy elementy w (2.1.2) i dwa w (2.1.3)).

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (2.1.2) ma postać:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(u+v-y)]^k}{k!} \right. \\ & \times e^{-\lambda(u+v-y)} P_{k+1}(t-u-v, m) + P_N(t-u-v, m) \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{[\lambda(u+v-y)]^k}{k!} \\ & \left. \times e^{-\lambda(u+v-y)} \right\} dG(v) = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{t-u} dG(v) \int_{y=u}^{u+v} e^{-\lambda y} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} [u+v-y]^k \right. \\ & \times e^{-\lambda(u+v-y)} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} P_{k+1}(t-u-v, m) + P_N(t-u-v, m) \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \\ & \left. \times [u+v-y]^k e^{-\lambda(u+v-y)} \right\} dy = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{t-u} e^{-\lambda v} dG(v) \\ & \times \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} P_{k+1}(t-u-v, m) \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{y=u}^{u+v} [u+v-y]^k dy \right. \\ & \left. + P_N(t-u-v, m) \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{y=u}^{u+v} [u+v-y]^k dy \right\} \quad (2.1.5) \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\int_{y=u}^{u+v} [u+v-y]^k dy = - \frac{[u+v-y]^{k+1}}{k+1} \Big|_{y=u}^{u+v} = \frac{v^{k+1}}{k+1}, \quad (2.1.6)$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

zatem (2.1.5) przyjmie formę:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{t-u} e^{-\lambda v} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} \right. \\
& \times P_{k+1}(t-u-v, m) + P_N(t-u-v, m) \left. \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} \right\} dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} dt \int_{v=0}^{t-u} e^{-\lambda v} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} \right. \\
& \times P_{k+1}(t-u-v, m) + P_N(t-u-v, m) \left. \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} \right\} dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-\lambda v} dG(v) \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-st} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} \right. \\
& \times P_{k+1}(t-u-v, m) + P_N(t-u-v, m) \left. \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} \right\} dt = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} \right. \\
& \times P_{k+1}(t-u-v, m) + P_N(t-u-v, m) \left. \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} \right\} dt. \quad (2.1.7)
\end{aligned}$$

Następnie w równaniu (2.1.7) dokonamy podstawień  $\underline{k} = k + 1$  oraz  $\underline{t} = t - u - v$ . Dla uproszczenia zapisu wzorów przyjmijmy notację nowych zmiennych niezawierającą podkreśleń.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\lambda v)^k}{k!} \right. \\
& \times P_k(t, m) + P_N(t, m) \left. \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} \right\} dt = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \right. \\
& \times P_k(t, m) dt + \sum_{k=N}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} P_N(t, m) dt \left. \right\} \\
& \quad (2.1.8)
\end{aligned}$$

Korzystając z wprowadzonego w Definicji 1.6 oznaczenia transformaty Laplace'a-Stieltjesa możemy zapisać

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) = \sum_{i=0}^{\infty} [g(\lambda + s)]^i = (1 - g(\lambda + s))^{-1}, \quad (2.1.9)$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

wobec czego równanie (2.1.8) przyjmie postać:

$$(1 - g(\lambda + s))^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \right. \\ \left. \times P_k(t, m) dt + \sum_{k=N}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} P_N(t, m) dt \right\}. \quad (2.1.10)$$

Stosując oznaczenie (2.1.4) otrzymamy

$$(1 - g(\lambda + s))^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \hat{P}_k(s, m) \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \right. \\ \left. + \hat{P}_N(s, m) \sum_{k=N}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \right\}. \quad (2.1.11)$$

Definiując

$$b_k(s) \stackrel{def}{=} (1 - g(\lambda + s))^{-1} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \quad (2.1.12)$$

dostajemy ostateczną postać pierwszego składnika po prawej stronie wzoru (2.1.2)

$$\sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) \hat{P}_k(s, m) + \hat{P}_N(s, m) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s). \quad (2.1.13)$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (2.1.2) ma postać:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} e^{-\lambda(t-y)} \right. \\ \left. \times \frac{[\lambda(t-y)]^{m-1}}{(m-1)!} \bar{G}(t-u) + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{[\lambda(t-y)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-y)} \bar{G}(t-u) \right\} dy = \\ \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} e^{-\lambda(t-y)} \right. \\ \left. \times \frac{[\lambda(t-y)]^{m-1}}{(m-1)!} \bar{G}(t-u) + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{[\lambda(t-y)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-y)} \bar{G}(t-u) \right\} dy = \\ \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} \bar{G}(t-u) \left[ I\{1 \leq m \leq N-1\} \int_{y=u}^t e^{-\lambda t} (t-y)^{m-1} \right. \\ \left. \times \frac{\lambda^m}{(m-1)!} dy + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} e^{-\lambda t} (t-y)^k \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dy \right] dt \quad (2.1.14)$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

Z uwagi na to, że

$$\int_{y=u}^t e^{-\lambda t} (t-y)^{m-1} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} dy = \frac{\lambda^m e^{-\lambda t}}{(m-1)!} \int_{y=u}^t (t-y)^{m-1} dy = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda t} (t-u)^m, \quad (2.1.15)$$

$$\int_{y=u}^t e^{-\lambda t} (t-y)^k \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dy = \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t} (t-u)^{k+1}, \quad (2.1.16)$$

wzór (2.1.14) przyjmie postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} \bar{G}(t-u) \left[ I\{1 \leq m \leq N-1\} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda t} (t-u)^m \right. \\ & \left. + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t} (t-u)^{k+1} \right] dt = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} \left[ I\{1 \leq m \leq N-1\} \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{\lambda^m}{m!} (t-u)^m \bar{G}(t-u) dt \right. \\ & \left. + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} (t-u)^{k+1} \bar{G}(t-u) \right] dG^{i*}(u) = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \left[ I\{1 \leq m \leq N-1\} \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} \frac{\lambda^m}{m!} (t-u)^m \right. \\ & \left. \times \bar{G}(t-u) dt + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} (t-u)^{k+1} \bar{G}(t-u) dt \right] \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Następnie w równaniu (2.1.17) dokonamy podstawienia  $\underline{t} = t-u$ . Podobnie jak poprzednio, dla uproszczenia zapisu zrezygnujemy z notacji zawierającej podkreślenia. Uwzględniając dodatkowo (2.1.9), mamy

$$\begin{aligned} & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \left[ I\{1 \leq m \leq N-1\} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{\lambda^m}{m!} t^m \bar{G}(t) dt \right. \\ & \left. + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} \bar{G}(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Definiując

$$\varphi_{G,m}(s) \stackrel{def}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-(\lambda+s)t} \bar{G}(t) dt \quad (2.1.19)$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

otrzymujemy ostateczną postać drugiego składnika

$$d(s, m) \stackrel{def}{=} (1 - g(\lambda + s))^{-1} \left[ I\{1 \leq m \leq N - 1\} \varphi_{G,m}(s) + \delta_{m,N} \sum_{k=N-1}^{\infty} \varphi_{G,k+1}(s) \right]. \quad (2.1.20)$$

Transformata Laplace'a ostatniego składnika po prawej stronie wzoru (2.1.2) ma postać:

$$\int_{t=0}^{\infty} \delta_{m,0} e^{-st - \lambda t} dt = \delta_{m,0} \frac{e^{-(\lambda+s)t}}{-(\lambda+s)} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{\delta_{m,0}}{\lambda+s} \quad (2.1.21)$$

Transformata Laplace'a pierwszego i drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (2.1.3) ma postać:

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} P_{n+k-1}(t-y, m) + P_{N-1}(t-y, m) \right. \\ & \times \left. \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} \right] dF(y) = \\ & \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-st} e^{-\lambda y} P_{n+k-1}(t-y, m) + P_{N-1}(t-y, m) \right. \\ & \times \left. \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-st} e^{-\lambda y} \right] dt = \\ & \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-s(t-y)} P_{n+k-1}(t-y, m) \right. \\ & \left. + P_{N-1}(t-y, m) \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-s(t-y)} \right] dt \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Następnie w równaniu (2.1.22) dokonamy podstawienia  $\underline{t} = t - y$ . Dla uproszczenia zapisu wzorów rezygnujemy z podkreśleń, wprowadzając nową zmienną. Mamy

$$\begin{aligned} & \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda y)^k}{k!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} P_{n+k-1}(t, m) dt \right. \\ & \left. + \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} P_{N-1}(t, m) dt \right] \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

Stosując oznaczenie (2.1.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} dF(y) \hat{P}_{n+k-1}(s, m) \\ & + \sum_{k=N-n}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} dF(y) \hat{P}_{N-1}(s, m). \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Definiując

$$a_k(s) \stackrel{def}{=} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} dF(y) \quad (2.1.25)$$

dostajemy ostateczną postać tych dwu składników

$$\sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \hat{P}_{n+k-1}(s, m) + \hat{P}_{N-1}(s, m) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s). \quad (2.1.26)$$

Transformata Laplace'a trzeciego i czwartego składnika po prawej stronie wzoru (2.1.3) wygląda następująco:

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \left( I\{n \leq m \leq N-1\} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} + \delta_{m,N} \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) e^{-\lambda t} \bar{F}(t) dt \\ & = I\{n \leq m \leq N-1\} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} \bar{F}(t) dt \\ & + \delta_{m,N} \sum_{k=N-n}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \bar{F}(t) dt \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Definiując

$$\varphi_{F,k}(s) \stackrel{def}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)t} \bar{F}(t) dt \quad (2.1.28)$$

otrzymujemy ostateczną postać obydwu składników

$$h_k(s, m) \stackrel{def}{=} I\{k \leq m \leq N-1\} \varphi_{F,m-k}(s) + \delta_{m,N} \sum_{i=N-k}^{\infty} \varphi_{F,i}(s). \quad (2.1.29)$$

Układ równań liniowych dla transformat Laplace'a warunkowych prawdopodobieństw stanu systemu w ustalonej chwili  $t$ , odpowiadający układowi równań całkowych (2.1.2) i (2.1.3) ma następującą postać:

$$\hat{P}_0(s, m) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) \hat{P}_k(s, m) + \hat{P}_N(s, m) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s} \quad (2.1.30)$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

$$\widehat{P}_n(s, m) = \sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \widehat{P}_{n+k-1}(s, m) + \widehat{P}_{N-1}(s, m) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s) + h_n(s, m) \quad (2.1.31)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ .

W kolejnym kroku do układu równań (2.1.30) - (2.1.31) dla transformat stosujemy podstawienie

$$\widehat{Q}_n(s, m) = \widehat{P}_{N-n}(s, m) \quad (2.1.32)$$

otrzymując układ postaci

$$\widehat{Q}_N(s, m) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) \widehat{Q}_{N-k}(s, m) + \widehat{Q}_0(s, m) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s} \quad (2.1.33)$$

$$\widehat{Q}_n(s, m) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(s) \widehat{Q}_{n-k+1}(s, m) + \widehat{Q}_1(s, m) \sum_{k=n}^{\infty} a_k(s) + h_{N-n}(s, m) \quad (2.1.34)$$

gdzie  $0 \leq n \leq N - 1$ .

Następnie w pierwszej sumie po prawej stronie wzoru (2.1.34) dokonujemy podstawienia  $\underline{k} = k - 1$ , otrzymując (dla uproszczenia zapisu rezygnujemy z podkreśleń)

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_n(s, m) &= \sum_{k=-1}^{n-2} a_{k+1}(s) \widehat{Q}_{n-k}(s, m) + \widehat{Q}_1(s, m) \sum_{k=n}^{\infty} a_k(s) + h_{N-n}(s, m) \\ &= \sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s) \widehat{Q}_{n-k}(s, m) - a_{n+1}(s) \widehat{Q}_0(s, m) + \widehat{Q}_1(s, m) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) \\ &\quad + h_{N-n}(s, m) \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Definiując

$$\psi_n(s, m) \stackrel{def}{=} a_{n+1}(s) \widehat{Q}_0(s, m) - \widehat{Q}_1(s, m) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) - h_{N-n}(s, m) \quad (2.1.36)$$

równanie (2.1.35) przekształcamy do postaci

$$\psi_n(s, m) = \sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s) \widehat{Q}_{n-k}(s, m) - \widehat{Q}_n(s, m), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (2.1.37)$$



## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

W celu wyznaczenia reprezentacji dla poszczególnych wyrazów ciągu funkcyjnego  $(\widehat{Q}_n(s, m))$  zastosujemy Twierdzenie 1.4, zgodnie z którym  $n$ -ty wyraz ciągu  $\widehat{Q}_n(s, m)$  można wyrazić za pomocą wyrazów ciągów  $(a_n(s))$  (gdzie  $a_0(s) \neq 0$ ) oraz  $(\psi_n(s, m))$  określonych w (2.1.25) i (2.1.37). W naszych dalszych rozważaniach wyprowadzimy formułę dla funkcji  $C(s, m)$  równania (1.2.18) (role zmiennej  $y$  odgrywa tu zmienna  $m$ ), a także dla funkcji  $\widehat{Q}_0(s, m)$  i  $\widehat{Q}_1(s, m)$  występujących w Definicji 2.1.36. Dokonamy tego poprzez zapisanie  $C(s, m)$  oraz  $\widehat{Q}_1(s, m)$  jako funkcji zależnych od  $\widehat{Q}_0(s, m)$ , a dla tej ostatniej wyznaczmy postać jawną.

Podstawiając  $n = 0$  do równania (1.2.18), otrzymujemy

$$\widehat{Q}_0(s, m) = C(s, m)R_1(s) \Rightarrow C(s, m) = a_0(s)\widehat{Q}_0(s, m). \quad (2.1.38)$$

Analogicznie, przyjmując  $n = 0$  w równaniach (2.1.36) i (2.1.37), mamy

$$\begin{aligned} \psi_0(s, m) &= a_1(s)\widehat{Q}_0(s, m) - \widehat{Q}_1(s, m) \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) - h_N(s, m) = \\ a_0(s)\widehat{Q}_1(s, m) + a_1(s)\widehat{Q}_0(s, m) - \widehat{Q}_1(s, m) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) - h_N(s, m) \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

$$\psi_0(s, m) = a_0(s)\widehat{Q}_1(s, m) + a_1(s)\widehat{Q}_0(s, m) - \widehat{Q}_0(s, m). \quad (2.1.40)$$

Porównując prawe strony (2.1.39) i (2.1.40) otrzymujemy

$$-\widehat{Q}_0(s, m) = -\widehat{Q}_1(s, m) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) - h_N(s, m). \quad (2.1.41)$$

Ponieważ  $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s)$ , równanie (2.1.41) możemy przekształcić do postaci

$$\widehat{Q}_1(s, m) = f^{-1}(s)(\widehat{Q}_0(s, m) - h_N(s, m)). \quad (2.1.42)$$

Wprowadźmy teraz reprezentacje (2.1.38) i (2.1.42) do równania (1.2.18). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_n(s, m) &= a_0(s)\widehat{Q}_0(s, m)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ a_{k+1}(s)\widehat{Q}_0(s, m) \right. \\ &\quad \left. - \widehat{Q}_0(s, m)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) + h_N(s, m)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - h_{N-k}(s, m) \right] \\ &= \widehat{Q}_0(s, m) \left[ a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left\{ a_{k+1}(s) - f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ h_N(s, m)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - h_{N-k}(s, m) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

Definiując

$$\Theta_n(s) \stackrel{def}{=} a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left\{ a_{k+1}(s) - f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right\} \quad (2.1.44)$$

oraz

$$\Phi_n(s, m) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ h_N(s, m) f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - h_{N-k}(s, m) \right] \quad (2.1.45)$$

otrzymujemy wygodną w zapisie postać wzoru (2.1.43)

$$\widehat{Q}_n(s, m) = \widehat{Q}_0(s, m)\Theta_n(s) + \Phi_n(s, m). \quad (2.1.46)$$

Wyznaczenie funkcji  $\widehat{Q}_0(s, m)$  w jawnej postaci wymaga wykorzystania równania (2.1.33). Korzystając z faktu, że

$$\sum_{k=1}^{N-1} b_k(s)\widehat{Q}_{N-k}(s, m) = \sum_{k=1}^{N-1} b_{N-k}(s)\widehat{Q}_k(s, m) \quad (2.1.47)$$

równanie (2.1.33) można zapisać w postaci

$$\widehat{Q}_N(s, m) = \sum_{k=1}^{N-1} b_{N-k}(s)\widehat{Q}_k(s, m) + \widehat{Q}_0(s, m) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s}. \quad (2.1.48)$$

Alternatywny sposób przedstawienia funkcji  $\widehat{Q}_N(s, m)$  daje równanie (2.1.46). Przyjmując w nim  $n = N$ , dostajemy

$$\widehat{Q}_N(s, m) = \widehat{Q}_0(s, m)\Theta_N(s) + \Phi_N(s, m). \quad (2.1.49)$$

Porównując teraz prawe strony wzorów (2.1.48) i (2.1.49), otrzymujemy następującą reprezentację dla funkcji  $\widehat{Q}_0(s, m)$  :

$$\widehat{Q}_0(s, m) = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_{N-k}(s)\Phi_k(s, m) + d(s, m) + \delta_{m,0}(\lambda + s)^{-1} - \Phi_N(s, m)}{\Theta_N(s) - \sum_{k=1}^{N-1} b_{N-k}(s)\Theta_k(s) - \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s)}. \quad (2.1.50)$$

Wyprowadzone zależności (2.1.46) i (2.1.50) w połączeniu z podstawieniem (2.1.32) posłużą nam do uzyskania ostatecznej postaci transformaty Laplace'a rozkładu liczby zgłoszeń. Mamy

$$\begin{aligned} \widehat{P}_n(s, m) &= \widehat{Q}_{N-n}(s, m) = \widehat{Q}_0(s, m)\Theta_{N-n}(s) + \Phi_{N-n}(s, m) = \Phi_{N-n}(s, m) \\ &+ \Theta_{N-n}(s) \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_{N-k}(s)\Phi_k(s, m) + d(s, m) + \delta_{m,0}(\lambda + s)^{-1} - \Phi_N(s, m)}{\Theta_N(s) - \sum_{k=1}^{N-1} b_{N-k}(s)\Theta_k(s) - \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s)}. \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

Otrzymany wynik sformułujemy w postaci twierdzenia:

**Twierdzenie 2.1.** *W modelu kolejkowym typu  $M/G/1/N$  z regulaminem wielokrotnych okresów przestoju transformata Laplace'a  $\widehat{P}_n(s, m)$  warunkowego rozkładu liczby zgłoszeń wyraża się następującym wzorem:*

$$\begin{aligned} \widehat{P}_n(s, m) &= \Phi_{N-n}(s, m) \\ &+ \Theta_{N-n}(s) \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_{N-k}(s) \Phi_k(s, m) + d(s, m) + \delta_{m,0}(\lambda + s)^{-1} - \Phi_N(s, m)}{\Theta_N(s) - \sum_{k=1}^{N-1} b_{N-k}(s) \Theta_k(s) - \sum_{k=n}^{\infty} b_k(s)}, \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

gdzie  $b_k(s)$ ,  $d(s, m)$ ,  $\Theta_k(s)$ ,  $\Phi_k(s, m)$  zdefiniowano w (2.1.12), (2.1.20), (2.1.44) i (2.1.45) odpowiednio.

## 2.2 Złożony proces Poissona

Rozważmy model kolejkowy typu  $M^X/G/1/N$ , w którym proces wejściowy zgłoszeń napływających opisany jest złożonym procesem Poissona o intensywności  $\lambda$ : w odstępach czasu o rozkładach wykładniczych z parametrem  $\lambda$  z prawdopodobieństwem  $p_k$  napływają do systemu grupy liczące  $k$  zgłoszeń obsługiwanych ( $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ). Obsługa zgłoszeń jest zgodna z rozkładem zadany przez dystrybuantę  $F(\cdot)$ . Pojemność modelu to  $N$  zgłoszeń – jedno może być obsługiwane, a maksymalnie  $N-1$  jest zakumulowanych w buforze.

Podobnie jak w przypadku prostego procesu Poissona opisującego strumień wejściowy zgłoszeń, każdorazowo w chwili, w której system zostaje opróżniony ze zgłoszeń serwer rozpoczyna okres zawieszenia obsługi składający się z kolejnych okresów przestoju, będących zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach z dystrybuantą  $G(\cdot)$ .

Oznaczmy przez  $Y(t)$  liczbę zgłoszeń obecnych w systemie w chwili  $t$ , wliczając zgłoszenie będące ewentualnie obsługiwane w tej chwili. Podobnie jak wcześniej, zdefiniujemy rozkład warunkowy liczby zgłoszeń  $Y(t)$  w chwili  $t$  przy warunku określonym przez początkowy stan systemu  $Y(0)$  (czyli liczbę zgłoszeń obecnych w chwili 0):

$$P_n^X(t, m) = \mathbf{P}\{Y(t) = m \mid Y(0) = n\}, \quad t > 0, 0 \leq m, n \leq N. \quad (2.2.1)$$

Jeżeli system jest pusty w chwili  $t = 0$ , w chwili tej rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi. Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

[30] otrzymujemy wzór:

$$\begin{aligned}
 P_0^X(t, m) &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \right. \\
 &\times \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(u+v-y)} P_{k+j}^X(t-u-v, m) + P_N^X(t-u-v, m) \left[ \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right. \\
 &+ \left. \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(u+v-y)} \right] \left. \right\} dG(v) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \\
 &\times \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} \bar{G}(t-u) dy \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=0}^{m-k} p_{m-k}^{j*} \frac{[\lambda(t-y)]^j}{j!} \right. \\
 &\times e^{-\lambda(t-y)} + \delta_{m,N} \left[ \sum_{k=N}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(t-y)} \right] \left. \right\} \\
 &+ \delta_{m,0} e^{-\lambda t}, \tag{2.2.2}
 \end{aligned}$$

gdzie  $\delta_{i,j}$ ,  $I\{A\}$ ,  $\bar{G}(\cdot)$ ,  $G^{i*}(\cdot)$ ,  $p_j^{i*}$  określono w Definicjach 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 odpowiednio.

Analogicznie do wzoru (2.1.2), prawa strona wzoru (2.2.2) jest sumą pięciu składników, a różnice pomiędzy tymi wzorami w naturalny sposób prowadzą się do uwzględnienia przypadku jednoczesnego napływu grupy zgłoszeń w każdym ze składników. Ponownie pierwszy element sumy odpowiada sytuacji, w której okres zawieszenia obsługi kończy się przed chwilą  $t$  i w chwili jego zakończenia liczba zgłoszeń zakumulowanych w buforze jest mniejsza niż wynosi pojemność bufora – wówczas obsługa zgłoszeń rozpoczyna się po zakończeniu ostatniego okresu przestoju (w momencie  $u+v$ ). Drugi składnik reprezentuje stan całkowitego zapelnienia bufora w chwili zakończenia okresu zawieszenia obsługi, kończącego się również przed chwilą  $t$ . Trzeci składnik opisuje przypadek, w którym pierwsze zgłoszenie wpływa do systemu przed chwilą  $t$ , ale okres zawieszenia obsługi kończy się po tej chwili, przy czym  $m \leq N-1$ . Czwarty składnik sumy reprezentuje stan przedstawiony w trzecim, z tą różnicą, że  $m = N$ . Ostatni element sumy odpowiada sytuacji, w której pierwsze zgłoszenie napływa do serwera po chwili  $t$ , tym samym zdarzenie losowe  $\{Y(t) = m\}$  ma prawdopodobieństwo równe 1 dla  $\{m = 0\}$  i 0 w pozostałych przypadkach.

W modelu kolejkowym typu  $M^X/G/1$  momenty zakończenia obsługi pakietów, a tym samym przechodzenia w okres bezczynności, są momentami Markowa [61]. Załóżmy, że w systemie w momencie jego uruchomienia ( $t = 0$ ) znajduje się dokładnie  $n$  zgłoszeń ( $Y(0) = n$ ), przy czym  $1 \leq n \leq N$ . Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym względem pierwszego

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

momentu zakończenia obsługi po chwili  $t = 0$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 P_n^X(t, m) &= \int_{y=0}^t \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-\lambda y} P_{n+k-1}^X(t-y, m) + P_{N-1}^X(t-y, m) \right. \\
 &\times \left. \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-\lambda y} \right] dF(y) + \left( I\{n \leq m \leq N-1\} \sum_{r=0}^{m-n} p_{m-n}^{r*} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \right. \\
 &\left. + \delta_{m,N} \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \right) e^{-\lambda t} \bar{F}(t). \tag{2.2.3}
 \end{aligned}$$

Układ równań całkowych (2.2.3) jest rozwinięciem układu (2.1.3) uwzględniającym przypadki jednoczesnego napływu grupy zgłoszeń do systemu i również składa się z sumy czterech składników. Podobnie jak w (2.2.3), pierwszy ze składników opisuje sytuację gdy chwila ukończenia pierwszej obsługi  $y$  występuje przed czasem  $t$  oraz do momentu  $y$  bufor nie został całkowicie zapełniony. Drugi element sumy jest analogicznym do pierwszego, z tą różnicą, że do momentu  $y$  wystąpiło całkowite zapełnienie bufora (napłynęło co najmniej  $N - n$  zgłoszeń). Trzeci składnik odzwierciedla przypadek, w którym pierwsze ukończenie obsługi wypada po czasie  $t$  dla kolejki o długości  $m$  nieprzekraczającej pojemności bufora. Ostatni element sumy jest analogicznym do trzeciego, z tą różnicą, że do systemu napływa co najmniej  $N - n$  pakietów, powodując całkowite zapełnienie bufora.

Wprowadźmy następujące oznaczenie dla transformaty Laplace'a rozkładu liczby zgłoszeń w procesie złożonym:

$$\hat{P}_n^X(s, m) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_n^X(t, m) dt, \quad \text{Re}(s) > 0. \tag{2.2.4}$$

Wyznaczenie układu równań dla transformat Laplace'a dla wzorów (2.2.2) i (2.2.3) podzielimy na kilka etapów w odniesieniu do ilości zgrupowanych pod wspólnymi całkami składników sum. Analogicznie do podrozdziału opisującego prosty proces Poissona rozważymy trzy składniki w (2.2.2) i dwa składniki w (2.2.3).

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (2.2.2) ma postać:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \right. \\
& \times \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(u+v-y)} P_{k+j}^X(t-u-v, m) + P_N^X(t-u-v, m) \\
& \times \left. \left[ \sum_{k=N}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(u+v-y)} \right] \right\} dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \left\{ \int_{v=0}^{t-u} dG(v) \int_{y=u}^{u+v} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \right. \right. \\
& \times \frac{\lambda^{r+1}(u+v-y)^r}{r!} e^{-\lambda(u+v)} P_{k+j}^X(t-u-v, m) + P_N^X(t-u-v, m) \\
& \times \left. \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}(u+v-y)^r}{r!} e^{-\lambda(u+v)} \right] dy \\
& + \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{v=0}^{t-u} P_N^X(t-u-v, m) dG(v) \int_{y=u}^{u+v} \lambda e^{-\lambda y} dy \left. \right\} = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \left\{ \int_{v=0}^{t-u} dG(v) \left[ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} \right. \right. \\
& \times e^{-\lambda(u+v)} P_{k+j}^X(t-u-v, m) \int_{y=u}^{u+v} (u+v-y)^r dy + P_N^X(t-u-v, m) \\
& \times \left. \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} e^{-\lambda(u+v)} \int_{y=u}^{u+v} (u+v-y)^r dy \right] \\
& + \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{v=0}^{t-u} P_N^X(t-u-v, m) dG(v) \int_{y=u}^{u+v} \lambda e^{-\lambda y} dy \left. \right\}
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Następnie obliczamy całki:

$$\int_{y=u}^{u+v} [u+v-y]^r dy = -\frac{[u+v-y]^{r+1}}{r+1} \Big|_{y=u}^{u+v} = \frac{v^{r+1}}{r+1}, \tag{2.2.6}$$

$$\int_{y=u}^{u+v} \lambda e^{-\lambda y} dy = -e^{-\lambda y} \Big|_{y=u}^{u+v} = e^{-\lambda u} (1 - e^{-\lambda v}). \tag{2.2.7}$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

Kontynuując (2.2.5) przyjmie formę:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{t-u} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-\lambda v} \right. \\
& \times P_{k+j}^X(t-u-v, m) + P_N^X(t-u-v, m) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-\lambda v} \\
& \left. + P_N^X(t-u-v, m)(1 - e^{-\lambda v}) \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right\} dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} dt \int_{v=0}^{t-u} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-\lambda v} \right. \\
& \times P_{k+j}^X(t-u-v, m) + P_N^X(t-u-v, m) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-\lambda v} \\
& \left. + P_N^X(t-u-v, m)(1 - e^{-\lambda v}) \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right\} dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} dG(v) \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-st} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-\lambda v} \right. \\
& \times P_{k+j}^X(t-u-v, m) + P_N^X(t-u-v, m) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-\lambda v} \\
& \left. + P_N^X(t-u-v, m)(1 - e^{-\lambda v}) \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right\} dt = \\
& \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \left\{ \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} \right. \\
& \times \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} P_{k+j}^X(t-u-v, m) dt + \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} \\
& \times P_N^X(t-u-v, m) dt \left. \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} \right\} + \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \\
& \times \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} (1 - e^{-\lambda v}) dG(v) \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} P_N^X(t-u-v, m) dt \quad (2.2.8)
\end{aligned}$$

W kolejnym kroku w równaniu (2.2.8) dokonamy podstawienia  $\underline{t} = t - u - v$ . Dla uproszczenia zapisu przyjmie notację nowych zmiennych niezawierającą podkreśleń.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} dG(v) \left\{ \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \right. \\
& \times \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} P_{k+j}^X(t, m) dt + \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} P_N^X(t, m) dt \left. \right\} \\
& + \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} (1 - e^{-\lambda v}) dG(v) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \\
& \times P_N^X(t, m) dt \tag{2.2.9}
\end{aligned}$$

Stosując oznaczenie (2.2.4) oraz zależność (2.1.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N-1} p_k (1 - g(\lambda + s))^{-1} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} dG(v) \left\{ \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \right. \\
& \times \widehat{P}_{k+j}^X(s, m) + \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \widehat{P}_N^X(s, m) \left. \right\} \\
& + \sum_{k=N}^{\infty} p_k (1 - g(\lambda + s))^{-1} \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} (1 - e^{-\lambda v}) dG(v) \widehat{P}_N^X(s, m) = \\
& \sum_{k=1}^{N-1} p_k (1 - g(\lambda + s))^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} dG(v) \right. \\
& \times \widehat{P}_{k+j}^X(s, m) + \widehat{P}_N^X(s, m) \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} dG(v) \left. \right\} \\
& + \sum_{k=N}^{\infty} p_k (1 - g(\lambda + s))^{-1} \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} (1 - e^{-\lambda v}) dG(v) \widehat{P}_N^X(s, m). \tag{2.2.10}
\end{aligned}$$

Wykorzystując wprowadzone w Definicji 1.6 oznaczenie transformaty Laplace'a-Stieltjesa dystrybuanty  $G(\cdot)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} (1 - e^{-\lambda v}) dG(v) = \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} dG(v) - \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) = \\
& g(s) - g(\lambda + s). \tag{2.2.11}
\end{aligned}$$

Definiując

$$b_l(s) \stackrel{def}{=} (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{r=0}^l p_l^{r*} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} dG(v) \tag{2.2.12}$$

oraz

$$C(s) \stackrel{def}{=} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \frac{g(s) - g(\lambda + s)}{1 - g(\lambda + s)} \tag{2.2.13}$$



## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

otrzymujemy ostateczną postać pierwszego składnika prawej strony wzoru (2.2.2)

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k \left\{ \sum_{j=0}^{N-k-1} \widehat{P}_{k+j}^X(s, m) b_j(s) + \widehat{P}_N^X(s, m) \sum_{j=N-k}^{\infty} b_j(s) \right\} + \widehat{P}_N^X(s, m) C(s). \quad (2.2.14)$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (2.2.2) ma postać:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} \overline{G}(t-u) dy \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} \right. \\ & \times \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=0}^{m-k} p_{m-k}^{j*} \frac{[\lambda(t-y)]^j}{j!} e^{-\lambda(t-y)} + \delta_{m,N} \left[ \sum_{k=N}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{N-1} p_k \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(t-y)} \right] \right\} = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} \overline{G}(t-u) dt \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} \right. \\ & \times \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=0}^{m-k} p_{m-k}^{j*} \frac{[\lambda(t-y)]^j}{j!} e^{-\lambda(t-y)} + \delta_{m,N} \left[ \sum_{k=N}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{N-1} p_k \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(t-y)} \right] \right\} = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} \overline{G}(t-u) dt \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=0}^{m-k} p_{m-k}^{j*} \right. \\ & \times \lambda \int_{y=u}^t e^{-\lambda t} \frac{[\lambda(t-y)]^j}{j!} dy + \delta_{m,N} \left[ \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy + \sum_{k=1}^{N-1} p_k \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \lambda \int_{y=u}^t e^{-\lambda t} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} dy \right] \right\} \quad (2.2.15) \end{aligned}$$

Następnie obliczamy całki:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{y=u}^t e^{-\lambda t} \frac{[\lambda(t-y)]^j}{j!} dy &= \frac{\lambda^{j+1} e^{-\lambda t}}{j!} \int_{y=u}^t (t-y)^j dy = \\ &= - \frac{\lambda^{j+1} e^{-\lambda t}}{(j+1)!} (t-y)^{j+1} \Big|_{y=u}^t = \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} (t-u)^{j+1} e^{-\lambda t}, \quad (2.2.16) \end{aligned}$$

2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

$$\lambda \int_{y=u}^t e^{-\lambda t} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} dy = \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} (t-u)^{r+1} e^{-\lambda t}, \quad (2.2.17)$$

$$\lambda \int_{y=u}^t e^{-\lambda y} dy = -e^{-\lambda y} \Big|_{y=u}^t = e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}. \quad (2.2.18)$$

Wziąwszy pod uwagę obliczenia (2.2.16)–(2.2.18), wzór (2.2.15) przyjmie postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} \overline{G}(t-u) dt \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=0}^{m-k} p_{m-k}^{j*} \right. \\ & \times \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} (t-u)^{j+1} e^{-\lambda t} + \delta_{m,N} \left[ \sum_{k=N}^{\infty} p_k (e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}) + \sum_{k=1}^{N-1} p_k \right. \\ & \times \left. \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} (t-u)^{r+1} e^{-\lambda t} \right] \left. \right\} = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=0}^{m-k} p_{m-k}^{j*} \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} \right. \\ & \times (t-u)^{j+1} \overline{G}(t-u) dt + \delta_{m,N} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} (e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}) \overline{G}(t-u) dt \\ & + \delta_{m,N} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} (t-u)^{r+1} \overline{G}(t-u) dt \left. \right\} = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \left\{ I\{1 \leq m \leq N-1\} \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=0}^{m-k} p_{m-k}^{j*} \int_{t=u}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} \right. \\ & \times e^{-(\lambda+s)(t-u)} (t-u)^{j+1} \overline{G}(t-u) dt + \delta_{m,N} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{t=u}^{\infty} (e^{-s(t-u)} \\ & - e^{-(\lambda+s)(t-u)}) \overline{G}(t-u) dt + \delta_{m,N} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} \\ & \times \left. \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} (t-u)^{r+1} \overline{G}(t-u) dt \right\}. \quad (2.2.19) \end{aligned}$$

W równaniu (2.2.14) dokonamy podstawienia  $\underline{t} = t - u$  oraz podobnie jak uprzednio, dla uproszczenia zapisu zrezygnujemy z notacji zawierającej podkreślenia. Uwzględniając dodatkowo (2.1.9), mamy

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

$$\begin{aligned}
& (1 - g(\lambda + s))^{-1} \left\{ I\{1 \leq m \leq N - 1\} \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=0}^{m-k} p_{m-k}^{j*} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \right. \\
& \times \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} t^{j+1} \overline{G}(t) dt + \delta_{m,N} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{t=0}^{\infty} (e^{-st} - e^{-(\lambda+s)t}) \overline{G}(t) dt \\
& \left. + \delta_{m,N} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} t^{r+1} \overline{G}(t) dt \right\} \quad (2.2.20)
\end{aligned}$$

Definiując

$$\varphi_{G,l}(s) \stackrel{def}{=} \sum_{r=0}^l p_l^{r*} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} t^{r+1} \overline{G}(t) dt \quad (2.2.21)$$

oraz

$$\varphi_G(s) \stackrel{def}{=} \int_{t=0}^{\infty} (e^{-st} - e^{-(\lambda+s)t}) \overline{G}(t) dt \quad (2.2.22)$$

otrzymujemy ostateczną postać drugiego składnika

$$\begin{aligned}
d(s, m) & \stackrel{def}{=} (1 - g(\lambda + s))^{-1} \left\{ I\{1 \leq m \leq N - 1\} \sum_{k=1}^m p_k \varphi_{G,m-k}(s) \right. \\
& \left. + \delta_{m,N} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \varphi_G(s) + \delta_{m,N} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \varphi_{G,j}(s) \right\}. \quad (2.2.23)
\end{aligned}$$

Transformata Laplace'a trzeciego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (2.2.2) jest taka sama jak we wzorze (2.1.2) dla prostego procesu Poissona. Wyznaczyliśmy ją w (2.1.21) otrzymując w wyniku

$$\frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s}. \quad (2.2.24)$$

Transformata Laplace'a pierwszego i drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (2.2.3) ma postać:

$$\begin{aligned}
& \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-\lambda y} P_{n+k-1}^X(t-y, m) \right. \\
& + P_{N-1}^X(t-y, m) \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-\lambda y} \left. \right] dF(y) = \\
& \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-\lambda y - st} P_{n+k-1}^X(t-y, m) \right. \\
& + P_{N-1}^X(t-y, m) \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-\lambda y - st} \left. \right] dt = \\
& \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-s(t-y)} P_{n+k-1}^X(t-y, m) \right. \\
& + P_{N-1}^X(t-y, m) \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-s(t-y)} \left. \right] dt \tag{2.2.25}
\end{aligned}$$

W równaniu (2.2.25) także dokonujemy podstawienia  $\underline{t} = t - y$  dla uproszczenia zapisu rezygnując z podkreśleń i wprowadzając nową zmienną. Mamy

$$\begin{aligned}
& \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} P_{n+k-1}^X(t, m) dt \right. \\
& + \left. \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} P_{N-1}^X(t, m) dt \right]. \tag{2.2.26}
\end{aligned}$$

Stosując oznaczenie (2.2.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^r}{r!} dF(y) \hat{P}_{n+k-1}^X(s, m) \\
& + \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^r}{r!} dF(y) \hat{P}_{N-1}^X(s, m). \tag{2.2.27}
\end{aligned}$$

Definiując

$$a_k(s) \stackrel{def}{=} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^r}{r!} dF(y), \tag{2.2.28}$$

dostajemy ostateczną postać tych dwu składników

$$\sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \hat{P}_{n+k-1}^X(s, m) + \hat{P}_{N-1}^X(s, m) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s). \tag{2.2.29}$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

Transformata Laplace'a trzeciego i czwartego składnika po prawej stronie wzoru (2.2.3) ma postać:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \left( I\{n \leq m \leq N-1\} \sum_{r=0}^{m-n} p_{m-n}^{r*} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \right. \\
 & \left. + \delta_{m,N} \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \right) e^{-\lambda t} \bar{F}(t) dt = \\
 & I\{n \leq m \leq N-1\} \sum_{r=0}^{m-n} p_{m-n}^{r*} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \bar{F}(t) dt \\
 & + \delta_{m,N} \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \bar{F}(t) dt
 \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Definiując

$$\varphi_{F,l}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=0}^l p_l^{r*} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \bar{F}(t) dt, \tag{2.2.31}$$

otrzymujemy ostateczną postać ostatnich dwu składników

$$h_l(s, m) \stackrel{\text{def}}{=} I\{n \leq m \leq N-1\} \varphi_{F,m-l}(s) + \delta_{m,N} \sum_{k=N-l}^{\infty} \varphi_{F,k}(s). \tag{2.2.32}$$

Wyznaczony układ równań dla transformat Laplace'a dla wzorów (2.2.2) i (2.2.3) ma następującą postać:

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_0^X(s, m) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{j=0}^{N-k-1} \hat{P}_{k+j}^X(s, m) b_j(s) + \hat{P}_N^X(s, m) \sum_{j=N-k}^{\infty} b_j(s) \right] \\
 &+ \hat{P}_N^X(s, m) C(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s}
 \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

$$\hat{P}_n^X(s, m) = \sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \hat{P}_{n+k-1}^X(s, m) + \hat{P}_{N-1}^X(s, m) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s) + h_n(s, m) \tag{2.2.34}$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ .

W kolejnym kroku do równań (2.2.33)–(2.2.34) stosujemy podstawienie

$$\hat{Q}_n^X(s, m) = \hat{P}_{N-n}^X(s, m), \tag{2.2.35}$$

otrzymując układ postaci

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_N^X(s, m) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{j=0}^{N-k-1} \widehat{Q}_{N-k-j}^X(s, m) b_j(s) + \widehat{Q}_0^X(s, m) \sum_{j=N-k}^{\infty} b_j(s) \right] \\ &+ \widehat{Q}_0^X(s, m) C(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s} \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

$$\widehat{Q}_n^X(s, m) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(s) \widehat{Q}_{n-k+1}^X(s, m) + \widehat{Q}_1^X(s, m) \sum_{k=n}^{\infty} a_k(s) + h_{N-n}(s, m) \quad (2.2.37)$$

gdzie  $0 \leq n \leq N - 1$ .

Następnie w pierwszej sumie (2.2.37) wykonujemy podstawienie  $\underline{k} = k - 1$ . Kolejny raz dla uproszczenia notacji wzorów przyjmiemy zapis nowej zmiennej niezawierający podkreśleń.

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_n^X(s, m) &= \sum_{k=-1}^{n-2} a_{k+1}(s) \widehat{Q}_{n-k}^X(s, m) + \widehat{Q}_1^X(s, m) \sum_{k=n}^{\infty} a_k(s) + h_{N-n}(s, m) \\ &= \sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s) \widehat{Q}_{n-k}^X(s, m) - a_{n+1}(s) \widehat{Q}_0^X(s, m) + \widehat{Q}_1^X(s, m) \sum_{k=n}^{\infty} a_k(s) \\ &+ h_{N-n}(s, m) \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Definiując

$$\psi_n(s, m) \stackrel{def}{=} a_{n+1} \widehat{Q}_0^X(s, m) - \widehat{Q}_1^X(s, m) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) - h_{N-n}(s, m) \quad (2.2.39)$$

równanie (2.2.38) przekształcamy do postaci

$$\psi_n(s, m) = \sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s) \widehat{Q}_{n-k}^X(s, m) - \widehat{Q}_n^X(s, m), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (2.2.40)$$

W celu wyznaczenia kolejnych wyrazów ciągu  $(\widehat{Q}_n^X(s, m))$  stosujemy Twierdzenie 1.4, zgodnie z którym, mając określone ciągi  $(a_n(s))$  (gdzie  $a_0(s) \neq 0$ ) oraz  $(\psi_n(s, m))$  (wzory (2.2.28) i (2.2.40), odpowiednio), możemy zapisać  $n$ -ty wyraz  $\widehat{Q}_n^X(s, m)$  w następującej postaci:

$$\widehat{Q}_n^X(s, m) = C(s, m) R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \psi_k(s, m), \quad n \geq 0 \quad (2.2.41)$$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

gdzie  $C(s, m)$  nie zależy od  $n$  oraz

$$R_0(s) = 0, R_1(s) = a_0^{-1}(s), R_{k+1}(s) = R_1(s) \left[ R_k(s) - \sum_{i=0}^k a_{i+1}(s) R_{k-i}(s) \right] \quad (2.2.42)$$

dla  $k \geq 1$ .

W odniesieniu do metodyki postępowania zaprezentowanej dla prostego procesu Poissona, w równaniach (2.1.38)–(2.1.40), również tutaj celem naszych dalszych rozważań jest wyprowadzenie formuł dla składnika  $C(s, m)$  równania (2.2.41) oraz dla funkcji  $\hat{Q}_0^X(s, m)$  i  $\hat{Q}_1^X(s, m)$  występujących w równaniu (2.2.39). Dla złożonego procesu Poissona dokonamy tego poprzez zapisanie  $C(s, m)$  oraz  $\hat{Q}_1^X(s, m)$  jako funkcji zależnych od  $\hat{Q}_0^X(s, m)$ , a dla tej ostatniej wyznaczmy postać jawną.

Podstawiając  $n = 0$  do równania (2.2.41), otrzymujemy

$$\hat{Q}_0^X(s, m) = C(s, m) R_1(s) \Rightarrow C(s, m) = a_0(s) \hat{Q}_0^X(s, m), \quad (2.2.43)$$

Analogicznie, przyjmując  $n = 0$  w równaniach (2.2.39) i (2.2.40), mamy

$$\begin{aligned} \psi_0(s, m) &= a_1(s) \hat{Q}_0^X(s, m) - \hat{Q}_1^X(s, m) \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) - h_N(s, m) = \\ &= a_0(s) \hat{Q}_1^X(s, m) + a_1(s) \hat{Q}_0^X(s, m) - \hat{Q}_1^X(s, m) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) - h_N(s, m) \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

$$\psi_0(s, m) = a_0(s) \hat{Q}_1^X(s, m) + a_1(s) \hat{Q}_0^X(s, m) - \hat{Q}_0^X(s, m). \quad (2.2.45)$$

Porównując prawe strony (2.2.44) i (2.2.45), otrzymujemy

$$-\hat{Q}_0^X(s, m) = -\hat{Q}_1^X(s, m) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) - h_N(s, m). \quad (2.2.46)$$

Korzystając z faktu, że  $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s)$  równanie (2.2.46) przekształcamy do postaci

$$\hat{Q}_1^X(s, m) = f^{-1}(s) (\hat{Q}_0^X(s, m) - h_N(s, m)). \quad (2.2.47)$$

Następnie podstawiamy zależności (2.2.39), (2.2.43) i (2.2.47) do równania

(2.2.41), otrzymując

$$\begin{aligned}
 \widehat{Q}_n^X(s, m) &= a_0(s)\widehat{Q}_0^X(s, m)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ a_{k+1}(s)\widehat{Q}_0^X(s, m) \right. \\
 &\quad \left. - \widehat{Q}_0^X(s, m)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) + h_N(s, m)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - h_{N-k}(s, m) \right] \\
 &= \widehat{Q}_0^X(s, m) \left[ a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left\{ a_{k+1}(s) - f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right\} \right] \\
 &\quad + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ h_N(s, m)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - h_{N-k}(s, m) \right]. \tag{2.2.48}
 \end{aligned}$$

Definiując

$$\Theta_n(s) \stackrel{def}{=} a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left\{ a_{k+1}(s) - f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right\} \tag{2.2.49}$$

oraz

$$\Phi_n(s, m) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ h_N(s, m)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - h_{N-k}(s, m) \right] \tag{2.2.50}$$

równanie (2.2.48) możemy zapisać w wygodnej postaci

$$\widehat{Q}_n^X(s, m) = \widehat{Q}_0^X(s, m)\Theta_n(s) + \Phi_n(s, m). \tag{2.2.51}$$

Do wyznaczenia jawnej postaci funkcji  $\widehat{Q}_0^X(s, m)$  wykorzystamy równanie (2.2.36).

Korzystając z faktu, że

$$\sum_{j=0}^{N-k-1} b_j(s)\widehat{Q}_{N-k-j}^X(s, m) = \sum_{j=1}^{N-k} b_{N-k-j}(s)\widehat{Q}_j^X(s, m) \tag{2.2.52}$$

równanie (2.2.36) przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 \widehat{Q}_N^X(s, m) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{j=1}^{N-k} b_{N-k-j}(s)\widehat{Q}_j^X(s, m) + \widehat{Q}_0^X(s, m) \sum_{j=N-k}^{\infty} b_j(s) \right] \\
 &\quad + \widehat{Q}_0^X(s, m)C(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s}. \tag{2.2.53}
 \end{aligned}$$



## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

Następnie do równania (2.2.53) wstawiamy zależność (2.2.51). Mamy

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_0^X(s, m)\Theta_N(s) + \Phi_N(s, m) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{j=1}^{N-k} \left( \widehat{Q}_0^X(s, m)\Theta_j(s) + \Phi_j(s, m) \right) \right. \\ &\quad \left. \times b_{N-k-j}(s) + \widehat{Q}_0^X(s, m) \sum_{j=N-k}^{\infty} b_j(s) \right] + \widehat{Q}_0^X(s, m)C(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s} \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

Z równania (2.2.54) eliminujemy teraz funkcję  $\widehat{Q}_0^X(s, m)$ , otrzymując

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_0^X(s, m) &= \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=1}^{N-k} b_{N-k-j}(s)\Phi_j(s, m) + d(s, m) + \delta_{m,0}(\lambda + s)^{-1} - \Phi_N(s, m)}{\Theta_N(s) - C(s) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{j=1}^{N-k} b_{N-k-j}(s)\Theta_j(s) + \sum_{j=N-k}^{\infty} b_j(s) \right]}. \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

Wyprowadzone zależności (2.2.51) i (2.2.55) w połączeniu z podstawieniem (2.2.35) pozwalają nam teraz uzyskać następującą ostateczną postać transformaty Laplace'a rozkładu liczby zgłoszeń:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_n^X(s, m) &= \widehat{Q}_{N-n}^X(s, m) = \widehat{Q}_0^X(s, m)\Theta_{N-n}(s) + \Phi_{N-n}(s, m) \\ &= \Phi_{N-n}(s, m) + \Theta_{N-n}(s) \\ &\times \frac{\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=1}^{N-k} b_{N-k-j}(s)\Phi_j(s, m) + d(s, m) + \delta_{m,0}(\lambda + s)^{-1} - \Phi_N(s, m)}{\Theta_N(s) - C(s) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{j=1}^{N-k} b_{N-k-j}(s)\Theta_j(s) + \sum_{j=N-k}^{\infty} b_j(s) \right]}. \end{aligned} \quad (2.2.56)$$

Otrzymany wynik sformułujemy w postaci twierdzenia:

**Twierdzenie 2.2.** *W modelu kolejkowym typu  $M^X/G/1/N$  z regulaminem wielokrotnych okresów przestoju transformata Laplace'a  $\widehat{P}_n^X(s, m)$  warunkowego rozkładu liczby zgłoszeń w ustalonej chwili  $t$  wyraża się następującym wzorem:*

$$\begin{aligned} \widehat{P}_n^X(s, m) &= \Phi_{N-n}(s, m) + \Theta_{N-n}(s) \\ &\times \frac{\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=1}^{N-k} b_{N-k-j}(s)\Phi_j(s, m) + d(s, m) + \delta_{m,0}(\lambda + s)^{-1} - \Phi_N(s, m)}{\Theta_N(s) - C(s) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{j=1}^{N-k} b_{N-k-j}(s)\Theta_j(s) + \sum_{j=N-k}^{\infty} b_j(s) \right]}, \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

gdzie  $b_k(s)$ ,  $C(s)$ ,  $d(s, m)$ ,  $\Theta_k(s)$ ,  $\Phi_k(s, m)$  zdefiniowano w (2.2.12), (2.2.13), (2.2.23), (2.2.49) i (2.2.50) odpowiednio.

### 2.3 Analiza numeryczna i symulacje

W tym podrozdziale przyjrzymy się wynikom obliczeń numerycznych, które prezentują rozkłady prawdopodobieństwa długości kolejki w stanie nieustalonym (tzn. w dowolnej chwili  $t$ ) w zależności od przyjętych w poszczególnych eksperymentach parametrów początkowych. W większości naszych rozważań ograniczymy się do złożonego procesu Poissona, który w modelowaniu strumienia wejściowego zgłoszeń napływających pozwala na bezpośrednie uwzględnienie ich rozmiarów. W celu otrzymania rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki, do wzoru (2.2.57) zastosowano algorytm numerycznego odwracania transformaty Laplace'a opisany m.in. w [4] i [5], który od nazwisk twórców jest nazywany algorytmem Gavera-Stehfesta i stanowi kombinację dwóch sposobów podejścia do zagadnienia prezentowanych we wcześniejszych pracach [47] oraz [150] ich autorstwa. Na początku omówimy wspólne dla wszystkich rozważanych w obliczeniach numerycznych scenariuszy cechy modelu kolejkowego:

- rozkład prawdopodobieństwa czasu obsługi zgłoszeń jest mieszanym rozkładem wykładniczym (ang. mixed exponential distribution) o dystrybuancie postaci

$$F(t) = \alpha \cdot (1 - e^{-\mu_1 t}) + (1 - \alpha) \cdot (1 - e^{-\mu_2 t}), \quad t > 0, \quad (2.3.1)$$

gdzie  $\alpha \in (0, 1)$ , parametry  $\mu_1, \mu_2$  są określone oddzielnie dla każdego eksperymentu. Średni czas obsługi pojedynczego pakietu wynosi

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{1 - \alpha}{\mu_2}, \quad (2.3.2)$$

co odpowiada intensywności obsługi (średniej liczbie pakietów obsłużonych w jednostce czasu w czasie pracy serwera) równej

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{(1 - \alpha) \mu_1 + \alpha \mu_2}. \quad (2.3.3)$$

- dystrybuanta  $G(\cdot)$ , określająca długość trwania pojedynczego okresu zawieszenia obsługi, jest dystrybuantą rozkładu Erlanga drugiego rzędu i ma postać

$$G(t) = 1 - e^{-\xi t} (1 + \xi t), \quad t > 0, \quad (2.3.4)$$

gdzie  $\xi$  (odwrotność parametru skali) jest parametrem o wartości określonej oddzielnie dla każdego eksperymentu;

- rozmiary pakietów napływających do systemu będą wyrażane w bajtach. Ustalmy jako podstawową jednostkę objętości pakietu (określoną w Definicji 1.7) wartość  $v = 100$  B. Stosowane w rozprawie podejście, odnośnie do sposobu rozumienia różnicy pomiędzy strumieniami wejściowymi

pakietów w prostym i złożonym procesie Poissona, jest następujące: w prostym procesie występują wyłącznie pakiety o rozmiarze 100 B, w procesie złożonym natomiast będą to pakiety napływające do systemu o objętościach równych wielokrotności jednostki podstawowej (100 B, 200 B, 300 B, ...). Jak zostało to określone w podrozdziale 1.2 – każde zgłoszenie o objętości  $k \cdot v$ ,  $k = 2, 3, \dots$ ; jest utożsamiane z grupą  $k$  zgłoszeń obsługiwanych. Modelowanie średniego rozmiaru pakietu w systemie omówimy analizując następujący przykład:

**Przykład 1.** Załóżmy, iż w modelu chcemy przyjąć, że średni rozmiar napływających pakietów wynosi  $B_\varepsilon = 180$  B. Wówczas, mając na uwadze założenie, iż pakiety posiadają rozmiary będące wielokrotnościami jednostki podstawowej, ciąg prawdopodobieństw  $(p_k)$  może mieć następującą przykładową postać:  $(p_k) = \{0.5, 0.2, 0.3, 0, \dots\}$ , gdzie  $p_1$  oznacza prawdopodobieństwo napływu pakietu o rozmiarze 100 B,  $p_2$  – prawdopodobieństwo napływu pakietu o rozmiarze 200 B itd. Otrzymujemy teraz  $\varepsilon = 0.5 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.3 \cdot 3 = 1.8$  co, wzięwszy pod uwagę podstawową jednostkę objętości pakietu  $v$ , daje pożądaną wartość  $B_\varepsilon = 1.8 \cdot 100 \text{ B} = 180 \text{ B}$ .

W analogiczny sposób zamodelowano przyjęte w poszczególnych eksperymentach wartości parametrów  $\varepsilon, B_\varepsilon$  (określonych w Definicjach 1.10 i 1.11) oraz ciągu  $(p_k)$ .

Naszym podstawowym celem jest zbadanie wpływu zmian w wartościach poszczególnych parametrów początkowych na rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki w systemie w chwili  $t$ . Dodatkowo wybrane wyniki obliczeń numerycznych, przeprowadzonych na wzorach analitycznych, zostaną zestawione z wynikami symulacji modelu kolejkowego zaprogramowanej w symulatorze zdarzeń dyskretnych OMNeT++ [163].

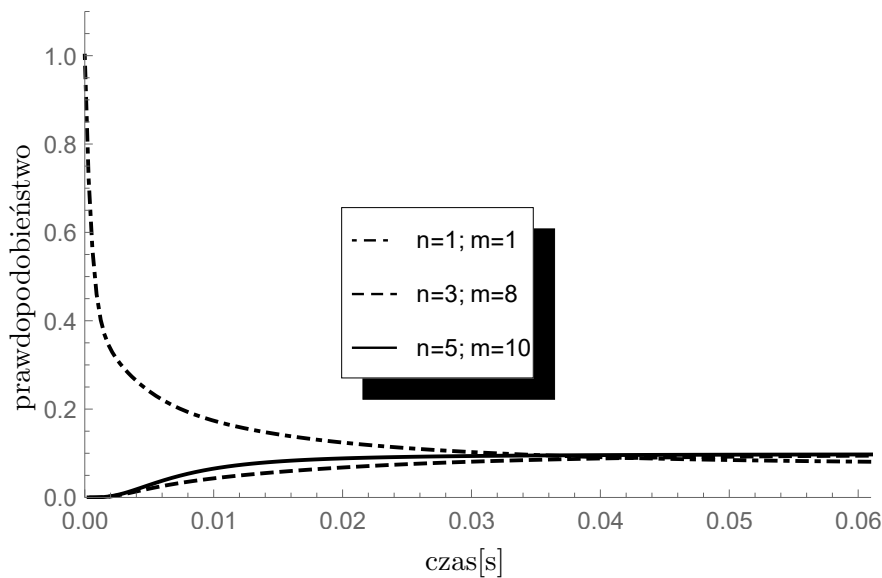
We wszystkich przeprowadzonych obliczeniach jako pojemność modelu  $N$  przyjęto wartość 10 pakietów, a bufor akumulujący może pomieścić do 9 pakietów.

### 2.3.1 Trzy wybrane scenariusze dla prostego procesu Poissona

W pierwszym eksperymencie przyjrzymy się rozkładowi prawdopodobieństw długości kolejki (2.1.1) w zależności od wybranych wartości intensywności napływu pakietów oraz ich czasu obsługi. Rozważmy trzy scenariusze, w których pary parametrów  $(n, m) \in \{(1, 1); (3, 8); (5, 10)\}$  opisują odpowiednio początkowy stan bufora oraz liczbę zgłoszeń obecnych w systemie, dla której wyznaczone będzie prawdopodobieństwo w funkcji czasu  $t$ , przy czym rozpiętość czasu w którym wyznaczamy rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki (liczby zgłoszeń obecnych w systemie) jest przedziałem  $(0s, 0.06s)$ .

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

Ponieważ w prostym procesie Poissona zdarzenia pojawiają się pojedynczo, zatem  $(p_k) = \{1, 0, \dots\}$ , przy czym nadchodzące pakiety mają stałe rozmiary równe 100 B (jest to równocześnie średni rozmiar pakietu  $B_c$ ). Intensywność napływu zgłoszeń  $\lambda = 600$  pakietów/s jest stała i odpowiada prędkości przesyłu danych rzędu 480 kb/s. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = 2/3$  oraz para  $(\mu_1, \mu_2) = (650, 520)$  dla której intensywność obsługi  $\mu$  jest równa 600 pakietów/s, wobec czego uzyskujemy obciążenie oraz średnie zapelnienie systemu (określone w Definicjach 1.12 i 1.13) na poziomie  $\rho = \kappa_b = 1$ . Rysunek 2.1 prezentuje otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.



Rysunek 2.1: Charakterystyka wybranych scenariuszy rozkładu prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{X(t) = m \mid X(0) = n\}$  dla prostego procesu Poissona.

Ponieważ obciążenie systemu jest bardzo duże, możemy zauważyć szybką stabilizację wykresów dla wszystkich trzech scenariuszy „wokół” wartości prawdopodobieństwa odpowiadającej stanowi ustalonemu (stacjonarnemu).

### 2.3.2 Analiza porównawcza obliczeń numerycznych i symulacji.

Naszą analizę rozpoczniemy od zapoznania się ze środowiskiem symulacyjnym OMNeT++ [163]. Poniższy skrócony opis tego środowiska pochodzi z [127].

OMNeT++ (*Objective Modular Network Testbed in C++*) jest zintegrowanym środowiskiem do tworzenia symulacji zdarzeń dyskretnych, opraco-

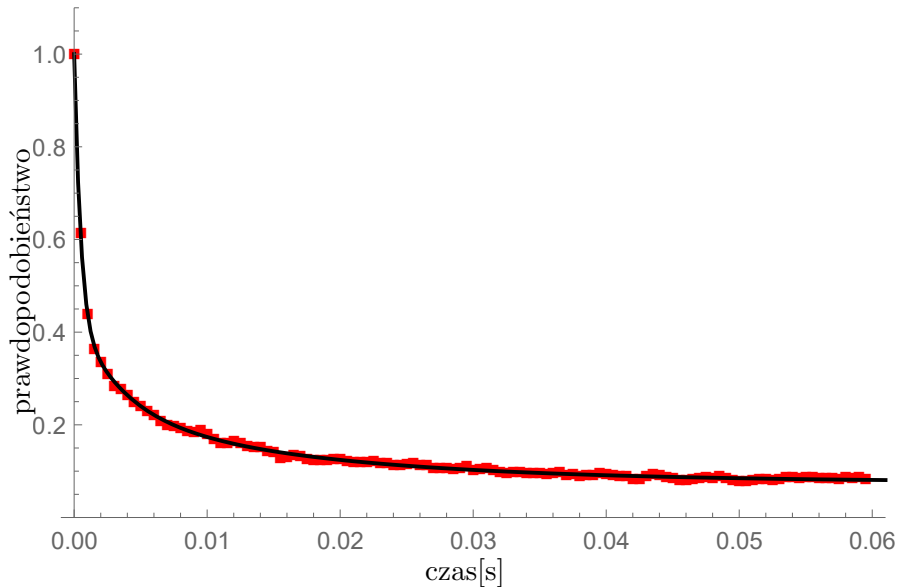
wanym i rozwijanym przez Andreasa Vargę, początkowo na Uniwersytecie Technicznym w Budapeszcie. Pakiet symulacyjny OMNeT++ udostępniany jest za darmo do celów niekomercyjnych, składa się ze zbioru bibliotek i plików nagłówkowych w języku C++, zestawu programów wspomagających tworzenie modeli i analizę wyników symulacji oraz środowisk uruchomieniowych: graficznego (wizualizacja przebiegu symulacji wraz z animacją) i tekstowego (szybka realizacja symulacji). Tworzenie modelu symulacyjnego polega na zdefiniowaniu elementów modelu i opisu topologii połączeń pomiędzy nimi w języku NED oraz zaprogramowania działania poszczególnych elementów w języku C++. Środowisko zostało zaprojektowane z myślą o symulacji sieci komputerowych (zob. np. [141]), lecz możliwe jest jego wykorzystanie do badań nad modelami kolejkowymi (przykładowy prosty model kolejkowy z dyscypliną FIFO jest dostarczony wraz ze środowiskiem w trakcie jego pobierania i instalacji na komputerze)

Do porównania wyników otrzymanych numerycznie z wynikami symulacji zestawione zostały następujące dwa wybrane rozkłady prawdopodobieństw długości kolejki:

1. rozkład (2.1.1) dla prostego procesu Poissona (Rysunek 2.2) według pierwszego scenariusza, opisanego w poprzednim podrozdziale 2.3.1;
2. rozkład (2.2.1) dla złożonego procesu Poissona (Rysunek 2.3) według pierwszego scenariusza (dokładniejszy jego opis znajduje się w podrozdziale 2.3.5 w szóstym eksperymencie).

Parametry modelu kolejkowego są następujące: początkowa liczba zgłoszeń w systemie  $n = Y(0) = 0$ , liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $m = Y(t) = 1$  w chwili  $t$ , intensywności napływu zgłoszeń oraz ich obsługi posiadają taką samą wartość  $\lambda = \mu = 600$  pakietów/s ustalającą obciążenie systemu na poziomie  $\rho = 1$ , odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju wynosi średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego średnie zapełnienie systemu wynosi  $\kappa_b = 1.75$ .

Symulacje wybranych dwóch modeli kolejkowych zostały wykonane w oparciu o przedstawione parametry obliczeń numerycznych uzupełnione o krok czasu wynoszący  $t_c = 0.0005$  sekundy i opisujący chwile czasu  $k \cdot t_c = t \in [0, 0.06]$  dla  $k = 0; 1; 2; \dots; 60$ , w których następuje pomiar liczby zgłoszeń obecnych w systemie. Proces symulacji obejmuje 10 tysięcy pojedynczych prób. Każda próba stanowi odrębny okres czasu  $t \in [0, 0.06]$ , w którym następuje symulacja losowego napływu i obsługi pakietów zgodna z założonym w modelu kolejkowym mechanizmem zawieszenia obsługi typu „multiple vacation”. Dla każdej próby losowane jest unikalne ziarno (liczba naturalna) używane do inicjalizacji generatora liczb pseudolosowych stanowiących lo-



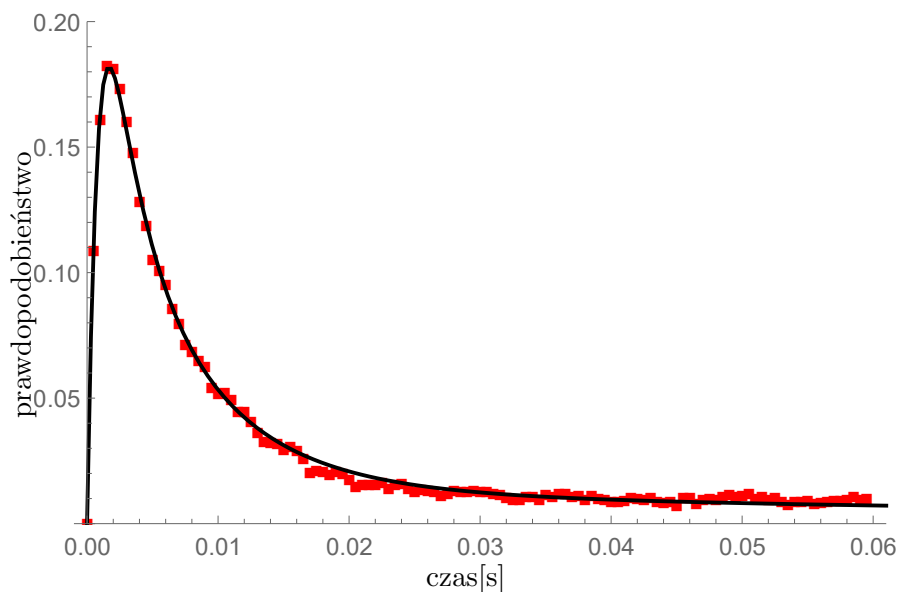
Rysunek 2.2: Porównanie rozkładu prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 | Y(0) = 1\}$  dla prostego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (2.1.52) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik dziesięciotysięcznej próby losowej – czerwone kwadraty na wykresie.

sowe momenty napływu i obsługi wiadomości, a także długości pojedynczych okresów przestoju.

Wykresy przedstawione na Rysunkach 2.2 i 2.3 potwierdzają wysoką zgodność obliczeń numerycznych z wynikami symulacji. Maksymalna różnica w wartościach prawdopodobieństw między obliczeniami numerycznymi a wynikami symulacyjnymi mierzona w chwilach  $k \cdot t_c$  wynosi 0.00599106.

### 2.3.3 Badanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń w złożonym procesie Poissona

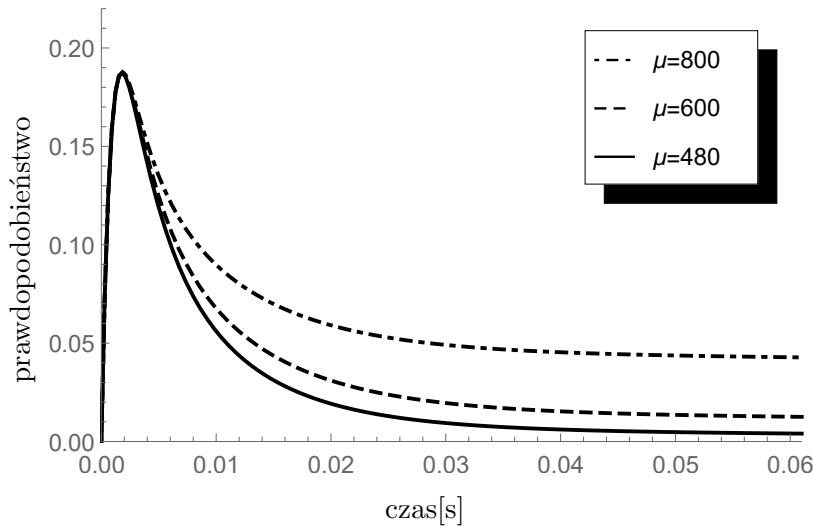
W kolejnym eksperymencie przyjrzymy się rozkładowi prawdopodobieństwa długości kolejki (2.2.1) w zależności od zmiennych wartości czasu obsługi pakietów. Rozważmy trzy scenariusze, w których parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = 0.4$  oraz pary  $(\mu_1, \mu_2) \in \{(960, 720); (780, 520); (320, 720)\}$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest równa 800, 600 i 480 pakietów/s, co odpowiada prędkościom przetwarzania danych rzędu 640, 480 i 384 kb/s, odpowiednio. Intensywność napływu zgłoszeń  $\lambda = 600$  pakietów/s jest stała, wobec czego uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności obsługi pakietów. Pozostałe para-



Rysunek 2.3: Porównanie rozkładu prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = 0\}$  dla złożonego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (2.2.57) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik dziesięciotysięcznej próby losowej – czerwone kwadraty na wykresie.

metry początkowe mają następujące wartości: początkowa liczba zgłoszeń w systemie  $n = Y(0) = 0$ , liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $m = Y(t) = 1$  w chwili  $t$ , odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju wynosi średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.5$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.5, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.125; 1.5; 1.875\}$  względem poszczególnych intensywności obsługi pakietów. Rysunek 2.4 prezentuje otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.

Analizując otrzymany wykres możemy zauważyć, iż prawdopodobieństwo obecności jednego zgłoszenia w systemie jest największe w początkowych chwilach czasu  $t > 0$  bezpośrednio po rozpoczęciu pracy systemu. Wynika to z faktu, że po starcie serwer od razu przechodzi w tryb bezczynności z powodu braku pakietów do obsłużenia ( $Y(0) = 0$ ). Średni czas pomiędzy momentami wpływu zgłoszeń to  $t_w = 0.00167$  s i właśnie dlatego w okresie pomiędzy  $t_w$  i  $t_p$  obserwujemy osiągnięcie maksymalnej wartości prawdopodobieństwa wynoszącej niespełna 0.19. Wartość maksimum jest niezależna od przyjętych scenariuszy, gdyż nie zależy ona od intensywności obsługi pakietów. W kolejnych chwilach czasu następuje spadek wartości prawdopodobieństwa aż do czasu osiągnięcia przez system stanu równowagi widocznego



Rysunek 2.4: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.

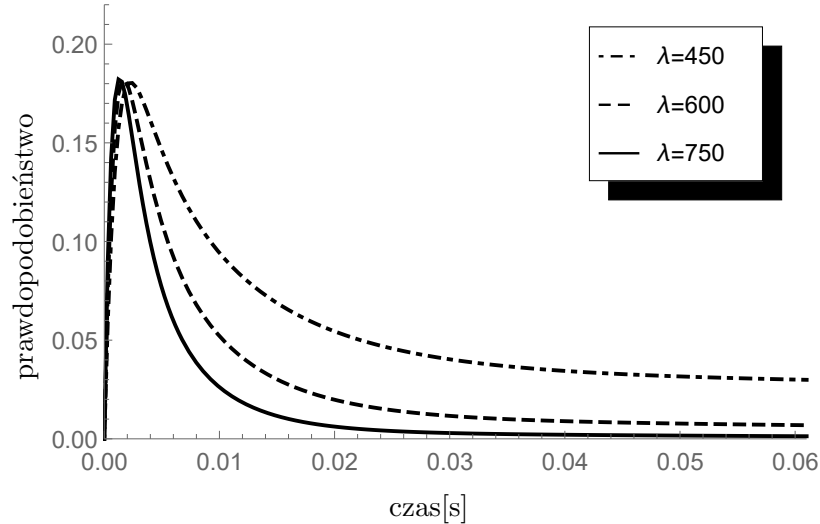
w końcowej części wykresu. Charakter malejącego prawdopodobieństwa jest zależny od parametru intensywności obsługi – im mniejsze obciążenie systemu  $\rho$ , tym większa szansa, że w późniejszej chwili  $t$  też będzie tylko jeden pakiet zakumulowany w systemie.

### 2.3.4 Badanie wpływu zmian intensywności napływu zgłoszeń w złożonym procesie Poissona

W kolejnym eksperymencie przyjrzymy się rozkładowi prawdopodobieństwa długości kolejki (2.2.1) w zależności od zmiennych wartości intensywności napływu pakietów. Rozważmy trzy scenariusze, w których parametr  $\lambda$  przyjmuje wartości 450, 600 i 750 pakietów/s, co odpowiada prędkościom przesyłu danych rzędu 360, 480 i 600 kb/s. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = 0.6$  oraz para  $(\mu_1, \mu_2) = (680, 510)$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest równa 600 pakietów/s, wobec czego uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Pozostałe parametry początkowe mają następujące wartości: początkowa liczba zgłoszeń w systemie  $n = Y(0) = 0$ , liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $m = Y(t) = 1$  w chwili  $t$ , odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju trwa średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Rysunek 2.5 prezentuje otrzymane wyniki



obliczeń numerycznych.



Rysunek 2.5: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = 0\}$  dla  $\mu = 600$  pakietów/s.

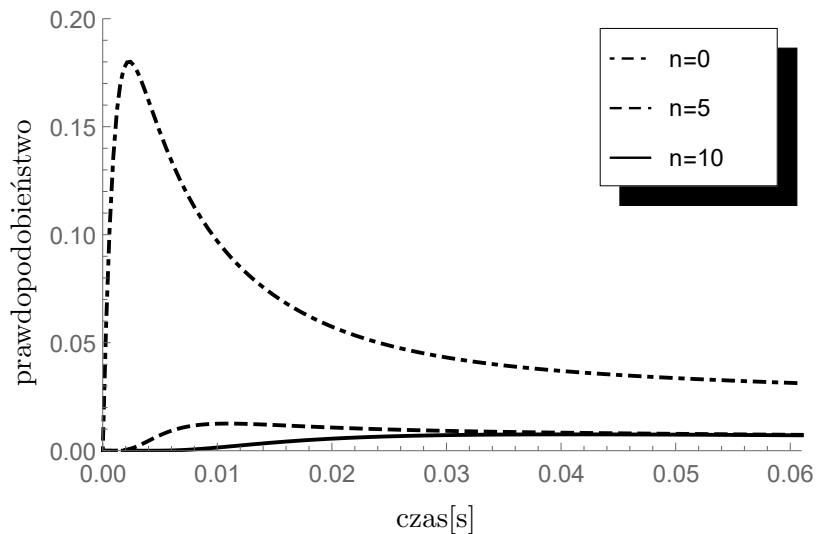
Analizując otrzymany wykres możemy zauważyć, iż prawdopodobieństwo obecności jednego zgłoszenia w systemie jest największe w początkowych chwilach czasu  $t > 0$  bezpośrednio po rozpoczęciu pracy. Wynika to z faktu, że po starcie serwer od razu przechodzi w tryb bezczynności z powodu braku pakietów do obsłużenia ( $Y(0) = 0$ ). Średni czas pomiędzy momentami wpływu zgłoszeń  $t_w$  jest uzależniony od wybranych trzech intensywności napływu pakietów i wynosi 0.00222 s, 0.00167 s i 0.0013(3) s, odpowiednio. Obserwowane osiągnięcie maksymalnej wartości prawdopodobieństwa, wynoszącej około 0.18, występuje w odpowiednich dla każdej intensywności przedziałach czasu  $(t_w, t_p)$  lub  $(t_p, t_w)$ . W kolejnych chwilach czasu następuje spadek wartości prawdopodobieństwa aż do czasu osiągnięcia przez system stanu równowagi widocznego w końcowej części wykresu. Charakter malejącego prawdopodobieństwa jest zależny od parametru  $\lambda$  – im intensywniej zgłoszenia napływają do systemu, tym szybciej maleje szansa, że w późniejszej chwili  $t$  też będzie tylko jeden pakiet zakumulowany w systemie.

### 2.3.5 Badanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w złożonym procesie Poissona

W piątym, szóstym oraz siódmym eksperymencie przyjrzymy się rozkładowi prawdopodobieństwa długości kolejki (2.2.1) w zależności od zmiennych

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

wartości początkowej liczby pakietów obecnych w systemie. Rozważmy trzy scenariusze (takie same dla każdego eksperymentu), w których parametr  $n$  przyjmuje wartości 0, 5 i 10 pakietów. Każdy eksperyment ma przyporządkowany parametr  $\lambda$  o odmiennej wartości 450, 600 i 750 pakietów/s, co odpowiada prędkościom przesyłu danych rzędu 360, 480 i 600 kb/s. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = 0.8$  oraz pary  $(\mu_1, \mu_2) \in \{(800, 300); (720, 360); (960, 240)\}$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest zawsze równa 600 pakietów/s, wobec czego uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów każdego z opisywanych eksperymentów. Pozostałe parametry początkowe mają następujące wartości: liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $m = Y(t) = 1$  w chwili  $t$ , odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju trwa średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Rysunki 2.6, 2.7 i 2.8 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych dla każdego eksperymentu osobno.

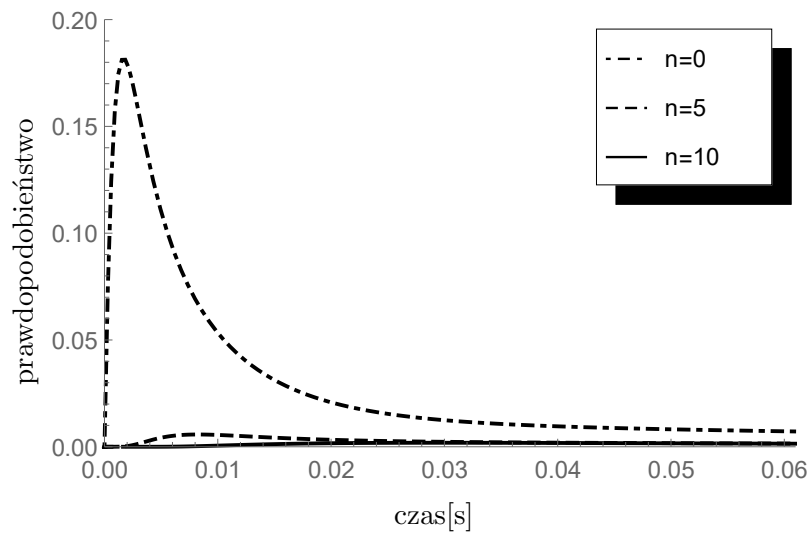


Rysunek 2.6: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = n\}$  dla  $\lambda = 450$  pakietów/s.

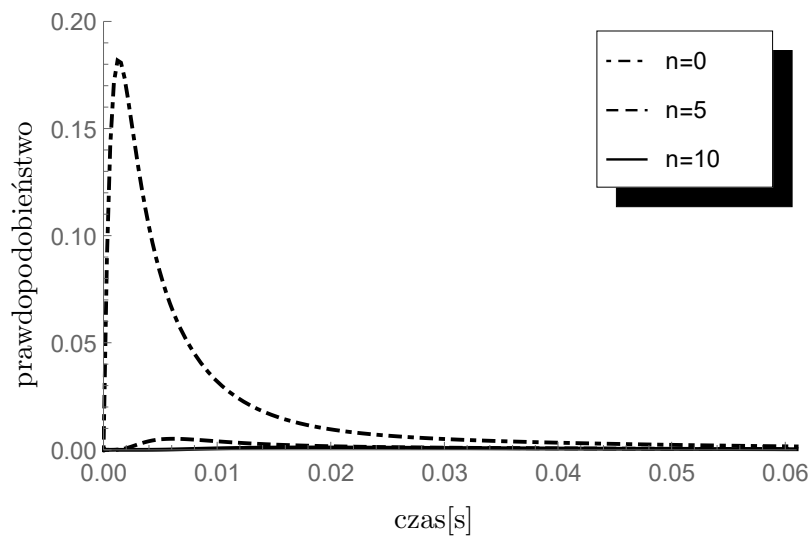
Analizując otrzymane wykresy możemy zauważyć, iż charakter rozkładu prawdopodobieństwa obecności jednego zgłoszenia w systemie znacząco różni się pomiędzy wykresami, jednakże zawiera też pewne cechy wspólne. Możemy tutaj wyróżnić dwie kategorie:

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---



Rysunek 2.7: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = n\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.



Rysunek 2.8: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = n\}$  dla  $\lambda = 750$  pakietów/s.

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---

1.  $0 = n < m = 1$  w tej kategorii obserwujemy początkowy wzrost prawdopodobieństwa i późniejszy jego spadek aż do czasu osiągnięcia przez system stanu równowagi (w istocie wyniki zaczerpnięto z eksperymentu opisanego w podrozdziale 2.3.4 w celu porównania z wynikami obliczeń drugiej kategorii);
2.  $1 = m < n \in \{5, 10\}$  w tej kategorii obserwujemy powolny wzrost wartości prawdopodobieństwa do momentu osiągnięcia przez system stanu równowagi.

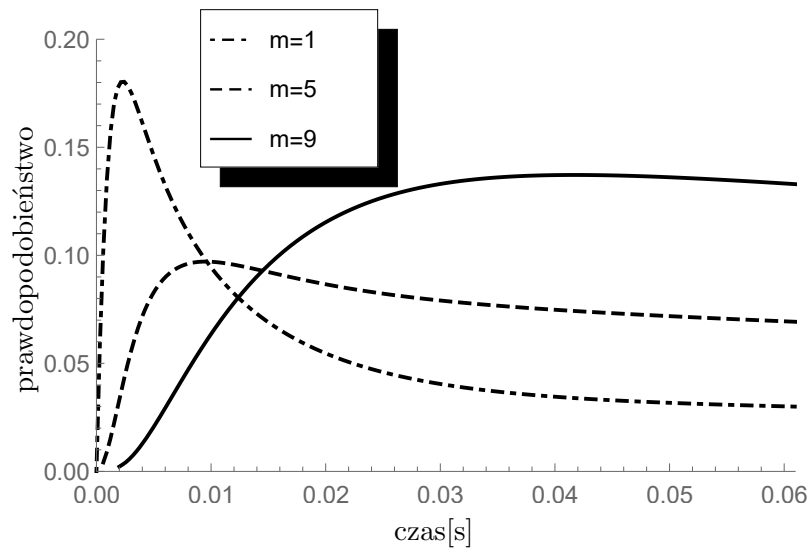
Zgodnie z oczekiwaniami, im większa jest początkowa liczba  $n$  pakietów obecnych w systemie w chwili  $t = 0$ , tym mniejsze jest prawdopodobieństwo występowania dokładnie jednego pakietu w dowolnym momencie czasu  $t > 0$ . Równocześnie zaobserwować można wyraźny wpływ wartości  $n$  na początkowy przebieg wykresów prawdopodobieństwa. Oczywiście, rozkład długości kolejki w stanie stacjonarnym będzie już niezależny od początkowego stopnia zapełnienia bufora akumulującego, stąd (dla ustalonej wartości  $m$ ) wszystkie krzywe w długookresowej perspektywie czasowej „ustabilizują się” na tym samym poziomie.

### 2.3.6 Porównanie charakterystyk rozkładów prawdopodobieństwa długości kolejki względem zmiennej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w chwili $t$ dla złożonego procesu Poissona

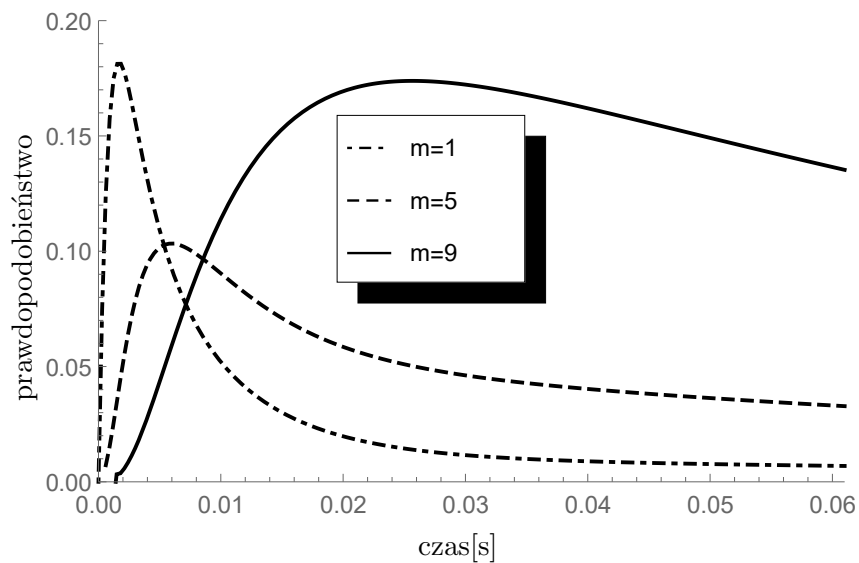
W ósmym, dziewiątym oraz dziesiątym eksperymencie rozważamy trzy scenariusze (takie same dla każdego eksperymentu), w których parametr  $m$  przyjmuje wartości 1, 5 i 9 pakietów. Każdy eksperyment ma przyporządkowany parametr  $\lambda$  o odmiennie wartości 450, 600 i 750 pakietów/s, co odpowiada prędkościom przesyłu danych rzędu 360, 480 i 600 kb/s. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = 0.2$  oraz pary  $(\mu_1, \mu_2) \in \{(440, 660); (480, 640); (760, 570)\}$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest zawsze równa 600 pakietów/s, wobec czego uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów każdego z opisywanych eksperymentów. Pozostałe parametry początkowe mają następujące wartości: liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $n = 0$  w chwili  $t = 0$ , odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju trwa średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Rysunki 2.9, 2.10 i 2.11 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych dla każdego eksperymentu osobno.

W zaprezentowanym porównaniu, podobnie jak w poprzednich badaniach, możemy zaobserwować dwa etapy w przebiegu wykresów charaktery-

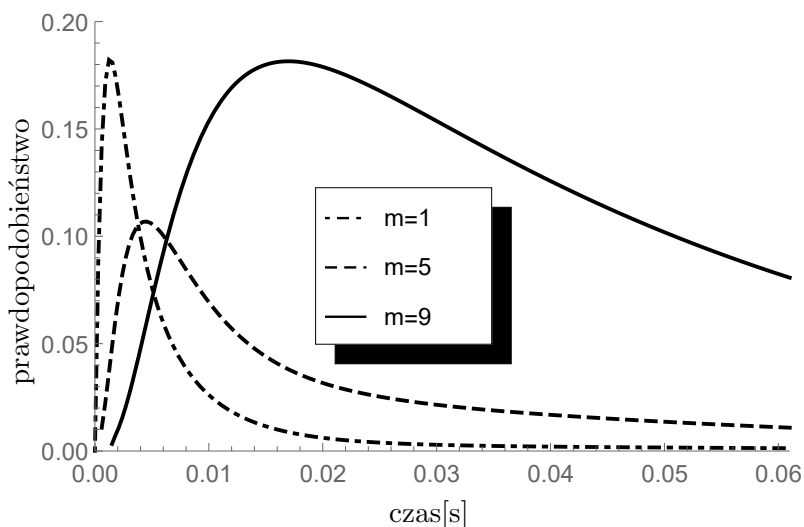
## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)



Rysunek 2.9: Wpływ zmian wartości pożądanej liczby zgłoszeń  $m$  obecnych w systemie w chwili  $t$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = m \mid Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 450$  pakietów/s.



Rysunek 2.10: Wpływ zmian wartości pożądanej liczby zgłoszeń  $m$  obecnych w systemie w chwili  $t$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = m \mid Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.



Rysunek 2.11: Wpływ zmian wartości pożądanej liczby zgłoszeń  $m$  obecnych w systemie w chwili  $t$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = m \mid Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 750$  pakietów/s.

styk rozkładu liczby zgłoszeń:

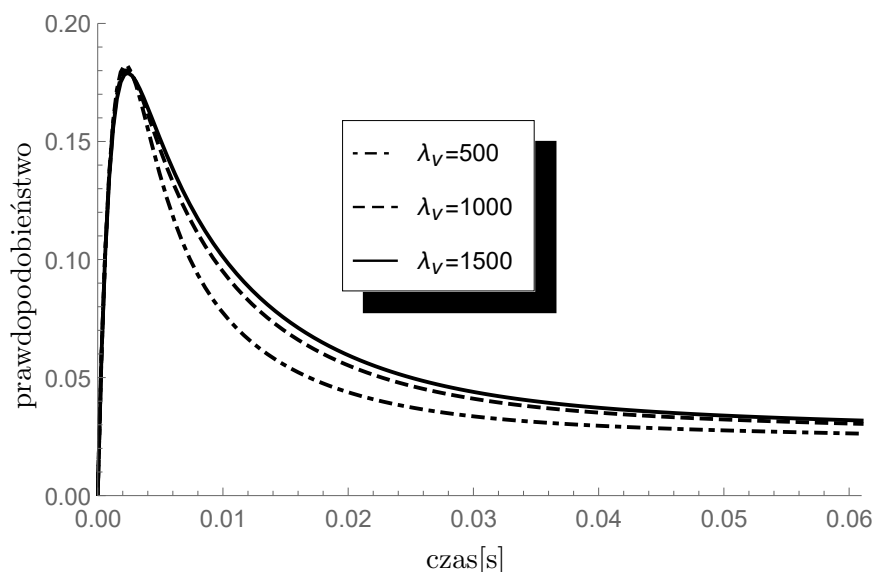
1. wzrost wartości prawdopodobieństwa (nagły bądź łagodny)  $\mathbf{P}\{Y(t) = m \mid Y(0) = 0\}$  do poziomu maksymalnej możliwej w danym przypadku wartości, którego tempo jest bezpośrednio związane z pożądaną liczbą pakietów  $m$ ;
2. spadek wartości prawdopodobieństwa (także nagły bądź łagodny) do poziomu stanu równowagi systemu.

### 2.3.7 Badanie wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju w złożonym procesie Poissona

W dziewiątym, dziesiątym oraz jedenastym eksperymencie rozważamy trzy scenariusze (takie same dla każdego eksperymentu), w których parametr  $\xi = \lambda_v$  przyjmuje wartości 500, 1000 oraz 1500 – wówczas pojedynczy okres przestoju  $t_p$  trwa średnio 0.004, 0.002 i 0.0013(3) sekundy, odpowiednio. Każdy eksperyment ma przyporządkowany parametr  $\lambda$  o odmiennej wartości 450, 600 i 750 pakietów/s, co odpowiada prędkościom przesyłu danych rzędu 360, 480 i 600 kb/s. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = \frac{2}{3}$  oraz pary  $(\mu_1, \mu_2) \in \{(500, 1000); (560, 700); (650, 520)\}$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest zawsze równa 600 pakietów/s, wobec czego uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in$

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

$\{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów każdego z opisywanych eksperymentów. Pozostałe parametry początkowe mają następujące wartości: liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $n = 0$  w chwili  $t = 0$ , liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $m = Y(t) = 1$  w chwili  $t$ , średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapelnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Rysunki 2.12, 2.13 i 2.14 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych dla każdego eksperymentu osobno.

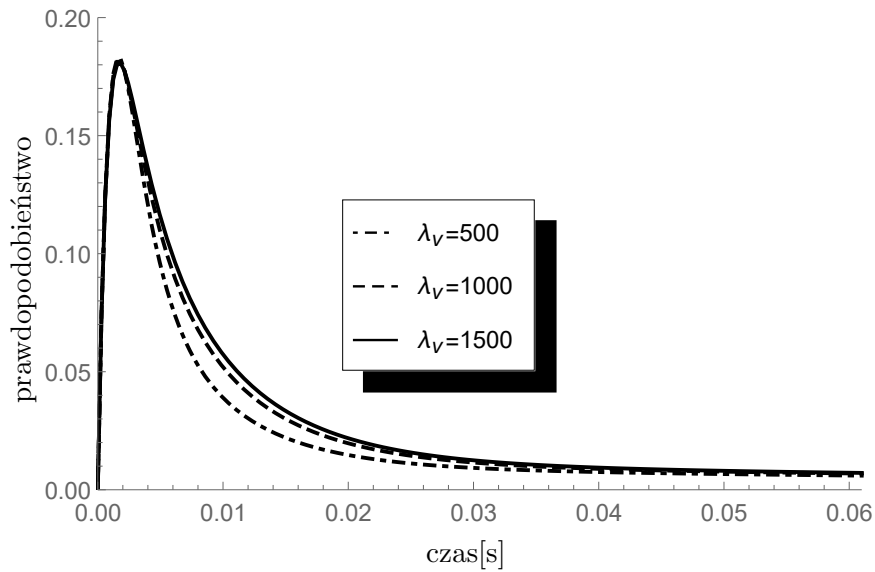


Rysunek 2.12: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 450$  pakietów/s.

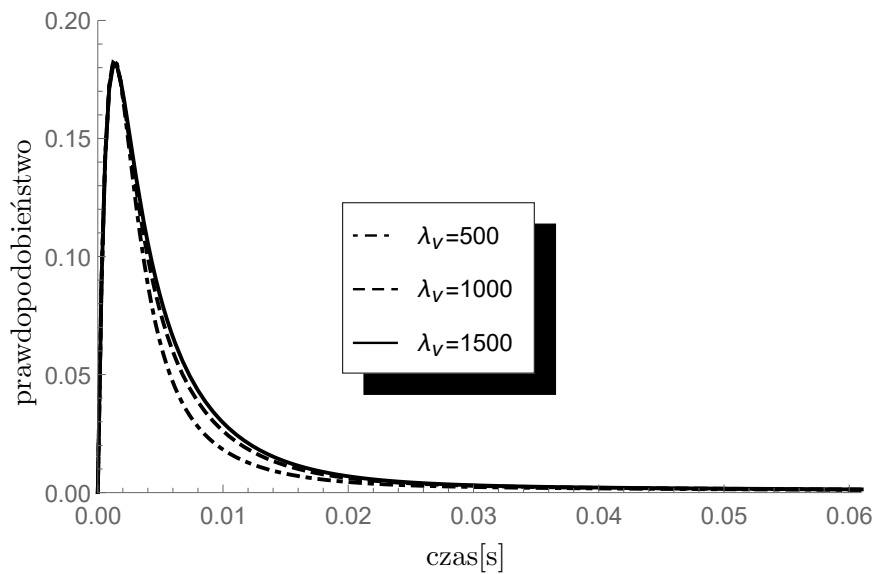
Średni czas pomiędzy momentami wpływu zgłoszeń  $t_w$  jest uzależniony od wybranych trzech intensywności napływu pakietów i wynosi 0.00222 s, 0.00167 s i 0.0013(3), odpowiednio. Obserwowane osiągnięcie w chwili  $t_{maxP}$  maksymalnej wartości prawdopodobieństwa, wynoszącej około 0.18, występuje w odpowiednich dla każdej intensywności przedziałach czasu  $(t_w, t_p)$  lub  $(t_p, t_w)$ . Zgodnie z oczekiwaniami, im dłuższy jest okres pojedynczego przestoju  $t_p$  (a tym samym mniejsza wartość parametru  $\lambda_v$ ), tym mniejsze jest prawdopodobieństwo występowania dokładnie jednego pakietu w momentach czasu  $t > t_{maxP}$ . Zjawisko to jest najlepiej widoczne przy obciążeniu systemu na poziomie  $\rho = 0.75$ , a tym samym średnim zapelnieniu  $\kappa_b = 1.3125$ , i jego siła maleje wraz ze wzrostem poziomu obciążenia. Dłuższe okresy przestoju sprzyjają nagromadzeniu się większej ilości pakietów w buforze przed rozpoczęciem obsługi tych zgłoszeń.

## 2. Rozkład liczby zgłoszeń (długości kolejki)

---



Rysunek 2.13: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.

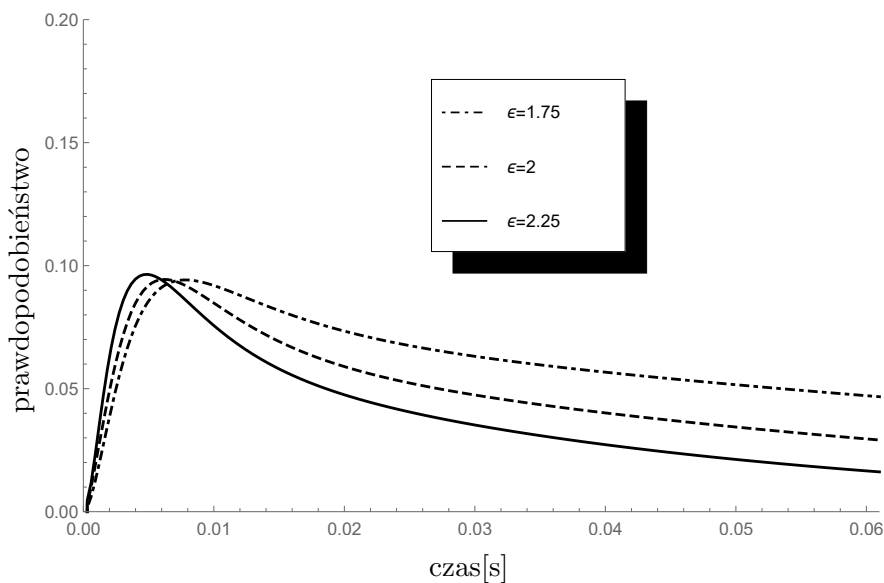


Rysunek 2.14: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 \mid Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 750$  pakietów/s.



### 2.3.8 Badanie wpływu zmian wartości średniego rozmiaru pakietu w złożonym procesie Poissona

W ostatnim eksperymencie rozważamy trzy scenariusze, w których średni rozmiar pakietu  $B_\varepsilon$  przyjmuje wartości 175, 200 oraz 225 bajtów – wówczas średni rozmiar grupy  $\varepsilon$  wynosi 1.75, 2 i 2.25 pakietu, a ciągi prawdopodobieństw  $(p_k)$  mają wartości  $\{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ ,  $\{0.25, 0.5, 0.25, 0, \dots\}$  oraz  $\{0.25, 0.25, 0.5, 0, \dots\}$  odpowiednio dla każdego scenariusza. Intensywność napływu zgłoszeń  $\lambda = 600$  pakietów/s jest stała i odpowiada prędkości przesyłu danych rzędu 480 kb/s. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = 2/3$  oraz para  $(\mu_1, \mu_2) = (650, 520)$ , dla której intensywność obsługi  $\mu$  jest równa 600 pakietów/s, wobec czego uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho = 1$ , a tym samym otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.75; 2; 2.25\}$  odpowiednio dla każdego scenariusza. Pozostałe parametry początkowe mają następujące wartości: liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $n = 1$  w chwili  $t = 0$ , liczba zgłoszeń obecnych w systemie  $m = Y(t) = 6$  w chwili  $t$ . Rysunek 2.15 prezentuje otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.



Rysunek 2.15: Wpływ zmian wartości średniego rozmiaru grupy  $\varepsilon$  na rozkład prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 6 \mid Y(0) = 1\}$  dla obciążenia systemu  $\rho = 1$ .

Zgodnie z oczekiwaniami, im liczniejsze grupy zgłoszeń napływają do systemu, tym szybciej następuje moment nagromadzenia dokładnie sześciu pakietów, co przekłada się na tempo początkowego wzrostu wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 6 \mid Y(0) = 1\}$ . Jednakowoż intensywniejszy napływ

zgłoszeń w wymiarze ilościowym skutkuje malejącą wraz z czasem wartością naszego prawdopodobieństwa, aż do momentu osiągnięcia stanu równowagi systemu znajdującego się na niższym pułapie wartości prawdopodobieństwa.

### 2.4 Podsumowanie rozdziału

Otrzymane rozkłady prawdopodobieństwa dla liczby zgłoszeń w systemie w chwili  $t$  (czyli w stanie nieustalonym) umożliwiły nam wgląd w charakterystykę kolejkowania pakietów w rozważanym modelu kolejkowym z dyscypliną zawieszenia obsługi. Badanie postaci przykładowych rozkładów ze względu na zmienne wartości poszczególnych parametrów początkowych umożliwiło nam na określenie, w jak dużym stopniu zmiana konkretnego parametru wpływa na zmianę prawdopodobieństwa długości kolejki  $\mathbf{P}\{Y(t) = 1 | Y(0) = 0\}$ . Możemy stwierdzić, iż najmniejszy wpływ na kształt krzywej prawdopodobieństwa wykazuje wartość odwrotności parametru skali rozkładu pojedynczego okresu przestoju  $\xi$ . W dalszej kolejności intensywności napływu  $\lambda$  i obsługi  $\mu$  zgłoszeń wykazują znacząco większy wpływ, natomiast największy wpływ wykazała przyjęta wartość  $n$  początkowej liczby pakietów obecnych w systemie. Ostatni eksperyment wykonany dla rozkładu prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{Y(t) = 6 | Y(0) = 1\}$  pokazał znaczący wpływ średniego rozmiaru grupy  $\varepsilon$  na poziomie porównywalnym do wpływu parametrów  $\lambda$  i  $\mu$ , co, zważywszy na bezpośredni związek między intensywnościami a liczbą pakietów w grupie, jest całkowicie uzasadnione. Potwierdzona dla dwóch rozkładów (podrozdział 2.3.2) duża zgodność obliczeń numerycznych i symulacyjnych potwierdza słuszność Twierzeń 2.1 i 2.2. Zaprezentowane w nich wzory stanowią swoiste uzupełnienie informacji o rozkładzie liczby zgłoszeń w rozważanym typie modelu kolejkowego, na którego temat wiedzę zaczerpnięto m. in. z wymienionych poniżej publikacji.

Rozpocznijmy od opracowań dotyczących złożonego procesu Poissona. W artykułach [133] i [157] autorzy opisali funkcję tworzącą rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki oraz jej wartość oczekiwaną. Wzory zostały wyprowadzone wykorzystując konstrukcję włożonego łańcucha Markowa dla procesu stochastycznego opisującego liczbę zgłoszeń obecnych w systemie w stanie ustalonym. W pracy [63] do wyznaczenia funkcji tworzącej rozkładu liczby zgłoszeń w stanie stacjonarnym systemu wykorzystano technikę zmiennych dodatkowych (ang. *supplementary variables' technique*). Cytowana praca stanowi rozwinięcie koncepcji przedstawionej w [117], w której rozważany jest model kolejkowy  $M^X/G/1$  z opcjonalnymi pojedynczymi okresami przestoju stacji obsługi, w którym obsłużone zgłoszenie może „domagać się” powtórnej obsługi – wraca wówczas do kolejki (ang. *feedback*). Jako najważniejszy wynik otrzymano funkcję tworzącą rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w stanie ustalonym. W artykule [87] opisano modyfikację systemu  $M^X/G/1$  polegającą na zastosowaniu progowej dys-

cypliny ponownego uruchamiania stacji obsługi po okresie jej bezczynności (ang. *N-policy*), przy czym pierwsza obsługa następująca po zakończeniu okresu zawieszenia obsługi jest dodatkowo poprzedzona okresem rozruchu serwera (ang. *setup time*), w którym osiąga on pełną gotowość do przetwarzania zgłoszeń. Uzyskane wyniki dotyczą stanu tranzytywnego. Inna interesująca modyfikacja została opisana w pracy [124], w której model  $M^X/G/1$  został poszerzony o scenariusz awarii opróżniającej bufor z pakietów i wprowadzającej okres naprawy serwera obsługującego. Zaprezentowane w artykule wyniki zostały uzyskane jedynie dla stanu ustalonego. Kolejne przytoczone artykuły opisują prosty proces Poissona. Pierwszy prezentuje wyniki dla stanu stacjonarnego, drugi zaś dla stanu tranzytywnego. [58] i [88] przedstawiają modele  $M/M/1$  oraz  $M/G/1$  z wielokrotnymi okresami przestoju rozszerzone o możliwość przerwania okresu zawieszenia obsługi w przypadku gdy w buforze zostanie zakumulowana określona ilość  $X$  pakietów. Rozwinięcie tej koncepcji dla systemu  $M/M/1$  jest zawarte w [151], gdzie oprócz możliwości awarii serwera wprowadzono koncepcję „niecierpliwych” klientów z pewnym ograniczonym maksymalnym czasem oczekiwania na obsługę. Ponadto wzór dla średniego rozmiaru kolejki typu  $M/G/1$  z wielokrotnymi okresami przestoju został wyprowadzony w [18] dla stanu ustalonego.

Innym ciekawym podejściem do problemu wyznaczenia rozkładu prawdopodobieństwa liczby zgłoszeń w stanie ustalonym jest koncepcja wykonania obliczeń rekurencyjnych w systemie  $M/M/1/N$  na bazie „poprzedniego” modelu  $M/M/1/(N-1)$  opisana w pracy [6]. Przytoczony w tej pracy model nie zawiera mechanizmu zawieszenia obsługi. Kolejne cytowane w tym rozdziale artykuły poruszają kwestię praktycznego wykorzystania omawianego w podrozdziale 2.1 modelu. [175] stosuje model  $M/G/1/N$  z „wakacjami” do rozwiązania problemu przesyłu przez sieć sensorową dwóch różnych typów pakietów kolejkowanych w oddzielnych buforach. Obsługa zgłoszeń pochodzących z obydwu buforów jest wykonywana przez jedno wspólne stanowisko obsługi, a prezentowane wyniki osiągnięto w stanie ustalonym systemu. [174] opisuje zastosowanie modelu kolejkowego w procesie tworzenia protokołu wykorzystywanego w wojskowych taktycznych bezprzewodowych mobilnych sieciach „ad hoc”, posiadających kooperujące terminale przekaźnikowe (ang. *cooperative relay terminal*). Czas trwania „wakacji” w rozpatrywanym w artykule modelu kolejkowym  $M/G/1/N$  jest uznawany jako czas „współpracy”, w trakcie którego terminal zawieszający obsługę z powodu braku pakietów nawiązuje „współpracę” z terminalem obciążonym obsługą pakietów (na zasadach określonych przez twórców protokołu).

Większość cytowanych do tej pory prac dotyczy stanu stacjonarnego. W literaturze problemu istnieje dość wyraźna różnica w liczbie opracowań przedstawiających wyniki uzyskane w stanach ustalonym oraz nieustalonym, z przewagą liczebną po stronie pierwszego wymienionego stanu. Prezentowana w dalszej części analiza stanu wiedzy o długości kolejki również potwierdza ten wyraźny podział, eksponując zasadność dokonanej w rozprawie

tranzytywnej analizy omawianej charakterystyki kolejkowania.

Kolejna grupa artykułów, opisujących stacjonarną analizę długości kolejki, prezentuje różnorodność użytych w badaniach metod oraz szerokiego spektrum typów modeli kolejkowych, dla których wyprowadzona została ta charakterystyka. Starsze opracowania badają bardziej ogólne modele, przykładowo [111] opisuje najogólniejszy model  $GI/G/1$  (wzory wyprowadzono przy użyciu rekurencyjnych równań stochastycznych), [19] model  $G/M/s/r$  (użyto rozwinięcia funkcji Laguerre'a wobec rozkładu czasu oczekiwania), a [158] model  $GI/M/c$  z niezależnym mechanizmem zawieszenia obsługi wobec każdego stanowiska obsługi z osobna (wykorzystano modelowanie włożonych łańcuchów Markowa, uzyskując rozwiązanie metodą macierzowo-geometryczną (ang. *matrix geometric solution*). Z kolei nowsze opracowania ukierunkowane są w stronę większego uszczegółowienia parametrów i cech badanych modeli kolejkowych. [32] opisuje model  $GI^X/M^Y/1$  z grupowym napływem i grupową obsługą zgłoszeń. W badaniach autorzy wykorzystują m. in. funkcję tworzącą prawdopodobieństwa, metodę pierwiastków oraz analizę zależności pomiędzy rozkładami prawdopodobieństwa w chwilach wejścia zgłoszeń do systemu oraz w dowolnych chwilach czasu. Uszczegółowienie modelu zaprezentowano w [132], gdzie zbadano model  $M/G_r^Y/1$  z pojedynczym napływem pakietów i losową pojemnością serwera i czasem obsługi zależnym od rozmiaru grupy obsługiwanych w jednej chwili zgłoszeń. Artykuł [145] i jego rozszerzenie [49], prezentują model  $MAP/G/1/N$  z regulaminem zawieszenia obsługi, a wykonana analiza analityczna oparta jest na włożonych łańcuchach Markowa. Kolejne trzy artykuły koncentrują się na analogicznym modelu, posiadającym grupowy napływ pakietów do systemu. Model  $BMAP/G/1$  opisany jest w pracach [154] i [120], gdzie pierwsza z nich prezentuje opracowaną przez autora formułę rekurencji do obliczania rozkładu długości kolejki w losowym momencie stacjonarnej kolejki, natomiast druga wykorzystuje ku temu teorię odnowy, włożone łańcuchy Markowa oraz funkcję tworzącą prawdopodobieństwa. Trzeci artykuł [139] analizuje model  $BMAP/R^{(a,b)}/1$ , w którym serwer obsługuje zgłoszenia w grupach o maksymalnej wielkości „b” oraz minimalnej liczbie „a” zgłoszeń. Czas obsługi każdej grupy jest zgodny z rozkładem typu „R”, gdzie rozkład ten reprezentuje klasę rozkładów, których transformata Laplace'a-Stieltjesa jest wymierną lub przybliżoną funkcją wymierną.

Ostatnia grupa artykułów, opisujących tranzytywną analizę długości kolejki, również nacechowana jest różnorodnością użytych w badaniach metod oraz typów modeli kolejkowych. [162] prezentuje rozkład długości kolejki typu  $D - MAP/PH/1$  (gdzie  $D$  oznacza dyskretny czas napływu zgłoszeń) uzyskany numerycznie poprzez odwrócenie dwuwymiarowej funkcji tworzącej opóźnienia kolejkowania dla  $n$ -tego zgłoszenia napływającego do systemu (wykorzystano Twierdzenie 1 z pracy [52]). Obliczenia numeryczne przeprowadzono z użyciem programu MATLAB poprzez implementację metody zaprezentowanej w pracy [25]. W [115] opisano model  $Geo/G/1$  z czasem na-

plywu kolejnych zgłoszeń opisanym rozkładem geometrycznym  $Geo(p)$ . Za pomocą techniki rozkładu prawdopodobieństwa i teorii procesów odnowy, omawiana jest tranzytywna długość kolejki o stanie początkowym  $i (i \geq 0)$ . Artykuł [142] opisuje wyprowadzenie jawnego rozkładu długości kolejki dla systemu  $GI^b/M/1$  poprzez kombinatorykę ścieżek kratowych (ang. *lattice paths*). Dwie ostatnie przytoczone prace traktują o modelu  $M^X/G/1$ , będącym uogólnieniem omawianego w rozprawie modelu z uwagi na nieskończoną pojemność bufora. Autorzy [23] badają model bez mechanizmu zawieszenia obsługi, otrzymując tranzytywny rozkład długości kolejki w czasie. Z kolei w artykule [155] badany jest model zawierający tenże mechanizm zawieszenia obsługi, a przedstawione rezultaty opierają się także na wyprowadzeniu transformaty Laplace'a długości kolejki.

Wyniki zaprezentowane w niniejszym rozdziale, obejmujące zwarte postaci transformat Laplace'a długości kolejki oraz przykłady wykonanych numerycznych obliczeń, zostały opublikowane w następujących artykułach:

- [73] – w publikacji opisano wyniki osiągnięte dla prostego procesu Poissona (podrozdział 2.1);
- [85] – w artykule zaprezentowano wyniki osiągnięte dla złożonego procesu Poissona (podrozdział 2.2);
- [79] – w pracy przedstawiono model typu  $M^X/G/1/N$ , dla którego wyznaczono charakterystykę długości kolejki przy założeniu, iż każdy okres zawieszenia obsługi składa się z kolejnych okresów przestoju, każdy o takiej samej ustalonej długości.

Kończąc rozdział prezentujący rozkłady liczby zgłoszeń w stanie tranzytywnym warto również wspomnieć, iż postać uzyskanych transformat Laplace'a umożliwia w prosty sposób otrzymanie odpowiedniego wyniku w stanie stacjonarnym. Wykorzystując Twierdzenie (Taubera) 1.6 (przykłady stosowania tego twierdzenia możemy znaleźć m. in w [31], [98], [125], [75]) wobec transformaty Laplace'a (2.2.4) warunkowego rozkładu liczby zgłoszeń w ustalonej chwili  $t$  (Twierdzenie 2.2) otrzymujemy następującą zależność, umożliwiającą obliczenie prawdopodobieństw, iż w systemie w stanie ustalonym znajduje się dokładnie  $m$  zgłoszeń:

$$p_m = P\{X = m\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}_n^X(t, m) = \lim_{s \downarrow 0} s \cdot \hat{P}_n^X(s, m). \quad (2.4.1)$$

Prawdopodobieństwa (2.4.1) oczywiście nie zależą od początkowego stanu bufora. Analiza stanu stacjonarnego nie była zasadniczym celem rozprawy, wobec czego ograniczono się do prezentacji wyników w stanie niestacjonarnym.

# Rozdział 3

## Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

Drugą charakterystyką kolejkowania omawianego w rozprawie modelu jest rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora (dokładniej: czasu do wystąpienia pierwszego momentu przepełnienia od chwili uruchomienia systemu). Analogicznie jak w Rozdziale 2 rozpoczniemy od wyprowadzenia w zwartej postaci wzorów (zapiszemy je w postaci odpowiednich twierdzeń) dla prostego (podrozdział 3.1) oraz złożonego procesu Poissona (podrozdział 3.2), aby w kolejnym etapie (podrozdział 3.3) porównać i zobrazować na wykresach wyniki obliczeń numerycznych oraz statystyki badań symulacyjnych uzyskanych na próbie dziesięciu tysięcy powtórzeń startu procesu kolejkowania pakietów w systemie z włączoną rejestracją momentu wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora. Na koniec (podrozdział 3.4) omówimy otrzymane wyniki zestawiając je z krótką notą biograficzną omawiającą inne prace poruszające tematykę rozkładu prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora.

### 3.1 Prosty proces Poissona

Ponownie rozważmy model kolejkowy typu  $M/G/1/N$ , w którym do systemu napływają, zgodnie z prostym procesem Poissona o intensywności  $\lambda$ , kolejne buforowane zgłoszenia (pojemność bufora wynosi  $N - 1$  zgłoszeń, zaś maksymalna pojemność systemu to  $N$  zgłoszeń – uwzględniając jedno miejsce dla zgłoszenia aktualnie obsługiwanego). Obsługa zgłoszeń odbywa się zgodnie z dyscypliną FIFO z rozkładem zadany przez dystrybuantę  $F(\cdot)$ . Okres bezczynności serwera składa się z następujących po sobie okresów przestoju (pojedynczego lub występującego wielokrotnie), których długość trwania jest określona rozkładem zadany przez dystrybuantę  $V(\cdot)$ . Rozpoczyna się on za każdym razem, gdy zgłoszenie zostanie obsłużone i w buforze brakuje zgłoszeń oczekujących.

Niech powtórnie  $X(t)$  wyraża liczbę zgłoszeń obecnych w systemie w

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

chwili  $t$ . Oznaczmy przez  $\beta_n$  czas, po którym następuje pierwsze od momentu uruchomienia systemu przepełnienie bufora kolejującego zgłoszenia, przy założeniu, iż w momencie uruchomienia obsługi w czasie  $t = 0$  bufor zawierał dokładnie  $n$  pakietów. Innymi słowy  $\beta_n$  możemy zdefiniować w następujący sposób:

$$\beta_n = \inf\{t > 0 : X(t) = N \mid X(0) = n\}, \quad \text{gdzie } 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.1.1)$$

Wprowadźmy również definicję ogona dystrybuanty czasu do pierwszego przepełnienia bufora  $\Delta_n(\cdot)$ , tożsamą z prawdopodobieństwem iż pierwsze przepełnienie bufora od chwili uruchomienia obsługi zgłoszeń nastąpi po czasie  $t$ :

$$\Delta_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\beta_n > t\}, \quad t > 0, 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.1.2)$$

Przy założeniu, iż w momencie uruchomienia  $t = 0$  system jest pusty ( $n = 0$ ), w tejże chwili rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi zgłoszeń. W takiej sytuacji możemy wyróżnić następujące trzy niezależne od siebie zdarzenia losowe, tworzące układ zupełny zdarzeń względem ustalonej chwili  $t$ :

1. pierwsze zgłoszenie wchodzi do systemu przed upływem czasu  $t$  i zarazem okres zawieszenia obsługi również kończy się przed upływem tego czasu (oznaczymy to zdarzenie przez  $L_1(t)$ );
2. pierwsze zgłoszenie wchodzi do systemu przed upływem czasu  $t$ , lecz okres zawieszenia obsługi kończy się po upływie czasu  $t$  (oznaczymy to zdarzenie przez  $L_2(t)$ );
3. pierwsze zgłoszenie wchodzi do systemu po upływie czasu  $t$  (oznaczymy to zdarzenie przez  $L_3(t)$ ).

Definiując

$$\Delta_{0,i}(t) = \mathbf{P}\{\beta_0 > t, L_i(t)\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1.3)$$

otrzymujemy w ten sposób zależność

$$\Delta_0(t) = \sum_{i=1}^3 \Delta_{0,i}(t), \quad (3.1.4)$$

Dla funkcji  $\Delta_{0,i}(t)$ , analogicznie jak to zostało zrobione dla równania (2.1.2) w Rozdziale 2, możemy wyprowadzić następujące równania całkowe:

$$\begin{aligned} \Delta_{0,1}(t) &= \lambda \int_{x=0}^t e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x dV^{i*}(y) \int_{u=x-y}^{t-y} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(u+y-x)]^k}{k!} \\ &\times e^{-\lambda(u+y-x)} \Delta_{k+1}(t-u-y) dV(u), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

$$\Delta_{0,2}(t) = \lambda \int_{x=0}^t e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x \bar{V}(t-y) \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(t-x)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-x)} dV^{i*}(y), \quad (3.1.6)$$

$$\Delta_{0,3}(t) = e^{-\lambda t}, \quad (3.1.7)$$

gdzie

$$\bar{V}(x) \stackrel{def}{=} 1 - V(x). \quad (3.1.8)$$

a  $V^{i*}(\cdot)$  zdefiniowano w Definicji 1.4.

Zatem prawdopodobieństwo  $\Delta_0(t)$  wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora po chwili  $t$ , w przypadku gdy system jest pusty w chwili uruchomienia obsługi zgłoszeń, jako suma składników (3.1.4), przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \Delta_0(t) &= \lambda \int_{x=0}^t e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x dV^{i*}(y) \int_{u=x-y}^{t-y} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(u+y-x)]^k}{k!} \\ &\quad \times e^{-\lambda(u+y-x)} \Delta_{k+1}(t-u-y) dV(u) \\ &+ \lambda \int_{x=0}^t e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x \bar{V}(t-y) \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(t-x)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-x)} dV^{i*}(y) + e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

W ogólniejszym przypadku, gdy w momencie uruchomienia systemu w buforze znajduje się dokładnie  $n$  zgłoszeń ( $n > 0$ ), analogicznie do sytuacji występującej w (2.1.3) w Rozdziale 2, wykorzystujemy twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym ze względu na pierwszy moment zakończenia obsługi zgłoszeń po starcie systemu. W tym miejscu po raz kolejny uwzględniamy fakt, iż momenty przechodzenia w stan zawieszenia obsługi są momentami Markowa, co jest konsekwencją własności „braku pamięci” rozkładu wykładniczego czasów pomiędzy pojawianiem się kolejnych zgłoszeń w systemie. W rezultacie zastosowania tego twierdzenia, otrzymujemy następujący układ równań całkowych:

$$\Delta_n(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \int_{y=0}^t \Delta_{n+i-1}(t-y) \frac{(\lambda y)^i}{i!} e^{-\lambda y} dF(y) + \bar{F}(t) \sum_{i=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad (3.1.10)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N-1$  oraz

$$\bar{F}(x) \stackrel{def}{=} 1 - F(x). \quad (3.1.11)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie (3.1.10) odnosi się do sytuacji w której pierwsze obsłużone zgłoszenie opuszcza system przed chwilą  $t$ , natomiast



### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepelnienia bufora

---

drugi składnik reprezentuje sytuację, w której ma to miejsce dopiero po chwili  $t$ .

W spójności ze stosowanym w Rozdziale 2 (wzór (2.1.4)) sposobem oznaczania transformat Laplace'a, wprowadźmy analogiczne oznaczenie dla transformaty Laplace'a rozkładu czasu do przepelnienia bufora w systemie:

$$\widehat{\Delta}_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Delta_n(t) dt, \quad \text{Re}(s) > 0. \quad (3.1.12)$$

Wyznaczenie układów równań dla transformat Laplace'a wzorów (3.1.9) i (3.1.10) omówimy w następujących czterech etapach:

Transformata Laplace'a składnika  $\Delta_{0,1}(t)$  wzoru (3.1.9) ma postać:

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^\infty e^{-st} dt \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^\infty \int_{y=0}^x dV^{i*}(y) \int_{u=x-y}^{t-y} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(u+y-x)]^k}{k!} \\ & \times e^{-\lambda(u+y-x)} \Delta_{k+1}(t-u-y) dV(u) = \\ & \sum_{i=0}^\infty \int_{t=0}^\infty e^{-st} dt \int_{y=0}^t dV^{i*}(y) \int_{x=y}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \int_{u=x-y}^{t-y} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(u+y-x)]^k}{k!} \\ & \times e^{-\lambda(u+y-x)} \Delta_{k+1}(t-u-y) dV(u) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Powyższy wzór jest podobny do wzoru (2.1.5) (pierwsze dwie linijki) z tą różnicą, że funkcja  $\Delta_{k+1}(t-u-y)$  występuje w nim zamiast funkcji  $P_{k+1}(t-u-v, m)$  związanej z rozkładem długości kolejki. Przekłada się to w prosty sposób na analogiczną metodykę prowadzenia przekształceń z wykorzystaniem zamian granic całkowania oraz zależności wyprowadzonej w (2.1.6), w rezultacie czego (3.1.13) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^\infty \int_{y=0}^\infty e^{-(\lambda+s)y} dV^{i*}(y) \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{u=0}^\infty e^{-(\lambda+s)u} u^{k+1} dV(u) \\ & \times \int_{t=u+y}^\infty e^{-s(t-u-y)} \Delta_{k+1}(t-u-y) dt. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Następnie korzystamy ponownie z Definicji 1.6, oznaczając przez  $v(\cdot)$  transformatę Laplace'a-Stieltjesa dystrybuanty  $V(\cdot)$ , co w połączeniu z (2.1.9), podstawieniem  $\underline{t} = t - u - y$  oraz oznaczeniem (3.1.12) sprowadza (3.1.14) do postaci

$$\frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{u=0}^\infty e^{-(\lambda+s)u} u^{k+1} dV(u) \times \widehat{\Delta}_{k+1}(s). \quad (3.1.15)$$

Definiując

$$g_j(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{u=0}^\infty e^{-(\lambda+s)u} u^j dV(u), \quad (3.1.16)$$

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

otrzymujemy ostateczną postać składnika (3.1.15)

$$\frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=0}^{N-2} g_{k+1}(s) \hat{\Delta}_{k+1}(s). \quad (3.1.17)$$

Transformata Laplace'a składnika  $\Delta_{0,2}(t)$  wzoru (3.1.9) ma postać:

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x \bar{V}(t-y) \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(t-x)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-x)} dV^{i*}(y) = \\ & \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^t e^{-\lambda x} dx \int_{y=0}^x \bar{V}(t-y) (t-x)^k e^{-\lambda(t-x)} dV^{i*}(y) = \\ & \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=0}^t \bar{V}(t-y) dV^{i*}(y) \int_{x=y}^t (t-x)^k dx \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Ponieważ

$$\int_{x=y}^t (t-x)^k dx = - \left. \frac{[t-x]^{k+1}}{k+1} \right|_y^t = \frac{(t-y)^{k+1}}{k+1}, \quad (3.1.19)$$

wzór (3.1.18) można zapisać jako

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=0}^t \bar{V}(t-y) (t-y)^{k+1} dV^{i*}(y) = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} dV^{i*}(y) \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{t=y}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-y)} \bar{V}(t-y) (t-y)^{k+1} dt. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Następnie w równaniu (3.1.20) dokonamy podstawienia  $u = t - y$ . Korzystając ponownie z Definicji 1.6 i wzoru (2.1.9) otrzymujemy

$$\frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} \bar{V}(u) u^{k+1} du. \quad (3.1.21)$$

Definiując

$$\bar{g}_j(s) \stackrel{def}{=} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} u^j \bar{V}(u) du \quad (3.1.22)$$

otrzymujemy ostateczną postać tego składnika (czyli wzoru (3.1.18))

$$\frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=0}^{N-2} \bar{g}_{k+1}(s). \quad (3.1.23)$$

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepelnienia bufora

---

Transformata Laplace'a składnika  $\Delta_{0,3}(t)$  wzoru (3.1.9) ma postać:

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-st-\lambda t} dt = \frac{e^{-(\lambda+s)t}}{-(\lambda+s)} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{\lambda+s} \quad (3.1.24)$$

Transformata Laplace'a wzoru (3.1.10) ma postać:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-n-1} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \Delta_{n+i-1}(t-y) \frac{(\lambda y)^i}{i!} e^{-\lambda y} dF(y) \\ & + \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) \sum_{i=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} dt = \\ & \sum_{i=0}^{N-n-1} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} e^{-s(t-y)} \Delta_{n+i-1}(t-y) dt \\ & + \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \sum_{i=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \bar{F}(t) dt \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Następnie we wzorze (3.1.25) dokonamy podstawienia  $\underline{t} = t - y$ . Dla uproszczenia zapisu wzorów rezygnujemy z podkreśleń przy wprowadzaniu nowej zmiennej. Mamy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-n-1} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} dF(y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \Delta_{n+i-1}(t) dt \\ & + \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \sum_{i=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \bar{F}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Stosując ponownie wprowadzone w (3.1.12) oznaczenie transformaty Laplace'a rozkładu czasu do przepelnienia bufora w systemie oraz definiując

$$a_j(s) \stackrel{def}{=} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \quad (3.1.27)$$

i

$$b_j(s) \stackrel{def}{=} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \sum_{i=0}^j \frac{(\lambda t)^i}{i!} \bar{F}(t) dt, \quad (3.1.28)$$

dostajemy następującą ostateczną postać transformaty Laplace'a prawej strony układu równań całkowych (3.1.10)

$$\sum_{i=0}^{N-n-1} a_i(s) \hat{\Delta}_{n+i-1}(s) + b_{N-n-1}(s), \quad (3.1.29)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N - 1$ .

Układ równań dla transformat Laplace'a odpowiadający układowi (3.1.9) i (3.1.10) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}_0(s) &= \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=0}^{N-2} \left( g_{k+1}(s)\widehat{\Delta}_{k+1}(s) + \bar{g}_{k+1}(s) \right) + \frac{1}{\lambda+s} \\ &= \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} \left( g_k(s)\widehat{\Delta}_k(s) + \bar{g}_k(s) \right) + \frac{1}{\lambda+s},\end{aligned}\quad (3.1.30)$$

$$\widehat{\Delta}_n(s) = \sum_{i=0}^{N-n-1} a_i(s)\widehat{\Delta}_{n+i-1}(s) + b_{N-n-1}(s), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.1.31)$$

W kolejnym kroku (porównaj Rozdział 2, wzory (2.1.32) – (2.1.37)), zapiszemy równania (3.1.30) i (3.1.31) w postaci umożliwiającej zastosowanie Twierdzenia 1.3. Definiując następujące podstawienie

$$\widehat{H}_{N-n}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\Delta}_n(s), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (3.1.32)$$

otrzymujemy układ postaci

$$\widehat{H}_N(s) = \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} \left( g_k(s)\widehat{H}_{N-k}(s) + \bar{g}_k(s) \right) + \frac{1}{\lambda+s}, \quad (3.1.33)$$

$$\widehat{H}_{N-n}(s) = \sum_{i=0}^{N-n-1} a_i(s)\widehat{H}_{N-n-i+1}(s) + b_{N-n-1}(s), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.1.34)$$

W sumie występującej po prawej stronie wzoru (3.1.34) dokonamy dwóch podstawień, najpierw  $\underline{n} = N - n$  a potem  $\underline{i} = i - 1$ . Zabieg ten pozwoli nam dostosować granice sumowania do wymogów założeń Twierdzenia 1.3. Mamy

$$\widehat{H}_{\underline{n}}(s) = \sum_{i=0}^{\underline{n}-1} a_i(s)\widehat{H}_{\underline{n}-i+1}(s) + b_{\underline{n}-1}(s), \quad 1 \leq \underline{n} \leq N-1 \quad (3.1.35)$$

lub, alternatywnie,

$$\widehat{H}_{\underline{n}}(s) = \sum_{i=-1}^{\underline{n}-2} a_{i+1}(s)\widehat{H}_{\underline{n}-i}(s) + b_{\underline{n}-1}(s), \quad 1 \leq \underline{n} \leq N-1, \quad (3.1.36)$$

co w finalnej postaci daje nam (dla uproszczenia zapisu rezygnujemy z podkreśleń):

$$\widehat{H}_n(s) = \sum_{i=-1}^{n-1} a_{i+1}(s)\widehat{H}_{n-i}(s) + b_{n-1}(s) - a_n(s)\widehat{H}_1(s), \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (3.1.37)$$

albo

$$\sum_{i=-1}^{n-1} a_{i+1}(s)\widehat{H}_{n-i}(s) - \widehat{H}_n(s) = a_n(s)\widehat{H}_1(s) - b_{n-1}(s), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.1.38)$$

Definiując

$$\phi_n(s) \stackrel{def}{=} a_n(s)\widehat{H}_1(s) - b_{n-1}(s) \quad (3.1.39)$$

równanie (3.1.38) otrzyma następującą postać

$$\sum_{i=-1}^{n-1} a_{i+1}(s)\widehat{H}_{n-i}(s) - \widehat{H}_n(s) = \phi_n(s), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.1.40)$$

Wykonane przekształcenia umożliwiają nam zastosowanie Twierdzenia 1.3, a tym samym mając ciągi funkcyjne  $(a_n(s))$  (gdzie  $a_0(s) \neq 0$ ) i  $(\phi_n(s))$  określone w (3.1.27) oraz (3.1.39), odpowiednio, możemy rekurencyjnie wyrazić  $n$ -ty wyraz ciągu funkcyjnego  $(\widehat{H}_n(s))$  poprzez wyrazy ciągu  $(a_n(s))$ . Z tezy Twierdzenia otrzymujemy

$$\widehat{H}_n(s) = C(s)R_n(s) + \sum_{j=1}^n R_{n-j}(s)\phi_j(s), \quad n \geq 1. \quad (3.1.41)$$

Pozostaje nam wyprowadzić wzór dla funkcji  $\widehat{H}_1(s)$  występującej w Definicji (3.1.39) oraz dla funkcji  $C(s)$  występującej w równaniu (3.1.41). Funkcję  $C(s)$  wyznaczymy w postaci jawnej. Podstawiając  $n = 1$  do równania (3.1.41), otrzymujemy

$$\widehat{H}_1(s) = C(s)R_1(s). \quad (3.1.42)$$

Z kolei, podstawiając  $n = N$ , mamy

$$\widehat{H}_N(s) = C(s)R_N(s) + \sum_{j=1}^N R_{N-j}(s)\phi_j(s). \quad (3.1.43)$$

Wykorzystując (3.1.39) oraz (3.1.42), otrzymujemy

$$\phi_j(s) = C(s)R_1(s)a_j(s) - b_{j-1}(s). \quad (3.1.44)$$

W konsekwencji (3.1.43) przyjmie następującą postać:

$$\widehat{H}_N(s) = C(s)R_N(s) + \sum_{j=1}^N R_{N-j}(s) \left[ C(s)R_1(s)a_j(s) - b_{j-1}(s) \right]. \quad (3.1.45)$$

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

Nasze przekształcenia mają na celu porównanie ze sobą prawych stron równań (3.1.33) i (3.1.45), których jedynym niejawnym składnikiem będzie poszukiwane  $C(s)$ . Aby tego dokonać musimy wyprowadzić formułę na ostatni niejawny składnik równania (3.1.33) wykonując podstawienie  $n = N - k$  we wzorze (3.1.41)

$$\widehat{H}_{N-k}(s) = C(s)R_{N-k}(s) + \sum_{j=1}^{N-k} R_{N-k-j}(s)\phi_j(s), \quad (3.1.46)$$

co w połączeniu z (3.1.44) prowadzi do następującej reprezentacji:

$$\widehat{H}_{N-k}(s) = C(s)R_{N-k}(s) + \sum_{j=1}^{N-k} R_{N-k-j}(s) \left[ C(s)R_1(s)a_j(s) - b_{j-1}(s) \right]. \quad (3.1.47)$$

Dzięki temu zabiegowi otrzymujemy nową postać równania (3.1.33):

$$\begin{aligned} \widehat{H}_N(s) &= \frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=1}^{N-1} \left( g_k(s) \left\{ C(s)R_{N-k}(s) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{j=1}^{N-k} R_{N-k-j}(s) \left[ C(s)R_1(s)a_j(s) - b_{j-1}(s) \right] + \bar{g}_k(s) \right\} + \frac{1}{\lambda + s} \right). \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

Ostatecznie, porównując ze sobą prawe strony (3.1.45) i (3.1.48), możemy zapisać  $C(s)$  w jawnej postaci w następujący sposób:

$$C(s) = A(s)B(s), \quad (3.1.49)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A(s) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=1}^{N-1} \left( \bar{g}_k(s) - g_k(s) \sum_{j=1}^{N-k} R_{N-k-j}(s)b_{j-1}(s) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^N R_{N-j}(s)b_{j-1}(s) + \frac{1}{\lambda + s} \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

oraz

$$\begin{aligned} B(s) &\stackrel{def}{=} \left[ R_N(s) + R_1(s) \sum_{j=1}^N R_{N-j}(s)a_j(s) - \frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=1}^{N-1} g_k(s) \right. \\ &\left. \times \left( R_{N-k}(s) + R_1(s) \sum_{j=1}^{N-k} R_{N-k-j}(s)a_j(s) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

Ostateczną postać  $\widehat{\Delta}_n(s)$  transformaty Laplace'a rozkładu czasu do przepełnienia bufora w systemie uzyskujemy stosując odwrotnie podstawienie

(3.1.32) do równania (3.1.41), co w połączeniu z wyprowadzonymi dla  $\phi_j(s)$  oraz  $C(s)$  zależnościami (3.1.44) i (3.1.49) daje nam

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_n(s) &= \widehat{H}_{N-n}(s) = C(s)R_{N-n}(s) + \sum_{j=1}^{N-n} R_{N-n-j}(s)\phi_j(s) = \\ &A(s)B(s)\left(R_{N-n}(s) + R_1(s)\sum_{j=1}^{N-n} R_{N-n-j}(s)a_j(s)\right) - \sum_{j=1}^{N-n} R_{N-n-j}(s)b_{j-1}(s). \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

Otrzymany w tym miejscu wynik sformułujemy w postaci następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 3.1.** *W modelu kolejkowym typu  $M/G/1/N$  z regulaminem wielokrotnych okresów przestoju transformata Laplace'a  $\widehat{\Delta}_n(s)$  rozkładu warunkowego czasu do pierwszego przepelnienia bufora w systemie wyraża się następującym wzorem:*

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_n(s) &= A(s)B(s)\left(R_{N-n}(s) + R_1(s)\sum_{j=1}^{N-n} R_{N-n-j}(s)a_j(s)\right) \\ &- \sum_{j=1}^{N-n} R_{N-n-j}(s)b_{j-1}(s), \end{aligned} \quad (3.1.53)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N-1$ ,  $Re(s) > 0$ ,  $a_j(s)$ ,  $b_j(s)$ ,  $R_k(s)$ ,  $A(s)$ ,  $B(s)$  zdefiniowano w (3.1.27), (3.1.28), (1.2.16), (3.1.50) i (3.1.51) odpowiednio.

## 3.2 Złożony proces Poissona

Rozważmy model kolejkowy typu  $M^X/G/1/N$ , dla którego proces wejściowy zgłoszeń napływających opisany jest złożonym procesem Poissona, co podobnie jak w podrozdziale 2.2 implikuje, iż w odstępach czasu o rozkładach wykładniczych z parametrem  $\lambda$ , wyrażającym intensywność procesu, z prawdopodobieństwem  $p_k$  napływają do systemu grupy liczące  $k$  zgłoszeń (obsługiwalnych) ( $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ). Obsługa zgłoszeń odbywa się pojedynczo w zgodzie z rozkładem zadany przez dystrybuantę  $F(\cdot)$ , a pojemność modelu to  $N$  zgłoszeń – jedno może być obsługiwane oraz maksymalnie  $N-1$  jest zakumulowanych w buforze. Analogicznie do przypadku prostego procesu Poissona, każdorazowo w chwili, w której system zostaje opróżniony ze zgłoszeń, serwer rozpoczyna okres zawieszenia obsługi. Składa się on z kolejnych okresów przestoju, będących zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach z dystrybuantą  $V(\cdot)$ .

W odróżnieniu od procesu prostego (gdzie użyto litery  $X$ ), aby uniknąć kolizji oznaczeń dla procesu złożonego oznaczymy przez  $Y(t)$  liczbę zgłoszeń

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

obecnych w systemie w chwili  $t$ . Do oznaczenia czasu, po którym następuje pierwsze od chwili startu obsługi pakietów przepełnienie bufora, ponownie użyjemy litery  $\beta_n$  z odpowiednim indeksem. W analogii do (3.1.1) możemy zapisać

$$\beta_n = \inf\{t > 0 : Y(t) = N \mid Y(0) = n\}, \quad \text{gdzie } 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.2.1)$$

Dla podkreślenia faktu, iż rozważamy tutaj grupowy napływ zgłoszeń (proces wejściowy zgłoszeń do rozważanego systemu oznaczony jest, wykorzystując klasyfikację Kendalla, symbolem  $M^X$ ), we wprowadzonej wcześniej definicji (patrz wzór (3.1.2)) ogona dystrybuanty czasu do przepełnienia bufora dodamy indeks  $X$  jako wyróżnik procesu złożonego

$$\Delta_n^X(t) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\beta_n > t\}, \quad t > 0, 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.2.2)$$

Przy założeniu, że system jest pusty w chwili  $t = 0$  i w chwili tej rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi, dla ustalonej chwili  $t$  ponownie rozpatrujemy trzy zdarzenia losowe tworzące układ zupełny zdarzeń, otrzymując

$$\Delta_0^X(t) = \sum_{i=1}^3 \Delta_{0,i}^X(t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}\{\beta_0 > t, L_i(t)\}. \quad (3.2.3)$$

gdzie zdarzenia  $L_i(t)$  opisano w podrozdziale 3.1 (w przypadku procesu złożonego wyrażenie „pierwsze zgłoszenie” należy zastąpić wyrażeniem „pierwsza grupa zgłoszeń”).

W przypadku złożonego procesu Poissona równania całkowe opisujące  $\Delta_{0,i}^X(t)$  przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \Delta_{0,1}^X(t) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x dV^{i*}(y) \int_{u=x-y}^{t-y} \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \\ &\times \frac{[\lambda(u+y-x)]^j}{j!} e^{-\lambda(u+y-x)} \Delta_{k+r}^X(t-u-y) dV(u), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{0,2}^X(t) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x \bar{V}(t-y) \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{[\lambda(t-x)]^j}{j!} \\ &\times e^{-\lambda(t-x)} dV^{i*}(y), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\Delta_{0,3}^X(t) = e^{-\lambda t}, \quad (3.2.6)$$

gdzie  $\bar{V}(\cdot)$ ,  $V^{i*}(\cdot)$ ,  $p_j^{i*}$  określono w (3.1.8) oraz w Definicjach 1.4 i 1.5, odpowiednio.



### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

Otrzymujemy zatem, iż dla pustego w chwili uruchomienia systemu prawdopodobieństwo wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora po chwili  $t$  opisane jest wzorem

$$\begin{aligned}
 \Delta_0^X(t) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x dV^{i*}(y) \int_{u=x-y}^{t-y} \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \\
 &\times \frac{[\lambda(u+y-x)]^j}{j!} e^{-\lambda(u+y-x)} \Delta_{k+r}^X(t-u-y) dV(u) \\
 &+ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x \bar{V}(t-y) \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{[\lambda(t-x)]^j}{j!} \\
 &\times e^{-\lambda(t-x)} dV^{i*}(y) + e^{-\lambda t}. \tag{3.2.7}
 \end{aligned}$$

W przypadku, gdy bufor akumulujący zawiera co najmniej jedno zgłoszenie w chwili uruchomienia systemu, stosując ponownie twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym ze względu na pierwszy moment zakończenia obsługi zgłoszeń po starcie systemu, otrzymujemy następujący układ równań całkowych:

$$\begin{aligned}
 \Delta_n^X(t) &= \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \int_{y=0}^t \Delta_{n+i-1}^X(t-y) \frac{(\lambda y)^j}{j!} e^{-\lambda y} dF(y) \\
 &+ \bar{F}(t) \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \tag{3.2.8}
 \end{aligned}$$

gdzie  $1 \leq n \leq N-1$ , a  $\bar{F}(x)$  określono w (3.1.11).

Analogicznie do przypadku opisanego dla procesu prostego, pierwszy składnik po prawej stronie (3.2.8) opisuje sytuację w której pierwsze obsłużone zgłoszenie opuszcza system przed chwilą  $t$ , natomiast drugi składnik odnosi się do sytuacji, w której ma to miejsce po chwili  $t$ . Transformatę Laplace'a rozkładu czasu do przepełnienia bufora w systemie z grupowym napływem zgłoszeń oznaczmy w następujący sposób:

$$\hat{\Delta}_n^X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \Delta_n^X(t) dt, \quad \text{Re}(s) > 0. \tag{3.2.9}$$

Wyznaczenie układów równań dla transformat Laplace'a odpowiadających równaniom (3.2.7) i (3.2.8) również podzielimy na cztery etapy, które w istocie będą tożsame z etapami opisanymi w podrozdziale 3.1 dla procesu prostego.

Transformata Laplace'a składnika  $\Delta_{0,1}^X(t)$  wzoru (3.2.7) ma postać:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x dV^{i*}(y) \int_{u=x-y}^{t-y} \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \\
& \times \frac{[\lambda(u+y-x)]^j}{j!} e^{-\lambda(u+y-x)} \Delta_{k+r}^X(t-u-y) dV(u) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t dV^{i*}(y) \int_{x=y}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \int_{u=x-y}^{t-y} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \\
& \times \frac{[\lambda(u+y-x)]^j}{j!} e^{-\lambda(u+y-x)} \Delta_{k+r}^X(t-u-y) dV(u) \tag{3.2.10}
\end{aligned}$$

Transformata ta ma analogiczną postać do pierwszej części sumy występującej w pierwszych liniach zapisu przekształceń wzoru (2.2.5). Różnice pomiędzy tymi składnikami obejmują odmiennosc zmiennych indeksujących występujących w sumach oraz zastąpienie funkcji  $P_{k+j}^X(t-u-v, m)$ , związanej z rozkładem długości kolejki, funkcją  $\Delta_{k+r}^X(t-u-y)$ . Wykorzystujemy zależność wyprowadzoną w (2.2.6), a metodyka prowadzenia przekształceń z wykorzystaniem zamian granic całkowania (przedstawiona w (2.2.5) i (2.2.8)) pozostaje niezmienna, co prowadzi do przyjęcia przez (3.2.10) następującej formy:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} dV^{i*}(y) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} \\
& \times u^{j+1} dV(u) \int_{t=u+y}^{\infty} e^{-s(t-u-y)} \Delta_{k+r}^X(t-u-y) dt. \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

Kolejny raz korzystamy z Definicji 1.6 w połączeniu z (2.1.9) dla splotu  $V^{i*}(\cdot)$ , podstawienia  $\underline{t} = t-u-y$  oraz oznaczenia (3.2.9), które sprowadzają (3.2.11) do postaci

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} u^{j+1} dV(u) \\
& \times \widehat{\Delta}_{k+r}^X(s). \tag{3.2.12}
\end{aligned}$$

Definiując

$$g_r(s) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} u^{j+1} dV(u), \tag{3.2.13}$$

ostateczna postać składnika (3.2.12) przedstawia się następująco

$$\frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} g_r(s) \widehat{\Delta}_{k+r}^X(s). \tag{3.2.14}$$

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepelnienia bufora

---

Transformata Laplace'a składnika  $\Delta_{0,2}^X(t)$  wzoru (3.2.7) ma postać:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda x} dx \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^x \bar{V}(t-y) \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{[\lambda(t-x)]^j}{j!} \\
& \times e^{-\lambda(t-x)} dV^{i*}(y) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{y=0}^t \bar{V}(t-y) dV^{i*}(y) \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \\
& \times \int_{x=y}^t (t-x)^j dx \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

Uwzględniając obliczoną w kroku (3.1.19) całkę oraz zmieniając kolejność i granice całkowania z  $\int_{t=0}^{\infty} dt \int_{y=0}^t dy$  na  $\int_{y=0}^{\infty} dy \int_{t=y}^{\infty} dt$  w (3.2.15) otrzymamy

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} dV^{i*}(y) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} \\
& \times \int_{t=y}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-y)} \bar{V}(t-y) (t-y)^{j+1} dt. \tag{3.2.16}
\end{aligned}$$

Ostatnie przekształcenia (3.2.16) obejmują podstawienie  $u = t - y$  oraz ponowne wykorzystanie Definicji 1.6 i wzoru (2.1.9), co prowadzi nas do postaci

$$\frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} \bar{V}(u) u^{j+1} du. \tag{3.2.17}$$

Definiując teraz

$$\bar{g}_r(s) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} u^{j+1} \bar{V}(u) du, \tag{3.2.18}$$

otrzymujemy ostateczną następującą formę składnika  $\Delta_{0,2}^X(t)$ :

$$\frac{1}{1 - v(\lambda + s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \bar{g}_r(s). \tag{3.2.19}$$

Transformata Laplace'a składnika  $\Delta_{0,3}^X(t)$  wzoru (3.2.7) jest identyczna z wyliczoną dla prostego procesu Poissona w (3.1.24) transformatą równą  $\frac{1}{\lambda+s}$ .

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

Transformata Laplace'a prawej strony wzoru (3.2.8) ma postać:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \Delta_{n+i-1}^X(t-y) \frac{(\lambda y)^j}{j!} e^{-\lambda y} dF(y) \\
& + \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \int_{t=0}^{\infty} \bar{F}(t) e^{-st} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dt = \\
& \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} e^{-s(t-y)} \Delta_{n+i-1}^X(t-y) dt \\
& + \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \bar{F}(t) dt \tag{3.2.20}
\end{aligned}$$

We wzorze (3.2.20) dokonujemy podstawienia  $\underline{t} = t - y$ , a dla prostszego zapisu wzorów rezygnujemy z podkreśleń przy wprowadzaniu nowej zmiennej:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \Delta_{n+i-1}^X(t) dt \\
& + \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \bar{F}(t) dt. \tag{3.2.21}
\end{aligned}$$

Powtórnie stosując oznaczenie (3.2.9) oraz wprowadzając definicje

$$a_k(s) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^k p_k^{j*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \tag{3.2.22}$$

i

$$b_k(s) \stackrel{def}{=} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i p_i^{j*} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \bar{F}(t) dt, \tag{3.2.23}$$

uzyskujemy ostateczną postać transformaty Laplace'a prawej strony układu równań całkowych (3.2.8)

$$\sum_{i=0}^{N-n-1} a_i(s) \hat{\Delta}_{n+i-1}^X(s) + b_{N-n-1}(s). \tag{3.2.24}$$

Wyznaczony w czterech etapach układ równań dla transformat Laplace'a

dla wzorów (3.2.7) i (3.2.8) przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_0^X(s) &= \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} g_r(s) \widehat{\Delta}_{k+r}^X(s) + \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \\ &\times \sum_{r=0}^{N-k-1} \bar{g}_r(s) + \frac{1}{\lambda+s} = \\ &= \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \left( g_r(s) \widehat{\Delta}_{k+r}^X(s) + \bar{g}_r(s) \right) + \frac{1}{\lambda+s} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

$$\widehat{\Delta}_n^X(s) = \sum_{i=0}^{N-n-1} a_i(s) \widehat{\Delta}_{n+i-1}^X(s) + b_{N-n-1}(s), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.2.26)$$

Porównując otrzymane w krokach (3.2.25) i (3.2.26) wzory z ich odpowiednikami (3.1.30) oraz (3.1.31) wyprowadzonymi dla procesu prostego, możemy zauważyć, że równanie opisujące  $\widehat{\Delta}_n^X(s)$  jest identyczne w swej matematycznej postaci z równaniem opisującym  $\widehat{\Delta}_n(s)$ . W przypadku równań opisujących  $\widehat{\Delta}_0^X(s)$  oraz  $\widehat{\Delta}_0(s)$ , różnice dla procesu złożonego sprowadzają się do uwzględnienia prawdopodobieństw  $p_k$ , z jakimi występuje grupowy napływ pakietów do systemu oraz zmian w liczbie sum (dwie w miejsce jednej) i granicach sumowania ich składników. Wyszczególnione podobieństwa i różnice będą miały swoje przełożenie na postać ostatecznego rozwiązania układu równań transformat Laplace'a wzorów (3.2.7) i (3.2.8), które otrzymamy stosując Twierdzenie 1.3. W analogii do (3.1.32), wprowadźmy podstawienie

$$\widehat{H}_{N-n}^X(s) \stackrel{def}{=} \widehat{\Delta}_n^X(s), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (3.2.27)$$

Zgodnie z nim nasz układ równań dla transformat przekształcony zostanie do postaci

$$\widehat{H}_N^X(s) = \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \left( g_r(s) \widehat{H}_{N-k-r}^X(s) + \bar{g}_r(s) \right) + \frac{1}{\lambda+s}, \quad (3.2.28)$$

$$\widehat{H}_{N-n}^X(s) = \sum_{i=0}^{N-n-1} a_i(s) \widehat{H}_{N-n-i+1}^X(s) + b_{N-n-1}(s), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.2.29)$$

W równaniu (3.2.28) stosujemy przekształcenia opisane w krokach (3.1.36)–(3.1.38), co w połączeniu z analogiczną do (3.1.39) definicją:

$$\phi_n(s) \stackrel{def}{=} a_n(s) \widehat{H}_1^X(s) - b_{n-1}(s) \quad (3.2.30)$$

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

daje nam

$$\sum_{i=-1}^{n-1} a_{i+1}(s) \widehat{H}_{n-i}^X(s) - \widehat{H}_n^X(s) = \phi_n(s), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.2.31)$$

Kolejne etapy postępowania są identyczne z tymi opisanymi dla procesu prostego w (3.1.41)–(3.1.47), przy czym w równaniach musimy pamiętać o wprowadzonym oznaczeniu  $\widehat{H}_n^X(s)$  odnoszącym się do grupowego napływu zgłoszeń  $M^X$ . Kroki te prowadzą nas do otrzymania nowej postaci równania (3.2.28):

$$\begin{aligned} \widehat{H}_N^X(s) &= \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \left\{ g_r(s) \left[ C(s) R_{N-k-r}(s) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{j=1}^{N-k-r} R_{N-k-r-j}(s) \left( C(s) R_1(s) a_j(s) - b_{j-1}(s) \right) \right] + \bar{g}_r(s) \right\} + \frac{1}{\lambda+s}. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Porównując ze sobą prawe strony (3.1.45) i (3.2.32) w analogii do (3.1.49) otrzymujemy jawną postać  $C(s)$  będącą iloczynem dwóch nowej postaci czynników

$$\begin{aligned} A(s) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \left( \bar{g}_r(s) - g_r(s) \sum_{j=1}^{N-k-r} R_{N-k-r-j}(s) \right. \\ &\times \left. b_{j-1}(s) \right) + \sum_{j=1}^N R_{N-j}(s) b_{j-1}(s) + \frac{1}{\lambda+s} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

oraz

$$\begin{aligned} B(s) &\stackrel{def}{=} \left[ R_N(s) + R_1(s) \sum_{j=1}^N R_{N-j}(s) a_j(s) - \frac{1}{1-v(\lambda+s)} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \right. \\ &\times \left. \sum_{r=0}^{N-k-1} g_r(s) \left( R_{N-k-r}(s) + R_1(s) \sum_{j=1}^{N-k-r} R_{N-k-r-j}(s) a_j(s) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Transformata Laplace'a  $\widehat{\Delta}_n^X(s)$  rozkładu czasu do przepełnienia bufora w systemie z grupowym napływem zgłoszeń posiada analogiczną do (3.1.52) postać i wynik ten sformułujemy w postaci następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 3.2.** *W modelu kolejkowym typu  $M^X/G/1/N$  z regulaminem wielokrotnych okresów przestoju transformata Laplace'a  $\widehat{\Delta}_n^X(s)$  rozkładu warunkowego czasu do pierwszego przepełnienia bufora w systemie wyraża się*

następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_n^X(s) = A(s)B(s) & \left( R_{N-n}(s) + R_1(s) \sum_{j=1}^{N-n} R_{N-n-j}(s)a_j(s) \right) \\ & - \sum_{j=1}^{N-n} R_{N-n-j}(s)b_{j-1}(s), \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N - 1$ ,  $Re(s) > 0$ , natomiast  $a_j(s)$ ,  $b_j(s)$ ,  $R_k(s)$ ,  $A(s)$ ,  $B(s)$  zdefiniowano w (3.2.22), (3.2.23), (1.2.16), (3.2.33) i (3.2.34), odpowiednio.

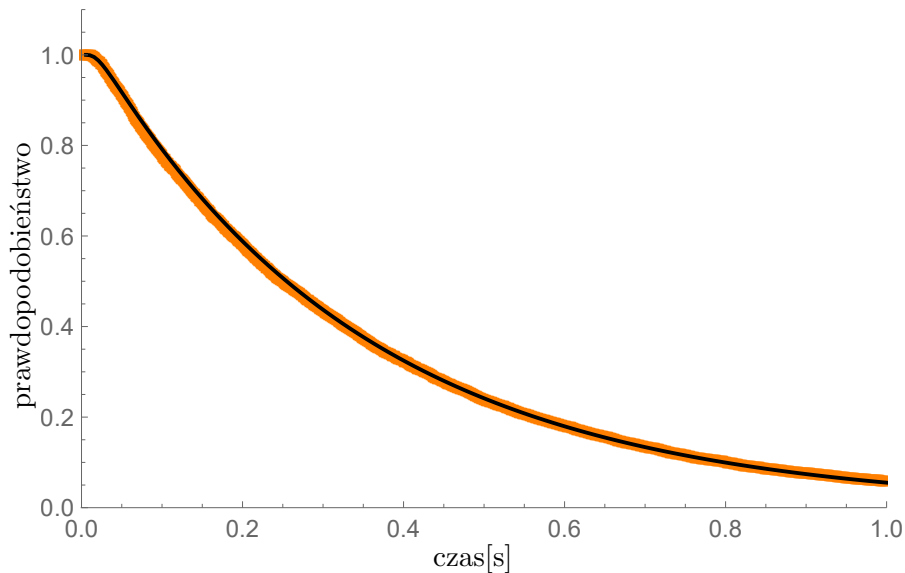
### 3.3 Analiza numeryczna i symulacje

Analizę otrzymanych wyników numerycznych i symulacyjnych rozpoczniemy od przypomnienia wstępnych założeń, które poczyniliśmy w podrozdziale 2.3, a które są w znaczącej mierze spójne z tymi przyjętymi w obecnych eksperymentach. Analogicznie do charakterystyki opisującej długość kolejki w niniejszym podrozdziale będziemy analizować rozkład czasu do przepelnienia bufora w stanie nieustalonym w zależności od przyjętych w poszczególnych eksperymentach parametrów początkowych. Ograniczymy się do zaprezentowania wyników dla czasu upływającego do momentu wystąpienia pierwszego przepelnienia w przypadku złożonego procesu Poissona, natomiast dla prostego procesu Poissona zobrazujemy jedynie potwierdzające wiarygodność obliczeń numerycznych statystyki badań symulacyjnych. Kolejny raz skorzystamy z algorytmu Gavera-Stehfesta umożliwiającego nam numeryczne odwracanie złożonych transformat Laplace'a. Jako rozkład prawdopodobieństwa czasu obsługi zgłoszeń ponownie wykorzystamy mieszanie dwóch rozkładów wykładniczych o dystrybuancie postaci (2.3.1), cechującą się średnim czasem obsługi (2.3.2) oraz intensywnością (2.3.3). Dystrybuanta  $V(\cdot)$ , określająca długość trwania każdego pojedynczego okresu zawieszenia obsługi, powtórnie będzie dystrybuantą rozkładu Erlanga drugiego rzędu postaci (2.3.4). Pakiety napływające do systemu, dla których podstawową jednostką objętości znów będzie wartość  $v = 100$  B, charakteryzować się będą zaprezentowanym w Przykładzie 1 modelowaniem średniego rozmiaru pakietu. Tym samym powielimy przyjęte wcześniej rozumowanie, zgodnie z którym pojedyncze zgłoszenie napływające o rozmiarze  $j \cdot 100$  B traktujemy w naszych rozważaniach jako grupę o liczności  $j$  pakietów (zgłoszeń obsługiwanych).

We wszystkich przeprowadzonych obliczeniach pojemność modelu określona literą  $N$  wynosi 10 pakietów, zatem bufor akumulujący może zgromadzić do 9 pakietów.

### 3.3.1 Analiza porównawcza obliczeń numerycznych i symulacji.

W analogii do analizy porównawczej wykonanej w podrozdziale 2.3.2 badania symulacyjne ponownie przeprowadzone zostały na próbach o liczności dziesięciu tysięcy powtórzeń startu procesu kolejkowania pakietów, jednakże tym razem w systemie włączona została rejestracja momentu wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora. Powtórnie dla każdej próby losowane jest unikalne ziarno używane do inicjalizacji generatora liczb pseudolosowych odpowiadających za losowość momentów napływu i czasu obsługi wiadomości, a także długości pojedynczych okresów przestoju w trakcie zawieszenia obsługi. Rejestracja poszukiwanego momentu dokonywana jest z krokiem czasowym  $t_c$  dobranym osobno dla procesu prostego i złożonego z uwagi na zróżnicowaną rozpiętość czasu, w trakcie którego wartości prawdopodobieństwa zmierzają do wielkości liczbowych osiąganych w stanie stacjonarnym (dla  $t \rightarrow \infty$ ). W przypadku procesu prostego jest to krok wynoszący  $t_c = 0.001$  sekundy w okresie o rozpiętości jednej sekundy (momenty  $k \cdot t_c = t \in [0, 1.0]$  dla  $k = 0; 1; 2; \dots; 1000$ ), zaś dla procesu złożonego jest to krok czasu wynoszący  $t_c = 0.0005$  sekundy i opisujący chwile czasu  $k \cdot t_c = t \in [0, 0.2]$  dla  $k = 0; 1; 2; \dots; 400$ , w których następuje zarejestrowanie ewentualnego wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora.



Rysunek 3.1: Porównanie wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$  dla prostego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (3.1.53) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik badań symulacyjnych – pomarańczowe kwadraty na wykresie.

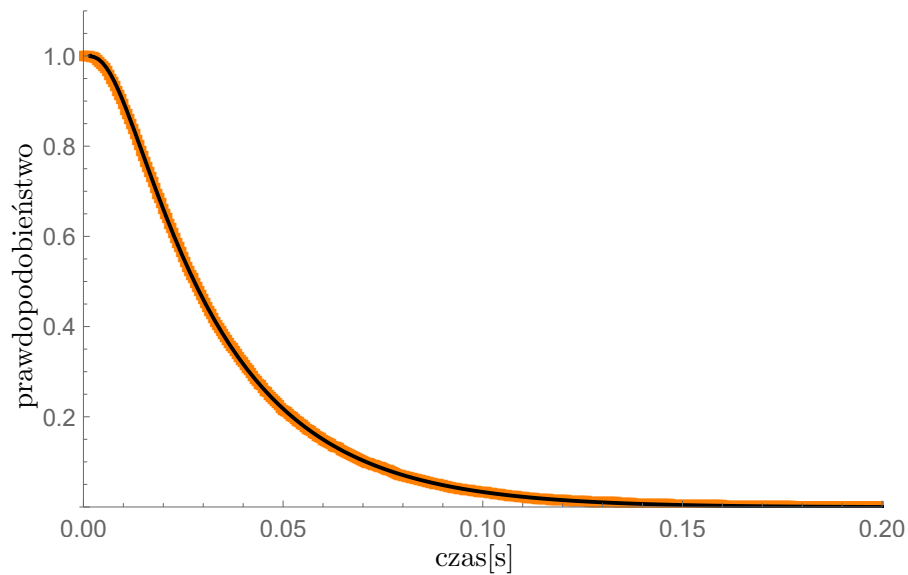


### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

Pozostałe parametry wybranego modelu kolejkowego zarówno dla prostego jak i złożonego procesu Poissona prezentują się następująco:

- początkowa liczba zgłoszeń w systemie  $n = 0$ ;
- intensywność napływu zgłoszeń  $\lambda = 375$  pakietów/s;
- intensywność obsługi pakietów  $\mu = 500$  pakietów/s (przyjmując dla dystrybuanty (2.3.1) parametry  $\alpha = \frac{2}{3}$  oraz  $(\mu_1, \mu_2) = (400, 1000)$ );
- odwrotność parametru skali dla dystrybuanty  $V(\cdot)$  pojedynczego okresu przestoju  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju wynosi średnio  $t_p = 0.002$  s);
- ciąg opisujący rozkład prawdopodobieństwa rozmiaru grupy pakietów  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$  (wówczas średni rozmiar grupy wynosi  $\varepsilon = 1.75$  a średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 1.3125$ .)



Rysunek 3.2: Porównanie wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$  dla złożonego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (3.2.35) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik badań symulacyjnych – pomarańczowe kwadraty na wykresie.

Wykresy przedstawione na Rysunkach 3.1 i 3.2 obrazują wysoką zgodność pomiędzy obliczeniami numerycznymi a wynikami otrzymanymi w symulacjach. Maksymalne różnice (wyznaczone w chwilach  $k \cdot t_c$ ) w wartościach prawdopodobieństw między obliczeniami numerycznymi a wynikami symulacyjnymi wynoszą:

- 0.0156109 dla procesu prostego,
- 0.0080691 dla procesu złożonego.

#### 3.3.2 Badanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń w złożonym procesie Poissona

W pierwszych trzech eksperymentach przyjrzymy się rozkładowi prawdopodobieństwa czasu do pierwszego przepełnienia bufora (3.2.1) w zależności od zmiennych wartości czasu obsługi pakietów. Rozważmy cztery scenariusze, w których parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = \frac{2}{3}$  oraz pary  $(\mu_1, \mu_2) \in \{(1050, 1680); (960, 600); (650, 520); (640, 320)\}$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest równa 1200, 800, 600 i 480 pakietów/s, co odpowiada prędkościom przetwarzania danych rzędu 960, 640, 480 i 384 kb/s, odpowiednio. Intensywność napływu zgłoszeń  $\lambda = 600$  pakietów/s jest stała, wobec czego uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.5; 0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności obsługi pakietów. Pozostałe parametry początkowe mają następujące wartości: odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju trwa średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{0.875; 1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności obsługi pakietów. Każdy z trzech eksperymentów ma przyporządkowany indywidualnie parametr  $n$  początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie, którego wartości wynoszą 0, 5 oraz 9 pakietów. Rysunki 3.3, 3.4 oraz 3.5 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.

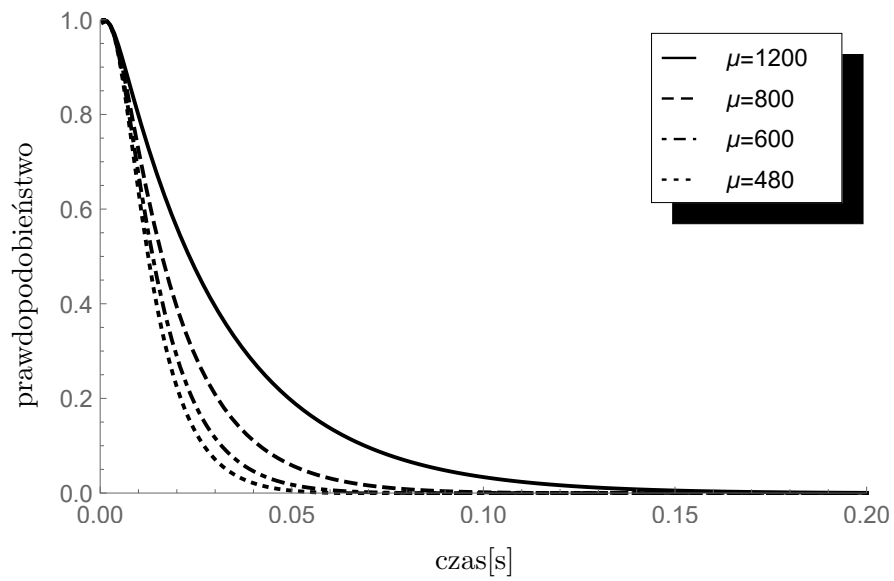
Analizując otrzymane wykresy możemy zauważyć, że bez względu na wybrane wartości intensywności obsługi, dla założonej intensywności napływu pakietów  $\lambda$  prawdopodobieństwo wystąpienia pierwszego od uruchomienia systemu momentu przepełnienia bufora dopiero po upływie 0.2 s jest praktycznie równe zero. Zgodnie z oczekiwaniami dla coraz mniejszych wartości intensywności obsługi  $\mu$  obserwujemy coraz szybszy spadek wartości prawdopodobieństwa do poziomu 0. Charakter tych zmian jest determinowany przez początkową liczbę pakietów obecnych w systemie – im jest ich więcej w chwili startu systemu, tym oczywiście prędzej bufor ma szansę się przepełnić.

#### 3.3.3 Badanie wpływu zmian intensywności napływu zgłoszeń w złożonym procesie Poissona

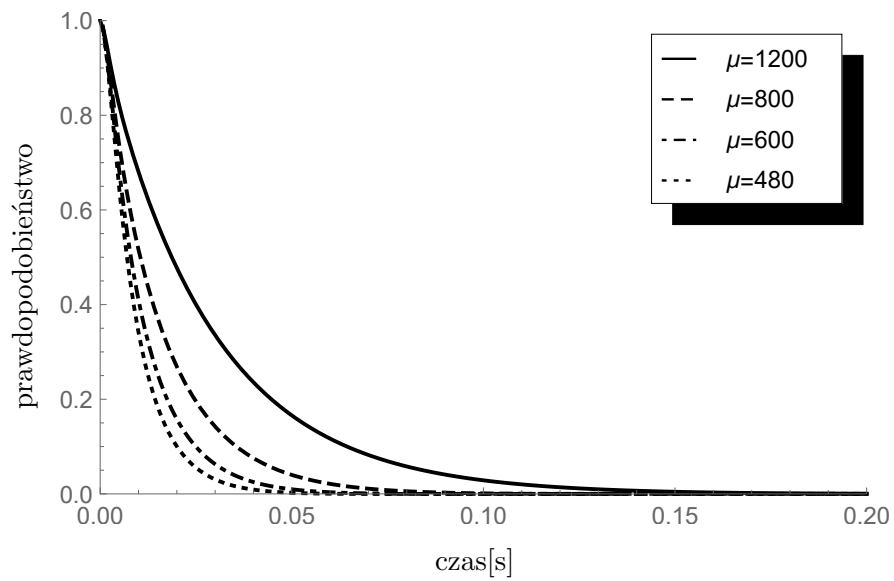
W kolejnych trzech eksperymentach zajmiemy się analizą rozkładów prawdopodobieństwa czasu do pierwszego przepełnienia bufora (3.2.1) w zależności od zmiennych wartości intensywności napływu pakietów. Rozważmy powtórnie cztery scenariusze, w których to parametr  $\lambda$  przyjmuje wartości

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepelnienia bufora

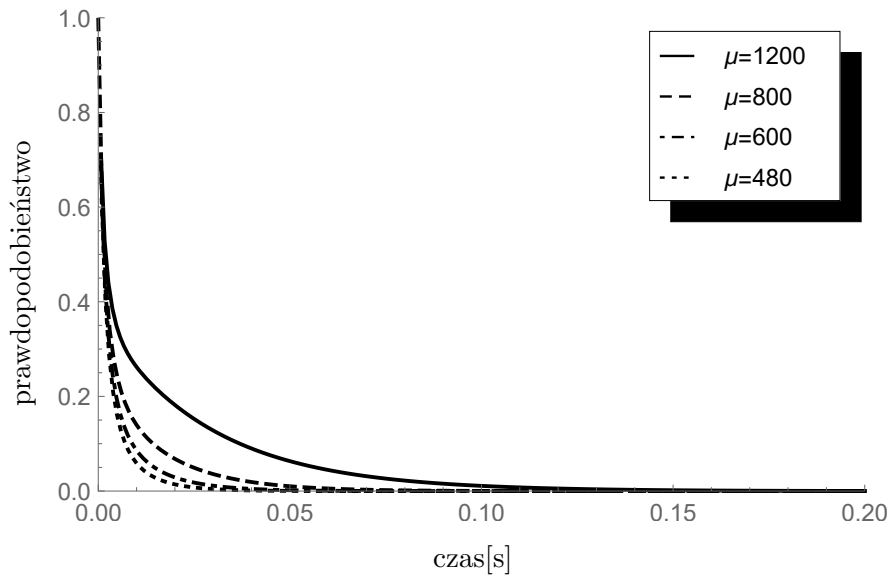
---



Rysunek 3.3: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.



Rysunek 3.4: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_5 > t\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.



Rysunek 3.5: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_9 > t\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.

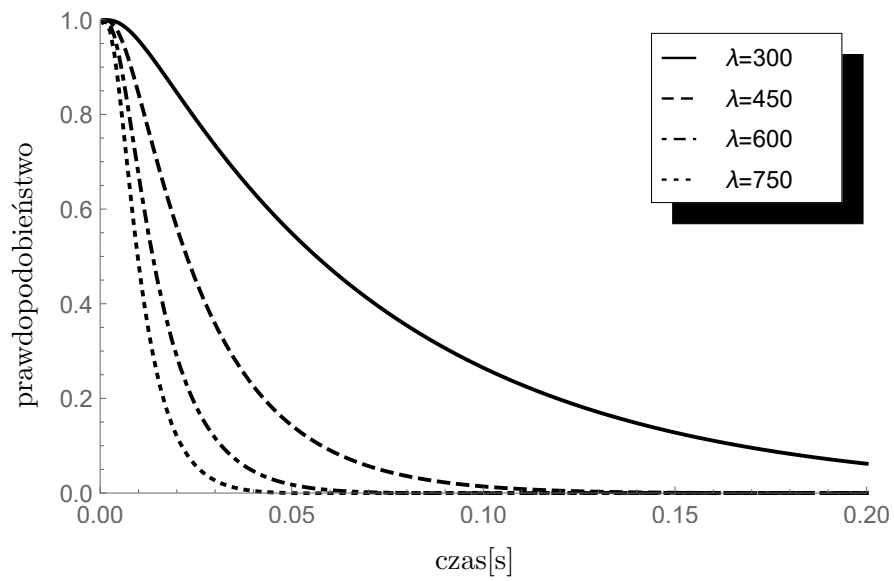
300, 450, 600 i 750 pakietów/s, co odpowiada prędkościom przesyłu danych rzędu 240, 360, 480 i 600 kb/s, odpowiednio. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = \frac{2}{3}$  oraz para  $(\mu_1, \mu_2) = (560, 700)$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest równa 600 pakietów/s, wobec czego uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.5; 0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Pozostałe parametry początkowe są takie same jak w badaniach zaprezentowanych w podrozdziale 3.3.2: odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (pojedynczy okres przestoju  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{0.875; 1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Każdy z eksperymentów, których wyniki przedstawiono na Rysunkach 3.6, 3.7 i 3.8, ma przyporządkowany indywidualnie parametr  $n$  początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie, przyjmując wartości 0, 5 oraz 9 pakietów odpowiednio.

Wynikające z analizy otrzymanych wykresów wnioski są analogiczne do tych przedstawionych w podrozdziale 3.3.2:

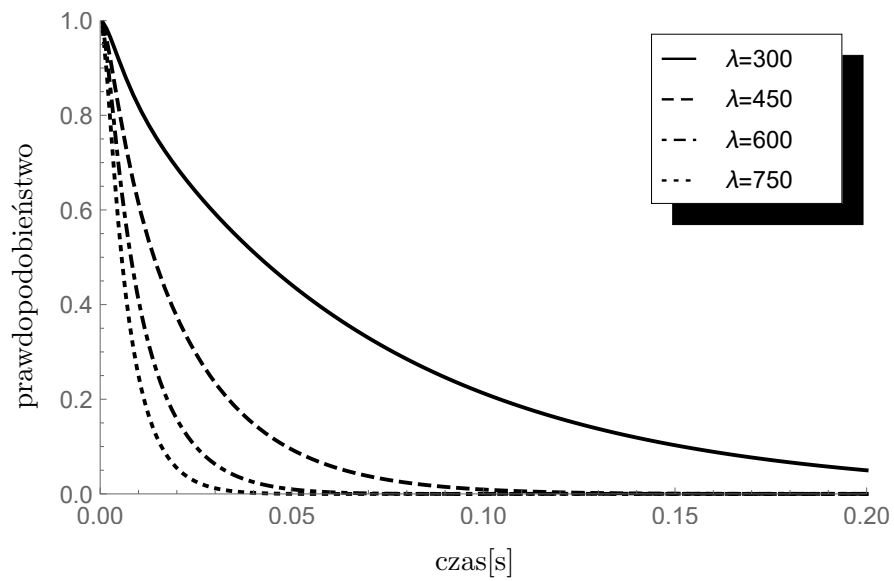
- im większa intensywność napływu pakietów, tym szybciej prawdopodobieństwo maleje do wartości 0;
- im wyższa jest początkowa liczba pakietów obecnych w systemie w chwili  $t = 0$ , tym mocniejszy jest, a wynikający z szybszego zapełnienia

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepelnienia bufora

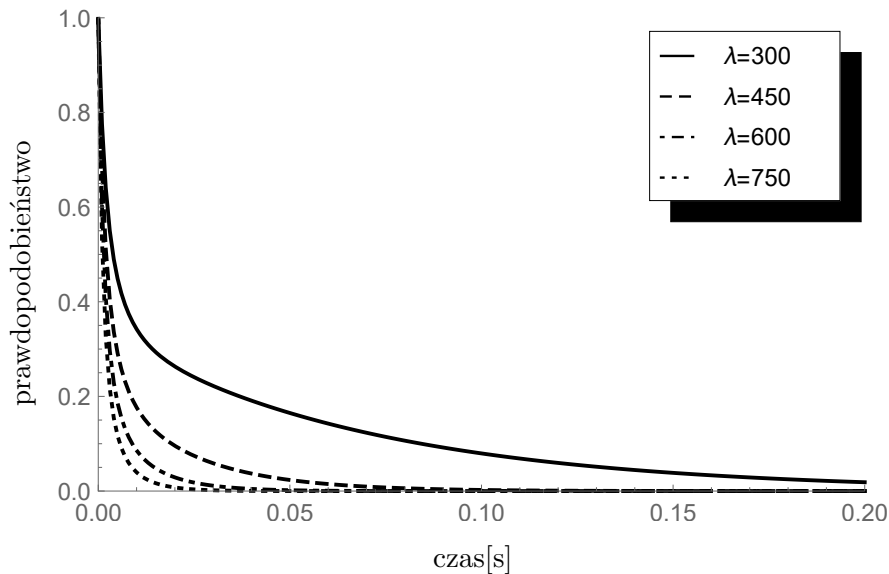
---



Rysunek 3.6: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$  dla  $\mu = 600$  pakietów/s.



Rysunek 3.7: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_5 > t\}$  dla  $\mu = 600$  pakietów/s.



Rysunek 3.8: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_9 > t\}$  dla  $\mu = 600$  pakietów/s.

bufora pakietami, spadek wartości prawdopodobieństwa do poziomu 0.

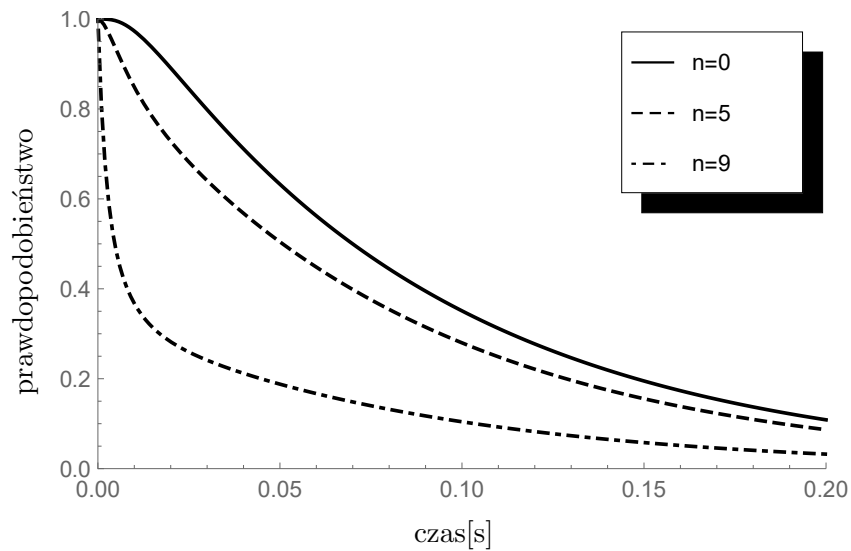
### 3.3.4 Badanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w złożonym procesie Poissona

W podrozdziałach 3.3.2 i 3.3.3 skupiliśmy naszą uwagę na zbadaniu wpływu zmian intensywności (obsługi bądź napływu pakietów) na charakter otrzymywanych w stanie niestacjonarnym krzywych obrazujących prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora. Wyniki zostały zaprezentowane dla trzech różnych początkowych wartości  $n$  pakietów obecnych w chwili startu systemu. Dokładne zobrazowanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie na podstawie przedstawionych wykresów jest jednak trudne. Z tej przyczyny w obecnym podrozdziale przeanalizujemy cztery nowe eksperymenty obrazujące zależność rozkładów prawdopodobieństwa czasu do pierwszego przepełnienia bufora od początkowej liczby zgłoszeń  $n$ , której wartości ponownie dobieramy tak, aby odzwierciedlić przypadki pustego, w połowie zapełnionego i niemal całkowicie pełnego bufora, co odpowiada wielkościom 0, 5 oraz 9 pakietów ( $N = 10$ ). Każdy eksperyment ma przyporządkowany parametr  $\lambda$  o odmiennej wartości 250, 375, 500 i 625 pakietów/s, co odpowiada prędkościom przesyłu danych rzędu 200, 300, 400 i 500 kb/s. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = \frac{2}{3}$  oraz

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

pary  $(\mu_1, \mu_2) \in \{(1000, 250); (400, 1000); (600, 375); (750, 300)\}$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest zawsze równa 500 pakietów/s, wobec czego używamy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.5; 0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów każdego z opisywanych eksperymentów. Odwrotność parametru skali to ponownie  $\xi = 1000$  a tym samym pojedynczy okres przestoju trwa średnio  $t_p = 0.002$  s, średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{0.875; 1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Rysunki od 3.9 do 3.12 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych osobno dla każdego z przeprowadzonych eksperymentów.



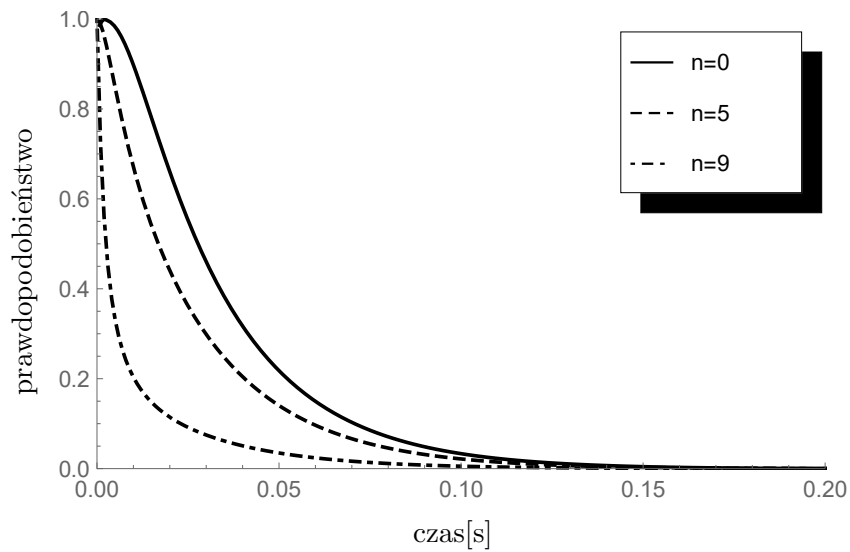
Rysunek 3.9: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych w systemie w chwili  $t = 0$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$  dla  $\lambda = 250$  pakietów/s.

Zaprezentowany zestaw wykresów pozwala nam sformułować następujące wnioski:

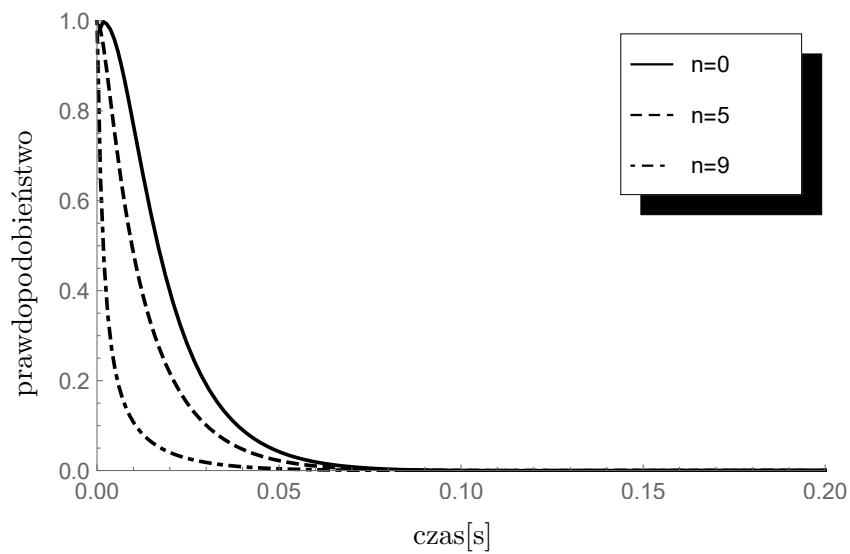
- im niższe jest obciążenie  $\rho$  (a tym samym średnie zapełnienie  $\kappa_b$ ) systemu, tym wyraźniejszy jest wpływ początkowej ilości zgłoszeń obecnych w systemie na sposób, w jaki krzywa obrazująca prawdopodobieństwo maleje do wartości zero;
- im liczba  $n$  jest bliższa całkowitej pojemności systemu  $N$ , tym efekt zmierzania prawdopodobieństwa ku wartości 0 w miarę upływu czasu jest bardziej gwałtowny (jest to konsekwencją przyjętych prawdopodobieństw  $p_k$  z jakimi napływają grupy złożone z  $k$  pakietów).

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

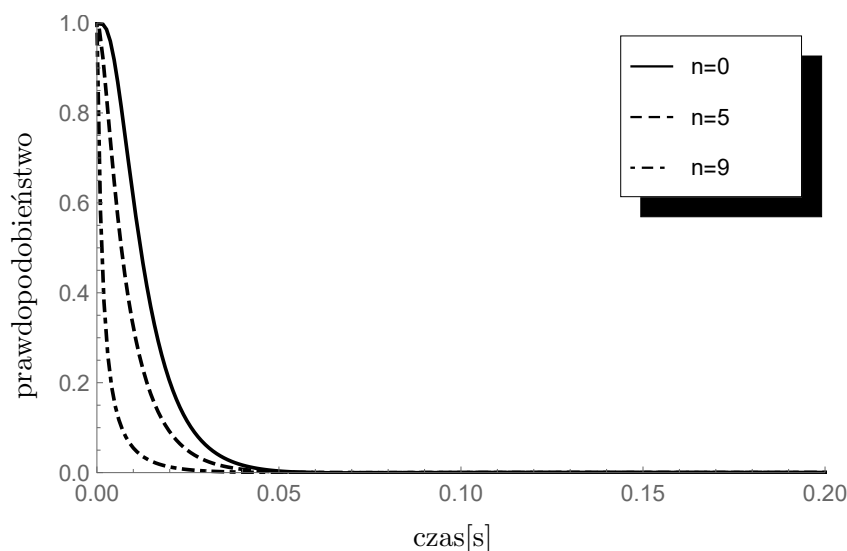


Rysunek 3.10: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych w systemie w chwili  $t = 0$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$  dla  $\lambda = 375$  pakietów/s.



Rysunek 3.11: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych w systemie w chwili  $t = 0$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$  dla  $\lambda = 500$  pakietów/s.





Rysunek 3.12: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych w systemie w chwili  $t = 0$  na wartości prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$  dla  $\lambda = 625$  pakietów/s.

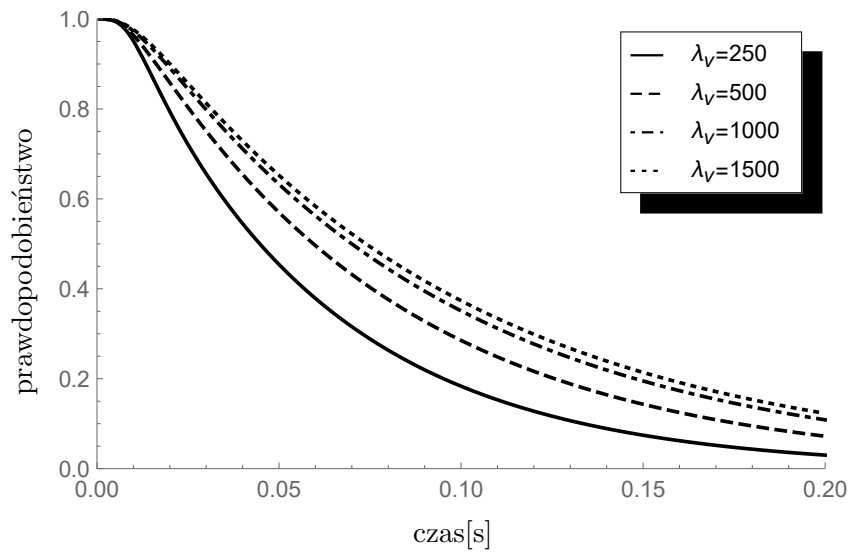
### 3.3.5 Badanie wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju w złożonym procesie Poissona

W ostatnich czterech eksperymentach rozważymy cztery scenariusze (takie same dla każdego eksperymentu), w których parametr  $\xi = \lambda_v$  przyjmuje wartości 250, 500, 1000 oraz 1500 – wówczas pojedynczy okres przestoju  $t_p$  trwa średnio 0.008, 0.004, 0.002 i 0.0013(3) sekundy, odpowiednio. Powtórnie każdemu eksperymentowi przyporządkujemy parametr  $\lambda$  o odmiennej wartości 250, 375, 500 i 625 pakietów/s, co ponownie odpowiada prędkościom przesyłu danych rzędu 200, 300, 400 i 500 kb/s. Parametrami dystrybuanty (2.3.1) są  $\alpha = \frac{2}{3}$  oraz pary  $(\mu_1, \mu_2) \in \{(1000, 250); (750, 300); (600, 375); (400, 1000)\}$ , dla których intensywność obsługi  $\mu$  jest zawsze równa 500 pakietów/s. W konsekwencji uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.5; 0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów każdego z opisywanych eksperymentów. Pozostałe parametry początkowe mają następujące wartości: średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , a ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{0.875; 1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Rysunki od 3.13 do 3.16 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.

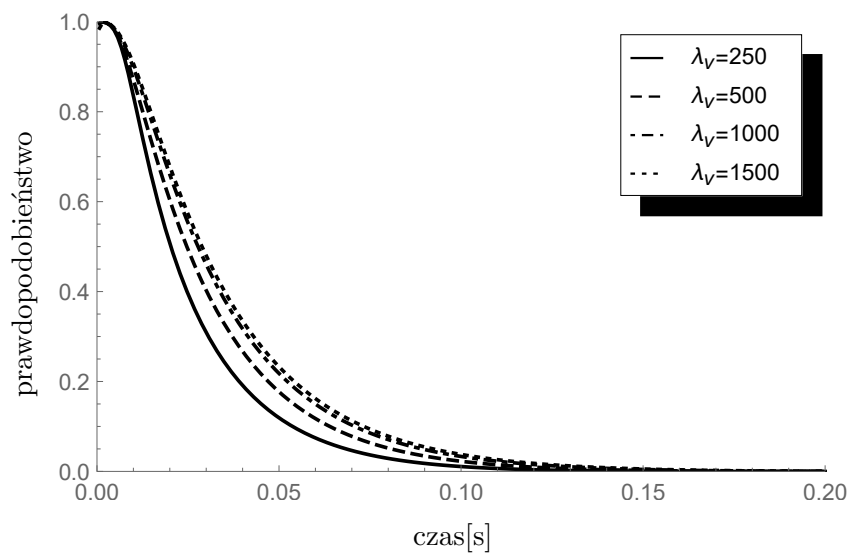
Zgodnie z oczekiwaniami, im dłuższy jest okres pojedynczego przestoju (co jest równoważne zmniejszaniu wartości parametru  $\lambda_v$ ), tym większe jest

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---



Rysunek 3.13: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$  dla  $\lambda = 250$  pakietów/s.

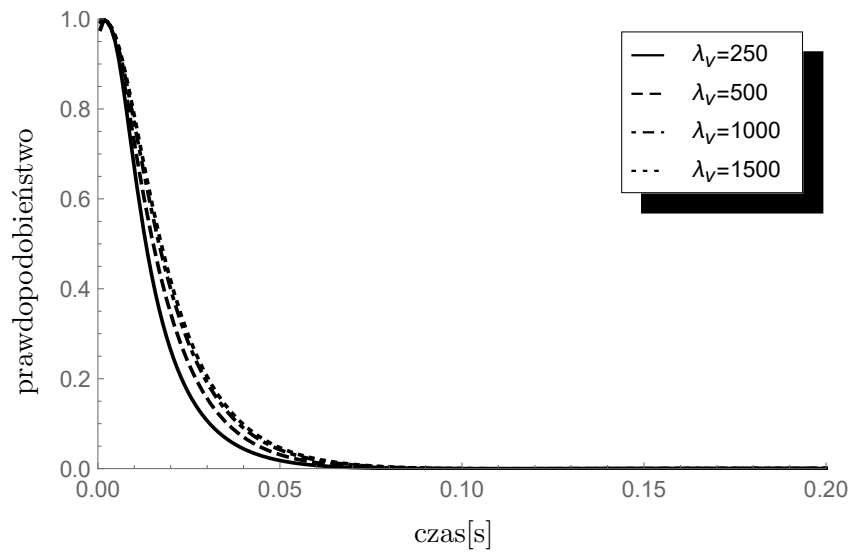


Rysunek 3.14: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$  dla  $\lambda = 375$  pakietów/s.

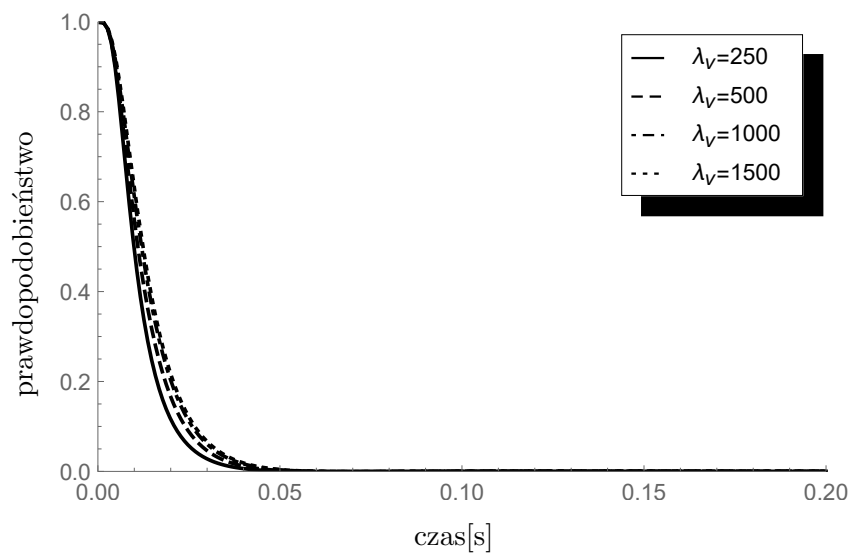
prawdopodobieństwo zakumulowania w buforze większej ilości pakietów, co z kolei przekłada się na wcześniejszy i intensywniejszy spadek wartości praw-

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---



Rysunek 3.15: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$  dla  $\lambda = 500$  pakietów/s.



Rysunek 3.16: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$  dla  $\lambda = 625$  pakietów/s.

dopodobieństwa  $\mathbf{P}\{\beta_0 > t\}$ . Efekt ten jest zależny w znacznej mierze od obciążenia systemu i słabnie wraz z jego wzrostem. Możemy także zaob-

serwować, iż skala tego efektu ma związek ze średnim czasem obsługi pakietu (w przeprowadzonych eksperymentach jest to okres o długości 0.002 s), ponieważ przyjęcie jako wartości parametru  $\lambda_v = 1500$  odpowiadającej średniej długości okresowi przestoju na poziomie 0.0013(3) s skutkuje tylko nieznaczną poprawą względem średniej długości okresu wynoszącej 0.002 s otrzymywanej dla  $\lambda_v = 1000$ . Chcąc zrozumieć tę zależność popatrzymy na okresy przestoju jako na czas „utracony”, w którym mogła trwać obsługa zgłoszeń. Skracanie długości trwania pojedynczego przestoju obsługi zgłoszeń poniżej progu średniego czasu obsługi jednego pakietu (nazwijmy to postępowaniem „ $\epsilon$ ”) nie owocuje pozyskaniem czasu pozwalającego na obsłużenie dodatkowego pakietu, co wyraźnie odsuwałoby w czasie wystąpienie pierwszego przepełnienia bufora. Zyskujemy jedynie krótki odcinek czasu (oznaczymy go przez  $t_\epsilon$ ), o który wcześniej rozpocznie się proces obsługi. Jeśli przy określonym napływie pakietów ma nastąpić ich nagromadzenie zapelniające bufor, wówczas nawet po zastosowaniu postępowania „ $\epsilon$ ” i tak ono nastąpi, a odsunięcie w czasie wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora wyniesie około  $t_\epsilon$ .

## 3.4 Podsumowanie rozdziału

Dokonana w podrozdziale 3.3 analiza otrzymanych rozkładów prawdopodobieństwa czasu do wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora w stanie nieustalonym umożliwiła nam wgląd w charakterystykę występowania tego zdarzenia w rozważanym w modelu kolejkowym z dyscypliną zawieszenia obsługi. Uwidoczniony na wykresach wpływ zmian wartości parametrów początkowych opisujących: intensywności napływu zgłoszeń, ich obsługi, długości okresu przestoju czy też początkowej liczby zakumulowanych w buforze pakietów pozwolił określić stopień wpływu tychże parametrów na wartości rozpatrywanych prawdopodobieństw  $\mathbf{P}\{\beta_n > t\}$ . Możemy stwierdzić, iż w rozpatrywanym numerycznie modelu wartość odwrotności parametru skali rozkładu pojedynczego okresu przestoju  $\xi$  wykazuje najmniejszy wpływ na kształt krzywej prawdopodobieństwa. W dalszej kolejności: intensywność obsługi zgłoszeń  $\mu$  wywiera nieco bardziej znaczący wpływ, a największy wpływ na kształt wywierają zmiany wartości początkowej liczby pakietów  $n$  obecnych w systemie oraz intensywności napływu pakietów  $\lambda$ . Opisana w podrozdziale 3.3.1 wysoka zgodność obliczeń numerycznych z symulacyjnymi potwierdza słuszność Twierdzeń 3.1 i 3.2. Wyprowadzone wzory uzupełniają stan wiedzy o rozkładzie prawdopodobieństwa czasu do wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora w kontekście rozważanego w rozprawie typu modelu kolejkowego.

Omówmy pokrótce istniejące publikacje opisujące charakterystyki czasu do przepełnienia bufora w szerszym spektrum typów modeli kolejkowych. W artykule [11] zbadano prawdopodobieństwo, z jakim podczas skończo-

nego interwału obserwacji o czasie trwania  $T$ , zajętość bufora modelu kolejkowego typu  $MMPP/M/1$  osiągnie poziom  $n$ . Najpierw wyprowadzony został wzór na transformatę Laplace'a prawdopodobieństwa osiągnięcia zakładanego poziomu dla kolejek z prostym procesem Poissona  $M/M/1$ , a następnie jest on uogólniony dla procesu MMPP (ang. *Markov Modulated Poisson Process*). Uzupełnieniem stanu wiedzy dla tego typu modelu kolejkowego są wyniki osiągnięte w pracy [27], w której to wyprowadzono w postaci twierdzenia wzór na transformatę Laplace'a rozkładu czasu przepełnienia bufora w kolejce posiadającej skończony bufor o rozmiarze  $b$ . Przyjęto ogólny typ czasu obsługi, co oznacza, że w notacji Kendalla badany jest system kolejkowy  $MMPP/G/1/b$ . We wcześniejszej swojej pracy [29] profesor Chydziański wraz ze współautorem wyprowadzili wzory na transformatę Laplace'a dla prostego procesu Poissona w modelu ze stałym czasem obsługi pojedynczego pakietu (system kolejkowy typu  $M/D/1/b$ ). W kolejnym artykule [26] przedstawiono obliczenia numeryczne wartości oczekiwanej czasu do wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora w systemie kolejkowym typu  $BMAP/G/1/b$  (Markowski proces opisujący grupowy napływ pakietów, ang. *Batch Markovian Arrival Process*) oraz dla jego szczególnego przypadku  $M^X/G/1/b$ , którym jest zastosowanie złożonego procesu Poissona napływu pakietów. Prezentowane wyniki pokazują związek pomiędzy rozmiarem bufora a wartością oczekiwaną czasu, po którym następuje jego pierwsze przepełnienie. Rozszerzenie wyników o jawny wzór na transformatę Laplace'a rozkładu pierwszego czasu przepełnienia bufora oraz omówienie jej aspektów obliczeniowych ukazało się w publikacji [28]. Opisany w rozprawie model kolejkowy jest rozwinięciem powyższego modelu o mechanizm wielokrotnego zawieszania obsługi.

Najogólniejszy przypadek, w którym napływ oraz obsługa zgłoszeń opisane są dowolnymi rozkładami prawdopodobieństwa jest obiektem badań zaprezentowanych w pracy [93]. Badany jest system kolejkowy  $GI/G/1$  o skończonej pojemności. Moment pierwszego przepełnienia, w którym liczba zgłoszeń po raz pierwszy przekracza pojemność, jest analizowany przy wykorzystaniu aproksymacji dyfuzyjnej. Przybliżone wyrażenia dla rozkładu i momentów pierwszego czasu przepełnienia są wyprowadzane jawnie. Na koniec dokładność przybliżeń dyfuzji jest badana numerycznie przy użyciu wyników analitycznych dla systemu  $GI/M/1$ . W [137] rozważany jest problem wykorzystania próbkowania z zastosowaniem funkcji ważności (ang. *importance sampling*) do oszacowania średniego czasu do przepełnienia bufora w kolejce  $GI/GI/m$ . Próbkiwanie ważnościowe to technika Monte Carlo, w której system jest symulowany przy użyciu nowego rozkładu, tak zwanego rozkładu symulacji, który różni się od rozkładu rzeczywistego. Korzystając z pojęcia cykli zajętości (ang. *busy cycles*), oszacowanie oczekiwanego czasu do przepełnienia bufora sprowadza się do problemu oszacowania prawdopodobieństwa  $p_n = \mathbf{P}(\text{przepełnienie bufora podczas cyklu})$ , gdzie  $n$  jest rozmiarem bufora. Z kolei w artykule [44] uzyskano wyniki szybkiej symulacji

modeli kolejkowych i wyprowadzono analityczne rozwiązanie problemu znalezienia optymalnego systemu symulacyjnego dla klasy tandemowych sieci kolejek  $GI/GI/1$ .

Kierunkiem dalszych, prowadzonych w środowisku naukowym badań nad modelami kolejkowymi, jest specjalizacja bądź modyfikacja zachowania modeli, niejednokrotnie ukierunkowana możliwym zastosowaniem w rozwijającej się dynamicznie informatyce. Praca [89] opisuje model kolejkowy typu  $Geo/G/1/B$ , w którym strumieniem przychodzących zgłoszeń rządzi proces dwumianowy, a kolejne czasy napływu zgłoszeń są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie geometrycznym  $a_k = a(1-a)^{k-1}$  z parametrem  $a$ . Artykuł [78] dotyczy analizy modelu kolejkowego  $M/M/1/N$  z dyscypliną „roboczych” okresów zawieszenia obsługi, która to jest rozwinięciem koncepcji prezentowanej w niniejszej rozprawie. W trakcie trwania okresów zawieszenia obsługi pakietów, obsługa jest podejmowana, jednakże ze znacznie mniejszą intensywnością niż ma to miejsce w trakcie trwania normalnej obsługi. Odmienną modyfikację modelu  $M/G/1/N$  prezentuje publikacja [86], w której rozważono system kolejkowania z przetwarzaniem zorganizowanym zgodnie z dyscypliną FIFO. Każdy okres pracy serwera obsługującego zgłoszenia rozpoczyna się czasem konfiguracji, a kończy czasem zamknięcia, gdzie czasy te są zmiennymi losowymi o dowolnym rozkładzie. W artykule [112] zastosowano autorskie podejście do estymacji prawdopodobieństwa czasu do wystąpienia przepełnienia bufora w systemie kolejkowym  $SSM/M/1/B$  z „samopodobnym” procesem wejściowym zgłoszeń i o skończonej pojemności bufora. Wykorzystano do tego symulację stanu ustalonego uwzględniającą tzw. „dalekosiężność” procesu wejściowego (ang. *Long-Range Dependent Process*) zwaną potocznie długotrwałą pamięcią lub trwałością dalekiego zasięgu. Różnica w stosunku do systemu kolejkowego  $M/M/1/B$  polega na tym, że intensywność napływu zgłoszeń  $\lambda_i$  do systemu kolejkowego  $SSM/M/1/B$  nie jest wartością stałą. Zmienna ta zależy od kolejnego numeru  $i$  szeregu czasowego, całkowitej liczby obserwacji oraz wartości parametru Hursta, które to określają stopień samopodobieństwa.

W [17] przedstawiono szybką, adaptacyjną metodę próbkowania z zastosowaniem funkcji ważności (ang. *Fast Adaptive Importance Sampling Method*) dla efektywnej symulacji prawdopodobieństw do wystąpienia przepełnienia bufora w sieciach kolejkowych typu  $M/M/1$ . Zagadnienie przepełnienia bufora w oczywisty sposób stanowi problem wydajnościowy w systemach informatycznych. Tym samym podejmowane są wysiłki, wsparte teorią kolejek, mające na celu zminimalizowanie prawdopodobieństwa wystąpienia przepełnienia bufora. Jedną z takich prac jest [156], w której to wyprowadzono model analityczny do obliczania prawdopodobieństwa przepełnienia bufora uwzględniający algorytm kontroli przeciążenia i parametry sieci TCP. Zaproponowano w niej autorskie rozwiązanie problemu przepełniania się bufora charakteryzujące się wykorzystaniem dynamicznego rozmiaru bufora.

Zaprezentowane w niniejszym rozdziale wyniki, obejmujące zwarte po-

### 3. Rozkład prawdopodobieństwa czasu do przepełnienia bufora

---

stanie transformat Laplace'a rozkładów prawdopodobieństwa czasu do wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora i przykłady wykonanych numerycznych obliczeń, opublikowano w następujących artykułach:

- [82] – w artykule opisano wyniki osiągnięte dla prostego procesu Poissona (podrozdział 3.1);
- [84] – w artykule zaprezentowano wyniki osiągnięte dla złożonego procesu Poissona (podrozdział 3.2);

# Rozdział 4

## Rozkład opóźnienia kolejkowania

Kolejną charakterystyką rozważanego przez nas modelu z dyscypliną zawieszenia obsługi, którą się zajmiemy, będzie opóźnienie spowodowane kolejkowaniem (ściślej ujmując – rozkład prawdopodobieństwa tego opóźnienia). Opóźnieniem kolejkowania w chwili  $t$  będziemy nazywać czas, jaki spędzi w buforze (w oczekiwaniu na rozpoczęcie obsługi) pakiet przybyły w chwili  $t$ . W literaturze ([30], [15], [33]) charakterystyka ta bywa także nazywana wirtualnym czasem oczekiwania na obsługę lub czasem oczekiwania w chwili  $t$ . Ponadto zakładamy tutaj, iż opóźnienie dla pakietu utraconego (tzn. przybywającego do systemu w chwili, w której bufor jest całkowicie zapełniony) wynosi 0. Zaprezentowana w rozdziale metodologia, analogicznie jak w przypadku poprzedniego rozdziału, pozwoli nam na otrzymanie ogólnych wyników w zwartej postaci (twierdzeń) zarówno dla prostego (podrozdział 4.1) jak i złożonego procesu Poissona (podrozdział 4.2). Uzyskanie dokładnej postaci rozkładu opóźnienia kolejkowania wymaga zastosowania złożonego obliczeniowo algorytmu do odwracania podwójnej transformaty Laplace’a (algorytm taki został przedstawiony np. w [30]). W celu zmniejszenia złożoności obliczeniowej zastosowanego w rozprawie algorytmu skorzystamy z możliwości wyznaczenia średniej wartości czasu oczekiwania na obsługę w dowolnej chwili  $t$ , gdyż jej obliczenie wymaga odwrócenia jedynie pojedynczej transformaty. Ponownie zastosujemy tutaj algorytm numerycznego odwracania transformaty Laplace’a [1] i przyjrzymy się wynikom obliczeń numerycznych zobrazowanych na wykresach (podrozdział 4.3). Zaprezentowane wartości średniego opóźnienia kolejkowania będą uzależnione od przyjętych w eksperymentach parametrów początkowych. Na zakończenie kompleksowo omówimy otrzymane w rozdziale wyniki.

### 4.1 Prosty proces Poissona

W dalszym ciągu rozważamy model kolejkowy typu  $M/G/1/N$ . Zgłoszenia napływają do systemu zgodnie z prostym procesem Poissona o intensywności



$\lambda$ . Obsługa zgłoszeń, określona dyscypliną FIFO, jest zgodna z rozkładem zadany przez dystrybuantę  $F(\cdot)$ . Pojemność systemu wynosi  $N$  zgłoszeń – gdy jedno jest obsługiwane maksymalnie  $N - 1$  może być zakumulowanych w buforze. Okres zawieszenia obsługi zgłoszeń składa się z jednego bądź wielu pojedynczych okresów przestoju, których długość trwania określona jest rozkładem zadany przez dystrybuantę  $G(\cdot)$ . Rozpoczyna się on każdorazowo, gdy ostatnie zgłoszenie w kolejce zostanie obsłużone i brakuje nowych zgłoszeń wymagających obsługi.

Ponownie oznaczmy symbolem  $X(t)$  liczbę zgłoszeń obecnych w systemie w chwili  $t$ . Niech  $v(t)$  będzie wirtualnym czasem oczekiwania na obsługę (opóźnieniem kolejkowania) dla zgłoszenia napływającego do systemu w chwili  $t$ . Oczywiście, chwila  $t$  nie musi być momentem rzeczywistego pojawienia się zgłoszenia w systemie, stąd termin „wirtualny”. Zdefiniujemy warunkowy rozkład prawdopodobieństwa opóźnienia kolejkowania w zależności od początkowego stanu bufora w następujący sposób:

$$V_n(t, x) = \mathbf{P}\{v(t) < x \mid X(0) = n\}, \quad x > 0, t > 0, 0 \leq n \leq N. \quad (4.1.1)$$

Zakładając, że system jest pusty ( $n = 0$ ) w momencie uruchomienia obsługi zgłoszeń ( $t = 0$ ), rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi. W tym przypadku zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym ([30] podrozdział 5.4) umożliwi nam wyprowadzenie następującego równania:

$$\begin{aligned} V_0(t, x) = & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \left[ \int_{v=y-u}^{t-u} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(u+v-y)]^k}{k!} \right. \right. \\ & \times e^{-\lambda(u+v-y)} V_{k+1}(t-u-v, x) + V_N(t-u-v, x) \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{[\lambda(u+v-y)]^k}{k!} \\ & \times e^{-\lambda(u+v-y)} \left. \right\} dG(v) + \int_{v=t-u}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(t-y)]^k}{k!} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) \right. \\ & \times e^{-\lambda(t-y)} + \left. \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{[\lambda(t-y)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-y)} \right\} dG(v) \Big] \\ & + e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t \left[ G(t-u+x) - G(t-u) \right] dG^{i*}(u), \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

gdzie  $F^{i*}(\cdot)$  i  $G^{i*}(\cdot)$  są sformułowanymi w Definicji 1.4  $i$ -krotnymi splotami Laplace’a-Stieltjesa dystrybuant  $F(\cdot)$  oraz  $G(\cdot)$  ze sobą, odpowiednio.

Prawa strona wzoru (4.1.2) składa się z sumy pięciu składników. Pierwszy element sumy odpowiada sytuacji, w której okres zawieszenia obsługi zgłoszeń kończy się przed chwilą  $t$  i ilość zakumulowanych w buforze zgłoszeń jest mniejsza niż jego pojemność – wówczas obsługa zgłoszeń rozpoczyna się po zakończeniu ostatniego okresu przestoju w momencie  $u + v < t$ .

Drugi składnik reprezentuje stan, w którym dochodzi do maksymalnego zapełnienia bufora w trakcie trwania okresu zawieszenia obsługi, kończącego się przed chwilą  $t$ . Wówczas, w momencie  $u + v < t$ , po zakończeniu okresu zawieszenia obsługi, system wznawia pracę (serwer rozpoczyna obsługę) z dokładnie  $N$  zgłoszeniami zakumulowanymi w buforze. Trzeci składnik odzwierciedla przypadek, w którym pierwsze zgłoszenie pojawia się w systemie przed chwilą  $t$ , ale okres zawieszenia obsługi kończy się po chwili  $t$  (w momencie  $u + v > t$ ). Zakładamy również, że w buforze w momencie rozpoczęcia obsługi zakumulowanych jest dokładnie  $k + 1 \leq N - 1$  zgłoszeń. W takim przypadku czas oczekiwania  $v(t)$  wchodzącego w chwili  $t$  zgłoszenia jest krótszy niż  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy suma pozostałego okresu zawieszenia obsługi przez serwer (liczonego od chwili  $t$ ) oraz czasu potrzebnego na obsłużenie zakumulowanych w buforze  $k + 1$  pakietów nie przekracza wartości  $x$ . Prawdopodobieństwo zaistnienia takiej sytuacji jest równe  $F^{(k+1)*}(x - u - v + t)$ . Czwarty składnik sumy reprezentuje przypadek, w którym całkowite zapełnienie bufora występuje przed chwilą  $t$ , natomiast okres zawieszenia obsługi zgłoszeń kończy się po czasie  $t$ . W tej sytuacji zgłoszenie napływające w chwili  $t$  jest utracone, a czas jego oczekiwania na obsługę wynosi  $v(t) = 0$ . Ostatni element sumy reprezentuje sytuację, w której pierwsze zgłoszenie napływa do systemu po chwili  $t$ , tym samym czas oczekiwania na obsługę zgłoszenia przychodzącego dokładnie w chwili  $t$  jest krótszy od  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy pozostały okres zawieszenia obsługi  $u + v - t$  jest mniejszy od  $x$ .

Powtórnie uwzględniamy fakt, iż w modelu kolejkowym typu  $M/G/1$  momenty zakończenia obsługi zgłoszeń, a zatem w szczególności momenty przechodzenia w okres zawieszenia obsługi są momentami Markowa [61]. Załóżmy, że w systemie znajduje się dokładnie  $X(0) = n$  zgłoszeń w momencie rozpoczęcia jego pracy, przy czym  $1 \leq n \leq N$ . Ponowne zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym względem pierwszej chwili ukończenia obsługi umożliwi nam wyprowadzenie następującego układu równań całkowych:

$$\begin{aligned}
 V_n(t, x) = & \int_{y=0}^t \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} V_{n+k-1}(t-y, x) + V_{N-1}(t-y, x) \right. \\
 & \times \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} \left. \right] dF(y) + \int_{y=t}^{\infty} e^{-\lambda t} \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{(n+k-1)*}(x-y+t) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right] dF(y). \tag{4.1.3}
 \end{aligned}$$

Przeanalizujmy prawą stronę układu (4.1.3). Pierwszy składnik sumy reprezentuje przypadek, w którym pierwsza chwila ukończenia obsługi  $y$  następuje przed czasem  $t$  przy jednoczesnym założeniu braku wystąpienia przepelnienia bufora (co implikuje, iż liczba pakietów przybyłych do chwili  $y$  nie może

#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

być większa niż  $N - n - 1$ ). Drugi element sumy, w odróżnieniu od pierwszego, zakłada całkowite zapełnienie bufora przed momentem  $y$ , a fakt ten odzwierciedla dolna granica sumowania zakładająca nadejście co najmniej  $N - n$  zgłoszeń. W analogii do pierwszych dwóch składników, trzeci oraz czwarty składnik także posiadają jedno wspólne założenie – pierwsze ukończenie obsługi zgłoszeń  $y$  następuje po czasie  $t$ . Czynnikiem rozróżniającym te składniki jest fakt występowania przepełnienia bufora. W trzecim składniku nie dochodzi do całkowitego zapełnienia bufora przed chwilą  $t$ . Jeżeli do tej chwili do systemu nadeszło dokładnie  $k \leq N - n - 1$  zgłoszeń, wówczas  $v(t)$  będzie mniejsze od  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy czas obsługi  $n + k - 1$  zgłoszeń będzie mniejszy od  $x - (y - t)$ , co wyraża splot  $F^{(n+k-1)*}(x - y + t)$ . W czwartym składniku występuje przepełnienie bufora. Zgłoszenie napływające w chwili  $t$  jest utracone, a jego czas oczekiwania na obsługę wynosi  $v(t) = 0$  (tym samym prawdopodobieństwo iż czas ten jest krótszy niż  $x$  jest równe 1).

Wprowadźmy następujące oznaczenie dla podwójnej transformaty Laplace'a opóźnienia kolejkowania:

$$\widehat{V}_n(s, z) = \int_0^\infty e^{-zx} dx \int_0^\infty e^{-st} V_n(t, x) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \operatorname{Re}(z) > 0, n \geq 0. \quad (4.1.4)$$

Wyznaczenie układu równań dla transformat Laplace'a odpowiadającego układowi (4.1.2)–(4.1.3) podzielimy na kilka etapów. Ich liczba uwarunkowana jest ilością zgrupowanych pod wspólnymi całkami składników, zawartych w obydwu rozważanych sumach – pięć składników w (4.1.2) i cztery składniki w (4.1.3).

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda(u+v-y)} \\ & \times \frac{\lambda^k (u+v-y)^k}{k!} V_{k+1}(t-u-v, x) dG(v) = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t dy \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} \\ & \times \frac{\lambda^{k+1} (u+v-y)^k}{k!} V_{k+1}(t-u-v, x) dG(v) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=u}^t dy \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} \\
 & \times \frac{\lambda^{k+1}(u+v-y)^k}{k!} V_{k+1}(t-u-v, x) dG(v) = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{t=y}^{\infty} e^{-st} dt \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} \\
 & \times \frac{\lambda^{k+1}(u+v-y)^k}{k!} V_{k+1}(t-u-v, x) dG(v) = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-\lambda v} (u+v-y)^k \\
 & \times \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-st} V_{k+1}(t-u-v, x) dt = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} (u+v-y)^k \\
 & \times \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} V_{k+1}(t-u-v, x) dt \tag{4.1.5}
 \end{aligned}$$

Następnie w równaniu (4.1.5) dokonamy podstawienia  $\underline{t} = t - u - v$ . Dla uproszczenia zapisu przyjmiemy notację nowych zmiennych niezawierającą podkreśleń. Po dokonaniu tego podstawienia całka względem zmiennej  $t$  przestaje być zależna od innych zmiennych, co umożliwi nam dokonanie kolejnych zamian kolejności całkowania.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{k+1}(t, x) dt \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \\
 & \times \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} (u+v-y)^k \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{k+1}(t, x) dt \\
 & \times \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{y=u}^{u+v} (u+v-y)^k \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dy \tag{4.1.6}
 \end{aligned}$$

Uwzględniając Definicję 1.6 w połączeniu z (2.1.9) oraz obliczoną w (2.1.6) całkę, przy jednoczesnym zastosowaniu oznaczenia (4.1.4), równanie (4.1.6) przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
 & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=0}^{N-2} \widehat{V}_{k+1}(s, z) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} dG(v) = \\
 & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{V}_k(s, z) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^k}{k!} dG(v). \tag{4.1.7}
 \end{aligned}$$

#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

---

Definiując

$$r_k(s) \stackrel{def}{=} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^k}{k!} dG(v) \quad (4.1.8)$$

otrzymujemy ostateczną postać pierwszego składnika całkowego

$$(1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{V}_k(s, z) r_k(s). \quad (4.1.9)$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda(u+v-y)} \\ & \times \frac{\lambda^k (u+v-y)^k}{k!} V_N(t-u-v, x) dG(v) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Składnik ten różni się od poprzedniego jedynie indeksami sumy  $\sum_{k=N-1}^{\infty}$  oraz elementem  $V_N(\cdot, \cdot)$ , tym samym, stosując analogiczne jak w przypadku składnika pierwszego przekształcenia, otrzymamy następującą postać ostateczną:

$$\begin{aligned} & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=N-1}^{\infty} \widehat{V}_N(s, z) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} dG(v) = \\ & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=N}^{\infty} \widehat{V}_N(s, z) r_k(s). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Transformata Laplace'a trzeciego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=t-u}^{\infty} e^{-\lambda(t-y)} \\ & \times \frac{\lambda^k (t-y)^k}{k!} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dG(v) = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \frac{\lambda^{k+1} (t-y)^k}{k!} dy \\ & \times \int_{v=t-u}^{\infty} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dG(v) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=u}^t \frac{\lambda^{k+1}(t-y)^k}{k!} dy \\
& \times \int_{v=t-u}^{\infty} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dy \int_{t=y}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} (t-y)^k dt \\
& \times \int_{v=t-u}^{\infty} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dy \int_{v=y-u}^{\infty} dG(v) \\
& \times \int_{t=y}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} (t-y)^k F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dt = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \int_{y=u}^{u+v} dy \\
& \times \int_{t=y}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} (t-y)^k F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dt = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \\
& \times \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dt \int_{y=u}^t (t-y)^k dy = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} dt \\
& \times \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dx \int_{y=u}^t (t-y)^k dy \tag{4.1.12}
\end{aligned}$$

Następnie obliczamy całkę:

$$\begin{aligned}
& \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) dx = -\frac{1}{z} e^{-zx} F^{(k+1)*}(x-u-v+t) \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} \\
& + \frac{1}{z} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dF^{(k+1)*}(x-u-v+t) = 0 + \frac{1}{z} e^{-zu} e^{-zv} e^{zt} \\
& \times \int_{x=0}^{\infty} e^{-z(x-u-v+t)} dF^{(k+1)*}(x-u-v+t) = \frac{1}{z} e^{-zu} e^{-zv} e^{zt} f^{k+1}(z), \tag{4.1.13}
\end{aligned}$$

gdzie  $f(z)$  jest transformatą Laplace'a-Stieltjesa dystrybuanty  $F(\cdot)$  określoną w Definicji 1.6. Wykorzystaliśmy tutaj fakt, że  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-zx} = 0$ , a także fakt, że  $F(\cdot)$  jest dystrybuantą dodatniej zmiennej losowej, a zatem dla przypadku  $x = 0$  w momencie  $u + v > t$  przyjmuje wartość

#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

---

$F(x - u - v + t) = F([< 0]) = 0$ . Kolejną możliwą do obliczenia całką jest

$$\int_{y=u}^t (t-y)^k dy = -\frac{(t-y)^{k+1}}{k+1} \Big|_{y=u}^t = \frac{(t-u)^{k+1}}{k+1}. \quad (4.1.14)$$

Kontynuując (4.1.12) przyjmie formę:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \sum_{k=0}^{N-2} \int_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} \\ & \times \left[ \frac{(t-u)^{k+1}}{k+1} \frac{1}{z} e^{-zu} e^{-zv} e^{zt} f^{k+1}(z) \right] dt = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \sum_{k=0}^{N-2} \int_{v=0}^{\infty} \frac{1}{z} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} f^{k+1}(z) e^{-zv} dG(v) \\ & \times \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)(t-u)} e^{z(t-u)} (t-u)^{k+1} dt \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Następnie w równaniu (4.1.15) dokonamy podstawienia  $y = t - u$ . Uwzględniamy również zależność (2.1.9), otrzymując ostateczną postać składnika

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda f(z)]^{k+1}}{(k+1)!} \int_{v=0}^{\infty} e^{-zv} dG(v) \\ & \times \int_{y=0}^v e^{-(\lambda+s-z)y} y^{k+1} dy = \\ & [z(1 - g(\lambda + s))]^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{[\lambda f(z)]^k}{k!} \int_{v=0}^{\infty} e^{-zv} dG(v) \int_{y=0}^v e^{-(\lambda+s-z)y} y^{k+1} dy. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Transformata Laplace'a czwartego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \\ & \times \int_{v=t-u}^{\infty} \frac{\lambda^k (t-y)^k}{k!} e^{-\lambda(t-y)} dG(v) \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

W powyższym składniku jedynym elementem zależnym od zmiennej  $x$  jest  $e^{-zx}$ , co pozwala nam na wyliczenie pierwszej całki

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx = -\frac{1}{z} e^{-zx} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{z}. \quad (4.1.18)$$

Wówczas (4.1.17) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \frac{\lambda^{k+1}(t-y)^k}{k!} dy \int_{v=t-u}^{\infty} dG(v) = \\
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=u}^t \frac{\lambda^{k+1}(t-y)^k}{k!} dy \int_{v=t-u}^{\infty} dG(v) = \\
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dy \int_{t=y}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} (t-y)^k dt \int_{v=t-u}^{\infty} dG(v) = \\
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dy \int_{v=y-u}^{\infty} dG(v) \int_{t=y}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} (t-y)^k dt = \\
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \int_{y=u}^{u+v} dy \int_{t=y}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} (t-y)^k dt = \\
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=u}^t (t-y)^k dy.
 \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Uwzględniając wyliczoną w kroku (4.1.14) całkę, (4.1.19) przyjmie formę:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} \frac{(t-u)^{k+1}}{k+1} dt = \\
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{v=0}^{\infty} dG(v) \\
 & \quad \times \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)(t-u)} (t-u)^{k+1} dt
 \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Analogicznie do sytuacji występującej w (4.1.15) poprzedniego składnika w równaniu (4.1.20) również dokonujemy podstawienia  $y = t - u$ , co w połączeniu z zależnością (2.1.9) daje nam

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{z} (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{v=0}^{\infty} dG(v) \int_{y=0}^v e^{-(\lambda+s)y} y^{k+1} dy = \\
 & [z(1 - g(\lambda + s))]^{-1} \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} y^{k+1} dy \int_{v=y}^{\infty} dG(v).
 \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Korzystając z własności dystrybucyjności, obliczamy całkę

$$\int_{v=y}^{\infty} dG(v) = G([\infty]) - G(y) = 1 - G(y) \tag{4.1.22}$$



wobec czego ostateczną postacią składnika jest

$$\begin{aligned} & [z(1 - g(\lambda + s))]^{-1} \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} y^{k+1} (1 - G(y)) dy = \\ & [z(1 - g(\lambda + s))]^{-1} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} y^k (1 - G(y)) dy. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Transformata Laplace'a piątego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{u=0}^t [G(t-u+x) - G(t-u)] dG^{i*}(u) = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} [G(t-u+x) - G(t-u)] dt = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} [G(t-u+x) \\ & - G(t-u)] dt = \\ & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \left[ \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} G(t-u+x) dt \right. \\ & \left. - \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} G(t-u) dt \right] \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Następnie obliczymy całkę

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} G(t-u+x) dt = \\ & \int_{x=0}^{\infty} e^{-(z-s-\lambda)x} dx \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u+x)} G(t-u+x) dt, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

dokonyjąc podstawienia  $y = t - u + x$ , co prowadzi nas do

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{\infty} e^{-(z-s-\lambda)x} dx \int_{y=x}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} G(y) dy = \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} G(y) dy \\ & \times \int_{x=0}^y e^{(\lambda+s-z)x} dx = \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} G(y) dy \left[ \frac{e^{(\lambda+s-z)x}}{\lambda+s-z} \right]_0^y = \\ & \frac{1}{\lambda+s-z} \left[ \int_{y=0}^{\infty} e^{-zy} G(y) dy - \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} G(y) dy \right] = \\ & \frac{1}{\lambda+s-z} \left[ \frac{g(z)}{z} - \frac{g(\lambda+s)}{\lambda+s} \right], \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

---

gdzie  $g(z)$  i  $g(\lambda + s)$  są wartościami zdefiniowanej w Definicji 1.6 transformaty Laplace'a-Stieltjesa wyprowadzonymi przy wykorzystaniu metody całkowania przez części:

$$\int_{y=0}^{\infty} e^{-zy} G(y) dy = -\frac{1}{z} e^{-zy} G(y) \Big|_{y=0}^{y \rightarrow \infty} + \frac{1}{z} \int_{y=0}^{\infty} e^{-zy} dG(y) = \frac{g(z)}{z} \quad (4.1.27)$$

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} G(y) dy &= -\frac{1}{\lambda+s} e^{-(\lambda+s)y} G(y) \Big|_{y=0}^{y \rightarrow \infty} + \frac{1}{\lambda+s} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} dG(y) \\ &= \frac{g(\lambda+s)}{\lambda+s} \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

W kolejnym kroku dokonujemy podstawienia  $y = t - u$ , obliczając całkę

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} G(t-u) dt &= \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \\ \times \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} G(y) dy &= -\frac{1}{z} e^{-zx} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} \times \frac{g(\lambda+s)}{\lambda+s} = \frac{g(\lambda+s)}{(\lambda+s)z}. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Następnie uwzględniamy zależność (2.1.9) w (4.1.24) otrzymując ostateczną postać piątego składnika

$$\begin{aligned} (1 - g(\lambda+s))^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda+s-z} \left[ \frac{g(z)}{z} - \frac{g(\lambda+s)}{\lambda+s} \right] - \frac{g(\lambda+s)}{(\lambda+s)z} \right\} &= \\ (1 - g(\lambda+s))^{-1} \left\{ \frac{g(z)}{z} - \frac{g(\lambda+s)}{\lambda+s} - \frac{(\lambda+s)g(\lambda+s)}{(\lambda+s)z} + \frac{z \cdot g(\lambda+s)}{z \cdot (\lambda+s)} \right\} &= \\ \times [\lambda+s-z]^{-1} &= \frac{g(z) - g(\lambda+s)}{z(\lambda+s-z)(1 - g(\lambda+s))}. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Definiując funkcje

$$\alpha(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{[\lambda f(z)]^k}{k!} \int_{v=0}^{\infty} e^{-zv} dG(v) \int_{y=0}^v e^{-(\lambda+s-z)y} y^{k+1} dy, \quad (4.1.31)$$

$$\beta(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{z} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} y^k (1 - G(y)) dy, \quad (4.1.32)$$

oraz

$$\gamma(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{g(z) - g(\lambda+s)}{z(\lambda+s-z)}, \quad (4.1.33)$$

możemy zapisać sumę wyznaczonych pięciu składników podwójnej transformaty Laplace'a rozkładu opóźnienia kolejkowania (4.1.2) w następującej zwartej postaci:

$$\widehat{V}_0(s, z) = \frac{1}{(1 - g(\lambda + s))} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} r_k(s) \widehat{V}_k(s, z) + \widehat{V}_N(s, z) \sum_{k=N}^{\infty} r_k(s) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) \right]. \quad (4.1.34)$$

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.3) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} V_{n+k-1}(t-y, x) dF(y) = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} e^{-st} V_{n+k-1}(t-y, x) dt = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} e^{-s(t-y)} V_{n+k-1}(t-y, x) dt \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Następnie w równaniu (4.1.35) dokonamy podstawienia  $\underline{t} = t - y$ . W celu uproszczenia zapisu notacja nowych zmiennych będzie pozbawiona podkreśleń. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{n+k-1}(t, x) dt = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{n+k-1}(t, x) dt \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

Definiując

$$a_k(s) \stackrel{def}{=} \int_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \quad (4.1.37)$$

wraz z jednoczesnym zastosowaniem wprowadzonego oznaczenia podwójnej transformaty Laplace'a (4.1.4) otrzymujemy ostateczną postać składnika

$$\sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \widehat{V}_{n+k-1}(s, z). \quad (4.1.38)$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.3) ma postać

$$\sum_{k=N-n}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} V_{N-1}(t-y, x) dF(y) \quad (4.1.39)$$

Składnik ten różni się od poprzedniego jedynie granicami sumy  $\sum_{k=N-n}^{\infty}$  oraz elementem  $V_{N-1}$ , tym samym stosowanie analogicznych względem poprzedniego składnika przekształceń w rezultacie doprowadzi nas do następującej postaci ostatecznej:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N-n}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-(\lambda+s)y} dF(y) \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{N-1}(t, x) dt = \\ & \widehat{V}_{N-1}(s, z) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s). \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

Transformata Laplace'a trzeciego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.3) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=t}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dF(y) = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^k F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dt = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^k F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dt = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^k dt \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dx \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dx = -\frac{1}{z} e^{-zx} F^{(n+k-1)*}(x-y+t) \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} \\ & + \frac{1}{z} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dF^{(n+k-1)*}(x-y+t) = 0 + \frac{1}{z} e^{-zy} e^{zt} \\ & \times \int_{x=0}^{\infty} e^{-z(x-y+t)} dF^{(n+k-1)*}(x-y+t) = \frac{1}{z} e^{-zy} e^{zt} f^{n+k-1}(z), \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

gdzie  $f(\cdot)$  jest transformatą Laplace'a-Stieltjesa dystrybuanty  $F(\cdot)$  wprowadzoną w Definicji 1.6. Ponieważ  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-zx} = 0$  oraz  $F(x-y+t) = F(\llcorner$

0]) = 0 dla  $x = 0$  i  $y > t$ , zatem (4.1.41) przyjmie następującą ostateczną postać

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^k \frac{1}{z} e^{-zy} e^{zt} f^{n+k-1}(z) dt = \\ & \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{\lambda^k}{k!} f^{n+k-1}(z) \int_{y=0}^{\infty} e^{-zy} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s-z)t} t^k dt. \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

Transformata Laplace'a czwartego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.1.3) przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N-n}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=t}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF(y) = \\ & \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^k dt \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

W powyższym składniku jedynym elementem zależnym od zmiennej  $x$  jest  $e^{-zx}$ , wobec czego możemy tutaj wykorzystać obliczoną w (4.1.18) wartość całki, otrzymując w ten sposób ostateczną postać czwartego składnika

$$\frac{1}{z} \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^k dt. \quad (4.1.45)$$

Definiując teraz funkcję

$$\begin{aligned} q_k(s, z) & \stackrel{def}{=} \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{N-k-1} \frac{\lambda^i}{i!} f^{k+i-1}(z) \int_{y=0}^{\infty} e^{-zy} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s-z)t} t^i dt \\ & + \frac{1}{z} \sum_{i=N-k}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^i dt, \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

możemy zapisać (4.1.3) w następującej zwartej postaci

$$\widehat{V}_n(s, z) = \sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \widehat{V}_{n+k-1}(s, z) + \widehat{V}_{N-1}(s, z) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s) + q_n(s, z), \quad (4.1.47)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ .

Postępując podobnie jak w Rozdziałach 2 i 3, zapiszemy wyznaczony układ równań dla transformat Laplace'a (4.1.34) i (4.1.47) w postaci umożliwiającej zastosowanie Twierdzenia 1.4. W tym celu dokonamy podstawienia

$$\widehat{T}_n(s, z) = \widehat{V}_{N-n}(s, z) \quad (4.1.48)$$

otrzymując

$$\widehat{T}_N(s, z) = \frac{1}{1 - g(\lambda + s)} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} r_k(s) \widehat{T}_{N-k}(s, z) + \widehat{T}_0(s, z) \sum_{k=N}^{\infty} r_k(s) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) \right] \quad (4.1.49)$$

$$\widehat{T}_n(s, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}(s, z) + \widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=n}^{\infty} a_k(s) + q_{N-n}(s, z) \quad (4.1.50)$$

gdzie  $0 \leq n \leq N - 1$ .

W kolejnym kroku skupiamy się na równaniu (4.1.50) dokonując następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} \widehat{T}_n(s, z) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}(s, z) + \widehat{T}_1(s, z) a_n(s) + \widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) \\ &+ q_{N-n}(s, z) \\ \widehat{T}_n(s, z) &= \sum_{k=0}^n a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}(s, z) + \widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) + q_{N-n}(s, z) \\ \sum_{k=0}^n a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}(s, z) - \widehat{T}_n(s, z) &= -\widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) - q_{N-n}(s, z) \\ \sum_{k=0}^{n+1} a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}(s, z) - a_{n+1}(s) \widehat{T}_0(s, z) - \widehat{T}_n(s, z) &= -\widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) \\ &- q_{N-n}(s, z) \\ \sum_{k=0}^{n+1} a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}(s, z) - \widehat{T}_n(s, z) &= a_{n+1}(s) \widehat{T}_0(s, z) - \widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) \\ &- q_{N-n}(s, z) \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

W sumie znajdującej się po lewej stronie równania (4.1.51) dokonamy podstawienia  $k = k - 1$ , które pozwala nam dopasować granice sumowania do założeń Twierdzenia 1.4. Dla uproszczenia zapisu tutaj również zrezygnujemy z podkreśleń. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s) \widehat{T}_{n-k}(s, z) - \widehat{T}_n(s, z) &= a_{n+1}(s) \widehat{T}_0(s, z) - \widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) \\ &- q_{N-n}(s, z). \end{aligned} \quad (4.1.52)$$

Definiując

$$\psi_n(s, z) \stackrel{def}{=} a_{n+1}(s) \widehat{T}_0(s, z) - \widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) - q_{N-n}(s, z) \quad (4.1.53)$$

równanie (4.1.52) otrzymuje następującą zwartą postać

$$\psi_n(s, z) = \sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s) \widehat{T}_{n-k}(s, z) - \widehat{T}_n(s, z), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (4.1.54)$$

Wykonane przekształcenia umożliwiają nam zastosowanie Twierdzenia 1.4, zgodnie z którym dla określonych w (4.1.37) i (4.1.54) ciągów  $(a_n)$  oraz  $(\psi_n)$  możemy wyrazić  $n$ -ty wyraz ciągu  $(\widehat{T}_n)$  w sposób rekurencyjny za pomocą ciągu  $(R_n)$  określonego poprzez ciąg  $(a_n)$ . Otrzymujemy wówczas następujący wzór:

$$\widehat{T}_n(s, z) = C(s, z)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s)\psi_k(s, z), \quad n \geq 0. \quad (4.1.55)$$

Pozostało nam wyprowadzenie formuł dla funkcji  $\widehat{T}_0(s, z)$ ,  $\widehat{T}_1(s, z)$  występujących we wzorze (4.1.53) oraz zapisanie czynnika  $C(s, z)$  w postaci jawnej. W celu wyznaczenia czynnika  $C(s, z)$  podstawimy  $n = 0$  do równania (4.1.55). Otrzymujemy

$$\widehat{T}_0(s, z) = C(s, z)R_1(s) \Rightarrow C(s, z) = a_0(s)\widehat{T}_0(s, z). \quad (4.1.56)$$

Analogicznie wyznaczamy pierwsze wyrazy ciągów funkcyjnych określonych równaniami (4.1.53) i (4.1.54) (dla  $n = 0$ )

$$\begin{aligned} \psi_0(s, z) &= a_1(s)\widehat{T}_0(s, z) - \widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) - q_N(s, z) = \\ a_0(s)\widehat{T}_1(s, z) + a_1(s)\widehat{T}_0(s, z) - \widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) - q_N(s, z) \end{aligned} \quad (4.1.57)$$

$$\psi_0(s, z) = a_0(s)\widehat{T}_1(s, z) + a_1(s)\widehat{T}_0(s, z) - \widehat{T}_0(s, z). \quad (4.1.58)$$

Porównując (4.1.57) i (4.1.58) otrzymujemy

$$-\widehat{T}_0(s, z) = -\widehat{T}_1(s, z) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) - q_N(s, z), \quad (4.1.59)$$

ponadto korzystając z faktu, że  $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s)$  równanie (4.1.59) przekształcamy do postaci

$$\widehat{T}_1(s, z) = f^{-1}(s)(\widehat{T}_0(s, z) - q_N(s, z)). \quad (4.1.60)$$

Jak widzimy, zarówno funkcja  $\widehat{T}_1(s, z)$  jak i czynnik  $C(s, z)$  są zależne od funkcji  $\widehat{T}_0(s, z)$ . Wyprowadzenie formuły na tę funkcję jest ostatnim etapem postępowania. Podstawiając zależności (4.1.53), (4.1.56) i (4.1.60) do

równania (4.1.55), mamy

$$\begin{aligned}
 \widehat{T}_n(s, z) &= a_0(s)\widehat{T}_0(s, z)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ a_{k+1}(s)\widehat{T}_0(s, z) \right. \\
 &\quad \left. - \widehat{T}_0(s, z)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) + q_N(s, z)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - q_{N-k}(s, z) \right] \\
 &= \widehat{T}_0(s, z) \left[ a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left\{ a_{k+1}(s) - f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right\} \right] \\
 &\quad + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ q_N(s, z)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - q_{N-k}(s, z) \right]. \tag{4.1.61}
 \end{aligned}$$

Definiując

$$\Theta_n(s) \stackrel{def}{=} a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left\{ a_{k+1}(s) - f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right\} \tag{4.1.62}$$

oraz

$$\Phi_n(s, z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ q_N(s, z)f^{-1}(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - q_{N-k}(s, z) \right] \tag{4.1.63}$$

otrzymujemy nową postać (4.1.61)

$$\widehat{T}_n(s, z) = \widehat{T}_0(s, z)\Theta_n(s) + \Phi_n(s, z). \tag{4.1.64}$$

Wstawiając zależność (4.1.64) do równania (4.1.49), dostajemy

$$\begin{aligned}
 \widehat{T}_0(s, z)\Theta_N(s) + \Phi_N(s, z) &= \widehat{T}_N(s, z) = \frac{1}{1 - g(\lambda + s)} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} r_k(s) \left[ \Phi_{N-k}(s, z) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \widehat{T}_0(s, z)\Theta_{N-k}(s) \right] + \widehat{T}_0(s, z) \sum_{k=N}^{\infty} r_k(s) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) \right], \tag{4.1.65}
 \end{aligned}$$

co pozwala nam na zapisanie  $T_0(s, z)$  w postaci jawnej

$$\begin{aligned}
 \widehat{T}_0(s, z) &= \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^{N-1} r_k(s)\Phi_{N-k}(s, z) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) - \Phi_N(s, z)(1 - g(\lambda + s))}{\Theta_N(s)(1 - g(\lambda + s)) - \sum_{k=1}^{N-1} r_k(s)\Theta_{N-k}(s) - \sum_{k=N}^{\infty} r_k(s)}. \tag{4.1.66}
 \end{aligned}$$



Wyprowadzone zależności (4.1.64) i (4.1.66) w połączeniu z odwrotnie zastosowanym podstawieniem (4.1.48) pozwalają nam na uzyskanie ostatecznej postaci transformaty Laplace'a rozkładu opóźnienia kolejkowania:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_n(s, z) &= \widehat{T}_{N-n}(s, z) = \widehat{T}_0(s, z)\Theta_{N-n}(s) + \Phi_{N-n}(s, z) = \\ &= \Phi_{N-n}(s, z) + \Theta_{N-n}(s) \times \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{N-1} r_k(s)\Phi_{N-k}(s, z) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) - \Phi_N(s, z)(1 - g(\lambda + s))}{\Theta_N(s)(1 - g(\lambda + s)) - \sum_{k=1}^{N-1} r_k(s)\Theta_{N-k}(s) - \sum_{k=n}^{\infty} r_k(s)}. \end{aligned} \quad (4.1.67)$$

Otrzymany wynik sformułujemy w postaci następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 4.1.** *W modelu kolejkowym typu  $M/G/1/N$  z regulaminem wielokrotnych okresów przestoju podwójna transformata Laplace'a rozkładu opóźnienia kolejkowania wyraża się następującym wzorem:*

$$\begin{aligned} \widehat{V}_n(s, z) &= \Phi_{N-n}(s, z) + \Theta_{N-n}(s) \times \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{N-1} r_k(s)\Phi_{N-k}(s, z) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) - \Phi_N(s, z)(1 - g(\lambda + s))}{\Theta_N(s)(1 - g(\lambda + s)) - \sum_{k=1}^{N-1} r_k(s)\Theta_{N-k}(s) - \sum_{k=n}^{\infty} r_k(s)}, \end{aligned} \quad (4.1.68)$$

gdzie  $r_k(s)$ ,  $\alpha(s, z)$ ,  $\beta(s, z)$ ,  $\gamma(s, z)$ ,  $\Theta_k(s)$ ,  $\Phi_k(s, z)$  zdefiniowano w (4.1.8), (4.1.31), (4.1.32), (4.1.33), (4.1.62) i (4.1.63) odpowiednio.

## 4.2 Złożony proces Poissona

Uogólnimy teraz otrzymane w poprzednim podrozdziale wyniki rozważając rozszerzony o grupowy napływ pakietów model kolejkowy typu  $M^X/G/1/N$ . Z prawdopodobieństwem  $p_k$  do systemu napływają grupy liczące  $k$  zgłoszeń obsługiwanych (będących w istocie pojedynczym zgłoszeniem napływającym) ( $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ), a ich napływ jest określony złożonym procesem Poissona o intensywności  $\lambda$ . Obsługa zgłoszeń odbywa się zgodnie z regulaminem FIFO, z rozkładem zadany przez dystrybuantę  $F(\cdot)$ . Pojemność modelu to  $N$  zgłoszeń – bufor o pojemności  $N - 1$  zgłoszeń i jedno miejsce „zarezerwowane” dla zgłoszenia aktualnie obsługiwanego. Okres zawieszenia obsługi serwera składa się z wielu pojedynczych niezależnych okresów przestoju, których czas trwania jest zgodny z rozkładem zadany dystrybuantą  $G(\cdot)$ . Rozpoczyna się on za każdym razem, gdy w momencie zakończenia obsługi zgłoszenia w buforze brakuje zgłoszeń oczekujących.

Oznaczmy teraz przez  $Y(t)$  liczbę zgłoszeń obecnych w systemie w chwili  $t$ , pozostawiając to samo oznaczenie  $v(t)$  dla wirtualnego czasu oczekiwania na obsługę dla zgłoszenia napływającego do systemu w chwili  $t$ . Przy takich oznaczeniach rozkład opóźnienia kolejkowania możemy zdefiniować w

następujący sposób:

$$V_n^X(t, x) = \mathbf{P}\{v(t) < x \mid Y(0) = n\}, \quad x > 0, t > 0, 0 \leq n \leq N. \quad (4.2.1)$$

Przyjmując, iż w chwili startu ( $t = 0$ ) w systemie nie ma jeszcze żadnych zgłoszeń ( $n = 0$ ), w momencie tym rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi. W analogii względem naszych poprzednich rozważań ponownie zastosujemy twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, otrzymując następujący wzór dla rozkładu opóźnienia kolejkowania w przypadku systemu nie zawierającego zgłoszeń w początkowej chwili:

$$\begin{aligned} V_0^X(t, x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \left[ \int_{v=y-u}^{t-u} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \right. \right. \\ &\times \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(u+v-y)} V_{k+j}^X(t-u-v, x) + V_N^X(t-u-v, x) \sum_{k=N}^{\infty} p_k \\ &+ V_N^X(t-u-v, x) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(u+v-y)} \left. \right\} dG(v) \\ &+ \int_{v=t-u}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(t-y)} F^{(k+j)*}(x-u-v+t) \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(t-y)} + \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right\} dG(v) \Big] \\ &+ e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t \left[ G(t-u+x) - G(t-u) \right] dG^{i*}(u), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

gdzie  $p_j^{i*}$  określono w Definicji 1.5, natomiast  $F^{i*}(\cdot)$  i  $G^{i*}(\cdot)$  są, określonymi w Definicji 1.4,  $i$ -krotnymi splotami Laplace'a-Stieltjesa dystrybuant  $F(\cdot)$  oraz  $G(\cdot)$ , odpowiednio.

Prawa strona wzoru (4.2.2) jest sumą siedmiu składników. Powtórnie pierwszy element sumy odzwierciedla sytuację, w której okres zawieszenia obsługi zgłoszeń kończy się przed chwilą  $t$ , a w buforze zakumulowanych zgłoszeń jest mniej niż wynosi pojemność bufora – implikacją takiej sytuacji jest podjęcie obsługi zgłoszeń w momencie  $u+v < t$ . Drugi i trzeci składnik reprezentują przypadek, w którym w momencie zakończenia okresu zawieszenia obsługi (co ma miejsce również przed chwilą  $t$ ) bufor jest całkowicie wypełniony. Ponieważ wypełnienie bufora powoduje utratę wszystkich nadchodzących pakietów w trakcie trwania tego stanu, zatem w momencie  $u+v < t$ , w którym kończy się okres zawieszenia obsługi, serwer rozpoczyna pracę z dokładnie  $N$  zgłoszeniami zakumulowanymi w buforze. Czwarty składnik opisuje przypadek, w którym pierwsza grupa zgłoszeń pojawia się przed chwilą  $t$ , jednak okres zawieszenia obsługi kończy się po tej chwili, przy czym w chwili  $t$  liczba pakietów zakumulowanych w buforze jest mniejsza niż  $N$ . Składniki piąty i

szósty opisują sytuację analogiczną do składnika czwartego, w której jednak w chwili  $t$  w systemie znajduje się już  $N$  zgłoszeń, zatem zgłoszenie pojawiające się w tej chwili zostanie utracone (z prawdopodobieństwem  $1 - v(t)$  jest równe zero, czyli mniejsze od dowolnego dodatniego  $x$ ). Ostatni element sumy jest identyczny z jego odpowiednikiem dla prostego procesu Poissona (4.1.2). Dla przypomnienia, odpowiada on sytuacji, w której pierwsze zgłoszenie napływa do serwera po chwili  $t$ , co z kolei ma swoje przełożenie na czas oczekiwania na obsługę zgłoszenia przychodzącego dokładnie w chwili  $t$ . Czas ten jest krótszy od  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy pozostały okres zawieszenia obsługi serwera  $u + v - t$  jest mniejszy od  $x$ .

W celu wyprowadzenia równań dla rozkładu opóźnienia kolejkowania w systemie zawierającym dokładnie  $n$  zgłoszeń ( $Y(0) = n$ ) w momencie rozpoczęcia obsługi, przy czym  $1 \leq n \leq N$ , powtórnie wykorzystamy fakt, iż w modelu kolejkowym typu  $M^X/G/1$  momenty zakończenia obsługi (czyli chwile, w których system opuszcza kolejne obsługiwane zgłoszenia) są momentami Markowa [61]. Tym samym ponowne zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym względem pierwszej chwili ukończenia obsługi, umożliwi nam wyprowadzenie następującego układu równań całkowych:

$$\begin{aligned} V_n^X(t, x) &= \int_{y=0}^t \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-\lambda y} V_{n+k-1}^X(t-y, x) + V_{N-1}^X(t-y, x) \right. \\ &\times \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda y)^r}{r!} e^{-\lambda y} \left. \right] dF(y) + \int_{y=t}^{\infty} e^{-\lambda t} \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \right. \\ &\times F^{(n+k-1)*}(x-y+t) + \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \left. \right] dF(y). \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Układ (4.2.3) stanowi rozszerzenie układu (4.1.3) o możliwość jednoczesnego napływu grupy zgłoszeń do systemu, wyrażoną przez czterokrotne występowanie elementu sumy splotów prawdopodobieństw  $\sum_{r=0}^k p_k^{r*}$ . Opis występujących po prawej stronie równania (4.2.3) czterech składników jest analogiczny do opisu zawartego w podrozdziale 4.1, gdzie analizowaliśmy prosty proces Poissona, i z tej racji nie będziemy go powielać w tym miejscu.

W celu zachowania spójności oznaczeń, względem tego przyjętego w (4.1.4), wprowadźmy odrębne oznaczenie dla podwójnej transformaty Laplace'a opóźnienia kolejkowania w systemie z grupowym napływem pakietów:

$$\widehat{V}_n^X(s, z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} dx \int_0^{\infty} e^{-st} V_n^X(t, x) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \operatorname{Re}(z) > 0, n \geq 0. \quad (4.2.4)$$

Kolejny już raz proces uzyskania układu równań transformat Laplace'a dla wzorów (4.2.2) i (4.2.3), z uwagi na ich dużą złożoność, zostanie przez nas

#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

---

podzielony na rozpatrywane oddzielnie etapy, których liczba jest uwarunkowana ilością składników w obydwu rozważanych sumach (sześć składników w (4.2.2) i cztery składniki w (4.2.3)).

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} \sum_{j=0}^{N-k-1} \\ & \times \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(u+v-y)} V_{k+j}^X(t-u-v, x) dG(v) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Granice całkowania występujące w tym składniku są identyczne z granicami występującymi w pierwszym składniku (4.1.5) prostego procesu Poissona, zatem stosując takie same zamiany kolejności całkowania otrzymamy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \\ & \times \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}(u+v-y)^r}{r!} dG(v) \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} V_{k+j}^X(t-u-v, x) dt. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Jak widzimy różnice pomiędzy prostym oraz złożonym procesem Poissona sprowadzają się w swej istocie do uwzględniania w pierwszym składniku prawdopodobieństw grupowego napływu pakietów  $p_k$ , ich splotów i związanych z ich indeksami granic sumowania. W konsekwencji metodologia prowadzenia dalszych przekształceń powiela kroki z poprzedniego rozdziału. Najpierw w równaniu (4.2.6) dokonujemy podstawienia  $\underline{t} = t - u - v$  i dla uproszczenia zapisu przyjmujemy notację nowych zmiennych z pominię-

ciem podkreśleń. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \\
 & \times \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}(u+v-y)^r}{r!} dG(v) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{k+j}^X(t, x) dt = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{k+j}^X(t, x) dt \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \\
 & \times \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}(u+v-y)^r}{r!} dG(v) = \\
 & \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{k+j}^X(t, x) dt \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \\
 & \times \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{y=u}^{u+v} (u+v-y)^r dy \tag{4.2.7}
 \end{aligned}$$

W kolejnym kroku uwzględniamy Definicję 1.6, która w połączeniu z obliczoną w (2.1.6) całką, oznaczeniem (4.2.4) i zależnością (2.1.9) pozwala nam zapisać (4.2.7) jako

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \widehat{V}_{k+j}^X(s, z) (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v). \tag{4.2.8}$$

Definiując

$$r_l(s) \stackrel{def}{=} \sum_{r=0}^l p_l^{r*} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \tag{4.2.9}$$

otrzymujemy następującą ostateczną postać pierwszego składnika całkowego dla złożonego procesu Poissona:

$$(1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} \widehat{V}_{k+j}^X(s, z) r_j(s). \tag{4.2.10}$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.2) ma postać

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} \left\{ \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right. \\
 & \times V_N^X(t-u-v, x) + V_N^X(t-u-v, x) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} \\
 & \times e^{-\lambda(u+v-y)} \left. \right\} dG(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \\
 & \times \int_{v=y-u}^{t-u} V_N^X(t-u-v, x) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(u+v-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(u+v-y)} dG(v) \\
 & + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \\
 & \times V_N^X(t-u-v, x) dG(v) \tag{4.2.11}
 \end{aligned}$$

Prawą stronę wzoru (4.2.11) podzielimy na dwa pomniejsze składniki. Pierwszy z nich ma postać zbliżoną do składnika (4.2.5), a różnica pomiędzy nimi sprowadza się do odmiennie indeksacji sumy  $\sum_{j=N-k}^{\infty}$  oraz indeksu rozkładu opóźnienia kolejkowania  $V_N$ . Tym samym, stosując analogiczne przekształcenia, otrzymujemy jego nową formę:

$$\begin{aligned}
 & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \widehat{V}_N^X(s, z) \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \int_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \\
 & = (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \widehat{V}_N^X(s, z) r_j(s). \tag{4.2.12}
 \end{aligned}$$

Pozostał nam jeszcze do przekształcenia następujący fragment drugiego składnika:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \\
 & \times V_N^X(t-u-v, x) dG(v) = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{t-u} V_N^X(t-u-v, x) dG(v) \\
 & \times \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{y=u}^{u+v} \lambda e^{-\lambda y} dy \tag{4.2.13}
 \end{aligned}$$

Uwzględniając obliczoną w (2.2.7) całkę, (4.2.13) przyjmie postać

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{t-u} V_N^X(t-u-v, x) \\
& \times e^{-\lambda u} [1 - e^{-\lambda v}] dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} dt \int_{v=0}^{t-u} V_N^X(t-u-v, x) \\
& \times e^{-\lambda u} [1 - e^{-\lambda v}] dG(v) = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} [1 - e^{-\lambda v}] dG(v) \\
& \times \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-st} V_N^X(t-u-v, x) dt = \\
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} [1 - e^{-\lambda v}] dG(v) \\
& \times \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} V_N^X(t-u-v, x) dt \tag{4.2.14}
\end{aligned}$$

Powtórnie zastosujemy podstawienie  $\underline{t} = t - u - v$ . Rezygnując z podkreśleń w notacji nowych zmiennych, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} [1 - e^{-\lambda v}] dG(v) \\
& \times \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_N^X(t, x) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \sum_{k=N}^{\infty} p_k \\
& \times \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} [1 - e^{-\lambda v}] dG(v) \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_N^X(t, x) dt. \tag{4.2.15}
\end{aligned}$$

Powyzsza forma ulega dalszemu uproszczeniu dzięki wprowadzonemu oznaczeniu (4.2.4) oraz zależności (2.1.9):

$$(1 - g(\lambda + s))^{-1} \widehat{V}_N^X(s, z) \sum_{k=N}^{\infty} p_k \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} (1 - e^{-\lambda v}) dG(v). \tag{4.2.16}$$

Korzystając z Definicji 1.6 wyznaczmy ostatnią występującą w (4.2.16) całkę

$$\begin{aligned}
& \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} [1 - e^{-\lambda v}] dG(v) = \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} dG(v) - \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \\
& = g(s) - g(\lambda + s), \tag{4.2.17}
\end{aligned}$$

dzięki czemu uzyskujemy następującą końcową postać podskładnika:

$$\frac{g(s) - g(\lambda + s)}{1 - g(\lambda + s)} \widehat{V}_N^X(s, z) \sum_{k=N}^{\infty} p_k. \tag{4.2.18}$$

Ostatecznie składnik drugi możemy zapisać w następującej postaci:

$$\frac{\widehat{V}_N^X(s, z)}{1 - g(\lambda + s)} \left( \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} r_j(s) + [g(s) - g(\lambda + s)] \sum_{k=N}^{\infty} p_k \right). \quad (4.2.19)$$

Transformata Laplace'a trzeciego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=t-u}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-k-1} \\ & \times \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(t-y)} F^{(k+j)*}(x-u-v+t) dG(v) \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Granice całkowania występujące w tym składniku są identyczne z granicami występującymi w pierwszym składniku (4.1.12) w przypadku prostego procesu Poissona, wobec czego stosujemy taki sam schemat zmian kolejności całkowania, otrzymując

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} dt \\ & \times \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} F^{(k+j)*}(x-u-v+t) dx \int_{y=u}^t (t-y)^r dy \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Następnie obliczamy dwie całki:

$$\int_{y=u}^t (t-y)^r dy = -\frac{(t-y)^{r+1}}{r+1} \Big|_{y=u}^t = \frac{(t-u)^{r+1}}{r+1}, \quad (4.2.22)$$

oraz

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} F^{(k+j)*}(x-u-v+t) dx = \frac{1}{z} e^{-z(u+v-t)} f^{k+j}(z), \quad (4.2.23)$$

której wyznaczenie jest analogiczne do całki (4.1.12) posiadającej jedynie odmienny względem (4.2.23) indeks splotu  $F^{(k+1)*}$ . Występujące w wyniku  $f(z)$  oznacza transformatę Laplace'a-Stieltjesa wprowadzoną w Definicji 1.6.



Kontynuując (4.2.21) możemy teraz zapisać w następującej formie

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} \\
 & \times \frac{1}{z} e^{-z(u+v-t)} f^{k+j}(z) \frac{(t-u)^{r+1}}{r+1} dt = \\
 & \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} f^{k+j}(z) e^{-zv} dG(v) \\
 & \times \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} e^{z(t-u)} (t-u)^{r+1} dt = \\
 & \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} f^{k+j}(z) \\
 & \times e^{-zv} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)(t-u)} e^{z(t-u)} (t-u)^{r+1} dt. \tag{4.2.24}
 \end{aligned}$$

Następnie w równaniu (4.2.24) dokonamy podstawienia  $y = t - u$  oraz skorzystamy z zależności (2.1.9), doprowadzając składnik do ostatecznej postaci

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{z(1-g(\lambda+s))} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \int_{v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-k-1} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} f^{k+j}(z) e^{-zv} dG(v) \\
 & \times \int_{y=0}^v e^{-(\lambda+s)y} e^{zy} y^{r+1} dy = \\
 & \frac{1}{z(1-g(\lambda+s))} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} f^{k+j}(z) \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} \int_{v=0}^{\infty} e^{-zv} dG(v) \\
 & \times \int_{y=0}^v e^{-(\lambda+s-z)y} y^{r+1} dy. \tag{4.2.25}
 \end{aligned}$$

Transformata Laplace'a czwartego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.2) ma postać

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=t-u}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \\
 & \times \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{[\lambda(t-y)]^r}{r!} e^{-\lambda(t-y)} dG(v) = \\
 & \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \\
 & \times \frac{\lambda^{r+1}}{r!} (t-y)^r dy \int_{v=t-u}^{\infty} dG(v) \tag{4.2.26}
 \end{aligned}$$

#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

W powyższym składniku jedynym elementem zależnym od zmiennej  $x$  jest  $e^{-zx}$ , dzięki czemu możemy ponownie skorzystać z obliczonej w (4.1.18) całki. Wówczas (4.2.26) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} (t-y)^r dy \\ & \times \int_{v=t-u}^{\infty} dG(v) \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

W dalszym postępowaniu wzorujemy się na schemacie zmian kolejności całkowania, opisanym dla analogicznego składnika (4.1.19) prostego procesu Poissona, którego rezultatem jest

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} \int_{v=0}^{\infty} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} dt \\ & \times \int_{y=u}^t (t-y)^r dy. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Kontynuując nasze przekształcenia, najpierw uwzględniamy obliczoną w (4.2.22) całkę

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} \int_{v=0}^{\infty} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)t} \\ & \times (t-u)^{r+1} dt = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} \\ & \times \int_{v=0}^{\infty} dG(v) \int_{t=u}^{u+v} e^{-(\lambda+s)(t-u)} (t-u)^{r+1} dt, \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

a następnie w równaniu (4.2.29) dokonujemy podstawienia  $y = t - u$  i korzystamy z zależności (2.1.9), otrzymując

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z(1-g(\lambda+s))} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} \int_{v=0}^{\infty} dG(v) \int_{y=0}^v e^{-(\lambda+s)y} y^{r+1} dy = \\ & \frac{1}{z(1-g(\lambda+s))} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} y^{r+1} dy \int_{v=y}^{\infty} dG(v). \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

W ostatnim kroku wykorzystujemy obliczoną w (4.1.22) całkę, uzyskując ostateczną postać składnika

$$\frac{1}{z(1-g(\lambda+s))} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} y^{r+1} (1-G(y)) dy. \quad (4.2.31)$$

#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

---

Transformata Laplace'a piątego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.2) przyjmuje postać

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=t-u}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} p_k dG(v) \quad (4.2.32)$$

Z własności dystrybuanty wynika, że

$$\int_{v=t-u}^{\infty} dG(v) = G([\infty]) - G(t-u) = 1 - G(t-u). \quad (4.2.33)$$

Ponieważ

$$\int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy = -e^{-\lambda y} \Big|_{y=u}^t = e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}, \quad (4.2.34)$$

zapisujemy składnik (4.2.32) w nowej postaci

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t (1 - G(t-u))(e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}) dG^{i*}(u) = \\ & \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} (1 - G(t-u))(e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}) dt = \\ & \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{(\lambda+s)u} e^{-st} (1 - G(t-u)) \\ & \times (e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}) dt = \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \\ & \times \int_{t=u}^{\infty} [e^{-(t-u)s} (1 - G(t-u)) - e^{-(\lambda+s)(t-u)} (1 - G(t-u))] dt \quad (4.2.35) \end{aligned}$$

W powyższym składniku jedynym elementem zależnym od zmiennej  $x$  jest  $e^{-zx}$ , dzięki czemu możemy ponownie skorzystać z obliczonej w (4.1.18) całki. Obliczymy także dwie następujące całki:

$$\begin{aligned} & \int_{t=u}^{\infty} e^{-(t-u)s} (1 - G(t-u)) dt = \Big|_{y=t-u} = \int_{y=0}^{\infty} e^{-sy} (1 - G(y)) dy = \\ & \int_{y=0}^{\infty} e^{-sy} dy - \int_{y=0}^{\infty} e^{-sy} G(y) dy = -\frac{1}{s} e^{-sy} \Big|_{y=0}^{y \rightarrow \infty} - \left[ -\frac{1}{s} e^{-sy} G(y) \Big|_{y=0}^{y \rightarrow \infty} + \right. \\ & \left. \frac{1}{s} \int_{y=0}^{\infty} e^{-sy} dG(y) \right] = 0 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} g(s) = \frac{1 - g(s)}{s} \quad (4.2.36) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)}(1-G(t-u))dt = \left| y = t - u \right| = \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y}(1-G(y))dy \\
 & = \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y}dy - \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y}G(y)dy = -\frac{1}{\lambda+s}e^{-(\lambda+s)y} \Bigg|_{y=0}^{y \rightarrow \infty} - \\
 & \left[ -\frac{1}{\lambda+s}e^{-(\lambda+s)y}G(y) \Bigg|_{y=0}^{y \rightarrow \infty} + \int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda+s}e^{-(\lambda+s)y}dG(y) \right] = 0 + \frac{1}{\lambda+s} - \\
 & \frac{1}{\lambda+s} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y}dG(y) = \frac{1}{\lambda+s} - \frac{g(\lambda+s)}{\lambda+s} = \frac{1-g(\lambda+s)}{\lambda+s} \quad (4.2.37)
 \end{aligned}$$

gdzie  $g(s)$  i  $g(\lambda+s)$  oznaczają transformaty Laplace'a-Stieltjesa dystrybucyjny  $G$  (Definicja 1.6) dla argumentów  $s$  oraz  $\lambda+s$ , odpowiednio. Ponownie skorzystamy z zależności (2.1.9), przekształcając (4.2.35) w ostateczną postać składnika

$$\frac{1}{1-g(\lambda+s)} \frac{1}{z} \left[ \frac{1-g(s)}{s} - \frac{1-g(\lambda+s)}{\lambda+s} \right] \sum_{k=N}^{\infty} p_k \quad (4.2.38)$$

Transformata Laplace'a szóstego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.2) ma postać

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} dt \int_{u=0}^t \left[ G(t-u+x) - G(t-u) \right] dG^{i*}(u) \quad (4.2.39)$$

Składnik ten oraz składnik piąty wzoru (4.1.2) opisany w (4.1.24) są identyczne. Ostateczna forma tegoż składnika została wyprowadzona w (4.1.30) i prezentuje się następująco

$$\frac{g(z) - g(\lambda+s)}{z(\lambda+s-z)(1-g(\lambda+s))}. \quad (4.2.40)$$

Definiując teraz funkcje

$$\begin{aligned}
 \alpha(s, z) & \stackrel{def}{=} \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} f^{k+j}(z) \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} \int_{v=0}^{\infty} e^{-zv} dG(v) \\
 & \times \int_{y=0}^v e^{-(\lambda+s-z)y} y^{r+1} dy, \quad (4.2.41)
 \end{aligned}$$

$$\beta(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} \sum_{r=0}^j p_j^{r*} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)!} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} y^{r+1} (1-G(y)) dy, \quad (4.2.42)$$

$$\gamma(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{z} \left[ \frac{g(z) - g(\lambda + s)}{\lambda + s - z} + \sum_{k=N}^{\infty} p_k \left( \frac{1 - g(s)}{s} - \frac{1 - g(\lambda + s)}{\lambda + s} \right) \right], \quad (4.2.43)$$

oraz

$$c(s) \stackrel{def}{=} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \frac{g(s) - g(\lambda + s)}{1 - g(\lambda + s)}, \quad (4.2.44)$$

możemy połączyć teraz wyznaczone pięć składników podwójnej transformaty Laplace'a opóźnienia kolejkowania i zapisać wzór (4.1.2) w „języku” podwójnej transformaty w następującej ujednoczonej postaci:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_0^X(s, z) &= \frac{1}{(1 - g(\lambda + s))} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} r_j(s) \widehat{V}_{k+j}^X(s, z) + \widehat{V}_N^X(s, z) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \right. \\ &\times \left. \sum_{j=N-k}^{\infty} r_j(s) + \widehat{V}_N^X(s, z) c(s) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.3) przyjmuje postać

$$\sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^r}{r!} V_{n+k-1}^X(t - y, x) dF(y) = \quad (4.2.46)$$

Składnik ten oraz pierwszy składnik (4.1.35) wzoru (4.1.2) różnią się o element sumy  $\sum_{r=0}^k p_k^{r*}$ , odpowiadający za uwzględnienie grupowego napływu zgłoszeń do systemu, oraz wynikające z niego indeksowanie ułamka  $\frac{(\lambda y)^r}{r!}$ . Stosując analogiczne przekształcenia doprowadzamy ten składnik do postaci

$$\sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^r}{r!} dF(y) \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} V_{n+k-1}^X(t, x) dt. \quad (4.2.47)$$

Definiując

$$a_k(s) \stackrel{def}{=} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^r}{r!} dF(y) \quad (4.2.48)$$

wraz z jednoczesnym zastosowaniem wprowadzonego oznaczenia (4.2.4) otrzymamy ostateczną postać tego składnika

$$\sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \widehat{V}_{n+k-1}^X(s, z). \quad (4.2.49)$$

#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

---

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.3) wygląda następująco

$$\sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^r}{r!} V_{N-1}^X(t-y, x) dF(y) \quad (4.2.50)$$

Składnik ten różni się od poprzedniego jedynie indeksami sumy  $\sum_{k=N-n}^{\infty}$  oraz  $V_{N-1}^X$ , tym samym, stosując analogiczne przekształcenia jak dla składnika pierwszego, otrzymamy ostateczną jego postać:

$$\widehat{V}_{N-1}^X(s, z) = \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s). \quad (4.2.51)$$

Transformata Laplace'a trzeciego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.3) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=t}^{\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r!} F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dF(y) = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^r F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dt = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^r F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dt = \\ & \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^r dt \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} F^{(n+k-1)*}(x-y+t) dx \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

Uwzględniając obliczoną w (4.1.42) całkę przekształcimy (4.2.52) do następującej ostatecznej postaci:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^r \frac{1}{z} e^{-zy} e^{zt} f^{n+k-1}(z) dt = \\ & \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} f^{n+k-1}(z) \int_{y=0}^{\infty} e^{-zy} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s-z)t} t^r dt. \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

Transformata Laplace'a czwartego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (4.2.3) wygląda następująco:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \int_{y=t}^{\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r!} dF(y) = \\ & \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^r dt \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

W powyższym składniku ponownie mamy do czynienia z sytuacją w której jedynym elementem zależnym od zmiennej  $x$  jest  $e^{-zx}$ . Fakt ten uprawnia nas do skorzystania z wyliczonej w (4.1.18) wartości całki, dzięki czemu otrzymujemy następującą ostateczną postać czwartego składnika:

$$\frac{1}{z} \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^r dt. \quad (4.2.55)$$

Definiując funkcje

$$q_i(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{N-i-1} f^{i+k-1}(z) \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} \int_{y=0}^{\infty} e^{-zy} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s-z)t} t^r dt, \quad (4.2.56)$$

$$\eta_i(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{z} \sum_{k=N-i}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_k^{r*} \frac{\lambda^r}{r!} \int_{y=0}^{\infty} dF(y) \int_{t=0}^y e^{-(\lambda+s)t} t^r dt, \quad (4.2.57)$$

możemy zapisać łącznie wyznaczone cztery składniki podwójnej transformaty Laplace'a rozkładu opóźnienia kolejkowania, przekształcając (4.2.3) do postaci

$$\begin{aligned} \widehat{V}_n^X(s, z) &= \sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \widehat{V}_{n+k-1}^X(s, z) + \widehat{V}_{N-1}^X(s, z) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s) + q_n(s, z) \\ &+ \eta_n(s, z), \end{aligned} \quad (4.2.58)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ .

W wyznaczonym układzie równań dla transformat Laplace'a (4.2.45) i (4.2.58) dokonamy podstawienia, które umożliwi nam zapisanie rozważanego układu w postaci umożliwiającej zastosowanie Twierdzenia 1.4. Przyjmijmy następujące oznaczenie uwzględniające w swoim zapisie grupowy napływ zgłoszeń w rozważanym modelu kolejkowym:

$$\widehat{T}_n^X(s, z) = \widehat{V}_{N-n}^X(s, z) \quad (4.2.59)$$

Otrzymujemy układ

$$\begin{aligned} \widehat{T}_N^X(s, z) &= \frac{1}{1 - g(\lambda + s)} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} r_j(s) \widehat{T}_{N-k-j}^X(s, z) + \widehat{T}_0^X(s, z) \right. \\ &\times \left. \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} r_j(s) + \widehat{T}_0^X(s, z) c(s) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) \right], \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

$$\begin{aligned} \widehat{T}_n^X(s, z) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}^X(s, z) + \widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=n}^{\infty} a_k(s) + q_{N-n}(s, z) \\ &+ \eta_{N-n}(s, z) \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

gdzie  $0 \leq n \leq N-1$ . W oczywisty sposób otrzymany układ jest podobny do układu (4.1.49) (4.1.50) i różni się od niego nieco większą liczbą sum i składowych w równaniach. Tym samym metodologia dalszego postępowania jest analogiczna do tej zastosowanej w Rozdziale 4.1, w którym rozważany jest prosty proces Poissona opisujący ruch wejściowy zgłoszeń. Najpierw skupimy się na równaniu (4.1.50), dokonując następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} \widehat{T}_n^X(s, z) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}^X(s, z) + \widehat{T}_1^X(s, z) a_n(s) + \widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) \\ &+ q_{N-n}(s, z) + \eta_{N-n}(s, z) \\ \sum_{k=0}^n a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}^X(s, z) - \widehat{T}_n^X(s, z) &= -\widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) - q_{N-n}(s, z) \\ &- \eta_{N-n}(s, z) \\ \sum_{k=0}^{n+1} a_k(s) \widehat{T}_{n-k+1}^X(s, z) - \widehat{T}_n^X(s, z) &= a_{n+1}(s) \widehat{T}_0^X(s, z) - \widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) \\ &- q_{N-n}(s, z) - \eta_{N-n}(s, z) \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

Następnie w sumie znajdującej się po lewej stronie równania (4.2.62) dokonujemy podstawienia  $\underline{k} = k - 1$  i wtórnie, celem uproszczenia zapisu, rezygnujemy z podkreśleń w nowej zmiennej indeksującej

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s) \widehat{T}_{n-k}^X(s, z) - \widehat{T}_n^X(s, z) &= a_{n+1}(s) \widehat{T}_0^X(s, z) - \widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) \\ &- q_{N-n}(s, z) - \eta_{N-n}(s, z). \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

Definiując

$$\psi_n(s, z) \stackrel{def}{=} a_{n+1}(s) \widehat{T}_0^X(s, z) - \widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(s) - q_{N-n}(s, z) - \eta_{N-n}(s, z) \quad (4.2.64)$$



równanie (4.2.63) przekształcimy do postaci

$$\psi_n(s, z) = \sum_{k=-1}^n a_{k+1}(s) \widehat{T}_{n-k}^X(s, z) - \widehat{T}_n^X(s, z), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (4.2.65)$$

Tym samym otrzymaliśmy występujące w założeniach Twierdzenia 1.4, a zdefiniowane w (4.2.48) i (4.2.65), ciągi  $(a_n)$  oraz  $(\psi_n)$  umożliwiające nam wyrażenie  $n$ -tego wyrazu  $\widehat{T}_n^X$  w sposób rekurencyjny poprzez wyrazy ciągu  $(R_n)$  w następującej formie:

$$\widehat{T}_n^X(s, z) = C(s, z)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s)\psi_k(s, z), \quad n \geq 0. \quad (4.2.66)$$

Ostatnimi niejawnymi elementami są funkcje  $\widehat{T}_0(s, z)$ ,  $\widehat{T}_1(s, z)$  występujące we wzorze (4.2.64) oraz czynnik  $C(s, z)$ . W celu wyznaczenia czynnika  $C(s, z)$ , podstawimy  $n = 0$  do równania (4.2.66):

$$\widehat{T}_0^X(s, z) = C(s, z)R_1(s) \Rightarrow C(s, z) = a_0(s)\widehat{T}_0^X(s, z). \quad (4.2.67)$$

Podstawiając  $n = 0$  do (4.2.64), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \psi_0(s, z) &= a_1(s)\widehat{T}_0^X(s, z) - \widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) - q_N(s, z) - \eta_N(s, z) = \\ &= a_0(s)\widehat{T}_1^X(s, z) + a_1(s)\widehat{T}_0^X(s, z) - \widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) - q_N(s, z) - \eta_N(s, z). \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

Podobnie, dla  $n = 0$  (4.2.65) przyjmuje postać

$$\psi_0(s, z) = a_0(s)\widehat{T}_1^X(s, z) + a_1(s)\widehat{T}_0^X(s, z) - \widehat{T}_0^X(s, z). \quad (4.2.69)$$

Porównując teraz prawe strony (4.2.68) i (4.2.69), mamy

$$-\widehat{T}_0^X(s, z) = -\widehat{T}_1^X(s, z) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s) - q_N(s, z) - \eta_N(s, z). \quad (4.2.70)$$

Ponieważ  $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s)$ , zatem (4.2.70) przyjmie postać

$$\widehat{T}_1^X(s, z) = [f(s)]^{-1}(\widehat{T}_0^X(s, z) - q_N(s, z) - \eta_N(s, z)). \quad (4.2.71)$$

Pozostała nam do wyprowadzenia formuła na ostatnią niejawną funkcję  $\widehat{T}_0(s, z)$ . Najpierw podstawiamy zależności (4.2.64), (4.2.67) i (4.2.71) do

równania (4.2.66), otrzymując

$$\begin{aligned}
 \widehat{T}_n^X(s, z) &= a_0(s)\widehat{T}_0^X(s, z)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ a_{k+1}(s)\widehat{T}_0^X(s, z) \right. \\
 &\quad \left. - \widehat{T}_0^X(s, z)[f(s)]^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) + (q_N(s, z) + \eta_N(s, z))[f(s)]^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right. \\
 &\quad \left. - q_{N-k}(s, z) - \eta_{N-k}(s, z) \right] = \widehat{T}_0^X(s, z) \left[ a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left\{ a_{k+1}(s) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - [f(s)]^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right\} \right] + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ (q_N(s, z) + \eta_N(s, z))[f(s)]^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) - q_{N-k}(s, z) - \eta_{N-k}(s, z) \right]. \tag{4.2.72}
 \end{aligned}$$

Definiując

$$\Theta_n(s) \stackrel{def}{=} a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left\{ a_{k+1}(s) - [f(s)]^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right\} \tag{4.2.73}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \Phi_n(s, z) &\stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s) \left[ (q_N(s, z) + \eta_N(s, z))[f(s)]^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(s) \right. \\
 &\quad \left. - q_{N-k}(s, z) - \eta_{N-k}(s, z) \right] \tag{4.2.74}
 \end{aligned}$$

przekształcamy (4.2.72) do nowej, zwartej postaci

$$\widehat{T}_n^X(s, z) = \widehat{T}_0^X(s, z)\Theta_n(s) + \Phi_n(s, z). \tag{4.2.75}$$

Następnie do równania (4.2.60) wstawiamy wyprowadzoną zależność (4.2.75), otrzymując

$$\begin{aligned}
 \widehat{T}_0^X(s, z)\Theta_N(s) + \Phi_N(s, z) &= \widehat{T}_N^X(s, z) = \frac{1}{1 - g(\lambda + s)} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} r_j(s) \right. \\
 &\quad \times \left[ \Phi_{N-k-j}(s, z) + \widehat{T}_0^X(s, z)\Theta_{N-k-j}(s) \right] + \widehat{T}_0^X(s, z) \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} r_j(s) \\
 &\quad \left. + \widehat{T}_0^X(s, z)c(s) + \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) \right]. \tag{4.2.76}
 \end{aligned}$$

Dla ułatwienia zapisu wprowadźmy jeszcze dwie funkcje pomocnicze

$$\chi(s, z) = \alpha(s, z) + \beta(s, z) + \gamma(s, z) \tag{4.2.77}$$

$$\Upsilon(s) = \Theta_N(s)(1 - g(\lambda + s)) \quad (4.2.78)$$

Z równania (4.2.76) wyznaczamy

$$\begin{aligned} \widehat{T}_0^X(s, z) = & \frac{\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} r_j(s) \Phi_{N-k-j}(s, z) + \chi(s, z) - \Phi_N(s, z)(1 - g(\lambda + s))}{\Upsilon(s) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} r_j(s) \Theta_{N-k-j}(s) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} r_j(s) - c(s)}. \end{aligned} \quad (4.2.79)$$

Wyprowadzone zależności (4.2.75) i (4.2.79) w połączeniu z odwrotnie zastosowanym podstawieniem (4.2.59) umożliwiają nam uzyskanie ostatecznej postaci transformaty Laplace'a rozkładu opóźnienia kolejkowania. Otrzymany wynik sformułujemy w postaci twierdzenia:

**Twierdzenie 4.2.** *W modelu kolejkowym typu  $M^X/G/1/N$  z regulaminem wielokrotnych okresów przestoju transformata Laplace'a rozkładu warunkowego opóźnienia kolejkowania wyraża się następującym wzorem:*

$$\begin{aligned} \widehat{T}_n^X(s, z) = & \Phi_{N-n}(s, z) + \Theta_{N-n}(s) \times \\ & \frac{\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} r_j(s) \Phi_{N-k-j}(s, z) + \chi(s, z) - \Phi_N(s, z)(1 - g(\lambda + s))}{\Upsilon(s) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=0}^{N-k-1} r_j(s) \Theta_{N-k-j}(s) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{j=N-k}^{\infty} r_j(s) - c(s)}, \end{aligned} \quad (4.2.80)$$

gdzie  $r_k(s)$ ,  $\chi(s, z)$ ,  $\alpha(s, z)$ ,  $\beta(s, z)$ ,  $\gamma(s, z)$ ,  $\Theta_k(s)$ ,  $\Phi_k(s, z)$ ,  $\Upsilon(s)$  zdefiniowano w (4.2.9), (4.2.77), (4.2.41), (4.2.42), (4.2.43), (4.2.73), (4.2.74) i (4.2.78) odpowiednio.

### 4.3 Analiza numeryczna.

Przeprowadzenie obliczeń numerycznych kolejny już raz rodzi potrzebę zastosowania algorytmu odwracania transformaty Laplace'a. W celu otrzymania rozkładu opóźnienia kolejkowania należałoby zastosować algorytm umożliwiający odwrócenie podwójnej transformaty Laplace'a (przykładowy algorytm został opisany m. in. w pracach [25] i [30]). Z oczywistych względów taki proces jest bardziej złożony obliczeniowo od algorytmu odwracania pojedynczej transformaty, a każdy algorytm realizujący tę operację będzie generował więcej błędów natury obliczeniowej mających bezpośrednie przełożenie na dokładność otrzymanego rozkładu opóźnienia kolejkowania (błędy przytoczonej metody związane są z przybliżonym całkowaniem, zaokrągleniami oraz sumowaniem szeregów przy pomocy sumy Eulera). Skomplikowana postać wyprowadzonych w Twierdzeniach 4.1 i 4.2 transformat ma bezpośrednie przełożenie na efektywność ich odwracania. Z tych względów w dalszych rozważaniach ograniczymy się do problemu wyznaczenia rozkładu średniej wartości opóźnienia kolejkowania w stanie nieustalonym

(tzn. w dowolnej chwili  $t$ ) w zależności od przyjętych w poszczególnych eksperymentach parametrów początkowych. Pierwszym krokiem jest uzyskanie postaci transformaty Laplace'a wartości oczekiwanej opóźnienia kolejkowego (w literaturze nazywanej też wartością średnią opóźnienia kolejkowania) na bazie wyprowadzonych w poprzednich podrozdziałach transformat. Wykorzystując podejście przedstawione w [24], zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 \widehat{E}v_n^X(s, z) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ z \cdot \widehat{V}_n^X(s, z) \right] \Big|_{z=0} = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ z \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} dx \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} dt \right] \Big|_{z=0} = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ z \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} \mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} dx \right] \Big|_{z=0} = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ z \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{z} e^{-zx} \right) \mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} dx \right] \Big|_{z=0} = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ z \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \left( -\frac{1}{z} e^{-zx} \mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} \Big|_{x=0}^{\infty} \right. \right. \\
 &= \left. \left. - \int_{x=0}^{\infty} -\frac{1}{z} e^{-zx} d\mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} \right) \right] \Big|_{z=0} = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ z \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{z} e^{-zx} d\mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} \right] \Big|_{z=0} = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^{\infty} e^{-zx} d\mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} \right] \Big|_{z=0} = \\
 &= \left( - \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} e^{-zx} d\mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} \right) \Big|_{z=0} = \\
 &= \left( - \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^{\infty} -x e^{-zx} d\mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} \right) \Big|_{z=0} = \\
 &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{x=0}^{\infty} x d\mathbf{P}\{v(t) < x | Y(0) = n\} = \\
 &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \mathbf{E}^X \{v(t) | Y(0) = n\} dt \tag{4.3.1}
 \end{aligned}$$

W naszych dalszych rozważaniach ograniczymy się do złożonego procesu Poissona, stanowiącego bardziej kompleksowe podejście do zagadnienia kolejkowania pakietów. W celu otrzymania wartości średniej opóźnienia kolejkowania w funkcji czasu wpływu zgłoszenia  $t$ , do wyprowadzonej transformaty (4.3.1) zastosujemy algorytm Gavera-Stehfesta.

We wszystkich zaprezentowanych w dalszej części rozdziału przykładach pojemność modelu określona literą  $N$  wynosi 7 pakietów, zatem bufor akumulujący zgłoszenia może zgromadzić do sześciu pakietów w trakcie gdy jeden pakiet jest obsługiwany. Dystrybuanta  $G(\cdot)$ , oznaczająca długość trwania pojedynczego okresu zawieszenia obsługi, ponownie jest dystrybuantą rozkładu Erlanga drugiego rzędu postaci (2.3.4). Podstawową jednostką objętości pakietów  $v$  powtórnie będzie wartość 100 B, co w połączeniu z zaprezentowanym w Przykładzie 1 modelowaniem średniego rozmiaru pakietu skutkuje powieleniem przyjętego wcześniej rozumowania, zgodnie z którym pojedyncze zgłoszenie napływające o rozmiarze  $j \cdot 100$  B traktujemy jako grupę o liczności  $j$  pakietów/zgłoszeń (obsługiwalnych). Rozkład prawdopodobieństwa czasu obsługi zgłoszeń jest rozkładem wykładniczym o dystrybuancie postaci

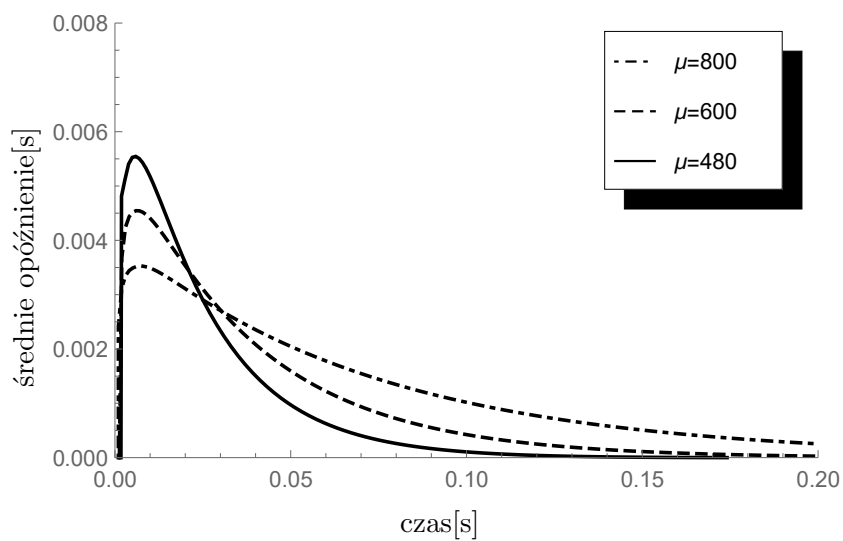
$$F(t) = (1 - e^{-\mu t}), \quad t > 0, \quad (4.3.2)$$

gdzie parametr  $\mu$  będzie określony indywidualnie dla wszystkich wykonanych w niniejszym rozdziale badań.

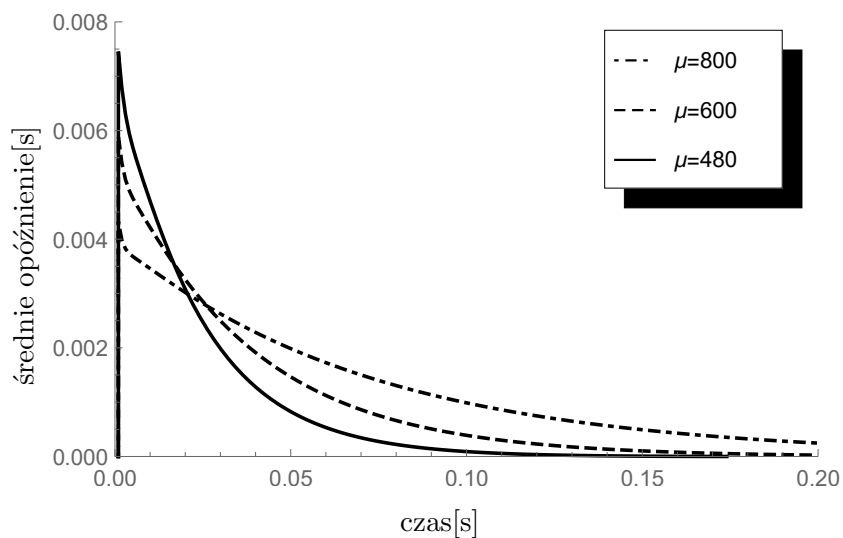
### 4.3.1 Badanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń w złożonym procesie Poissona

Pierwsze trzy eksperymenty umożliwią nam przeanalizowanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń na rozkład średniego opóźnienia kolejkowania (4.3.1). Rozważymy trzy scenariusze, w których parametr  $\mu$  dystrybuanty (4.3.2) reprezentujący intensywność obsługi zgłoszeń przyjmuje wartości  $\mu \in \{480, 600, 800\}$  pakietów/s, co odpowiada prędkościom przetwarzania danych rzędu 640, 480 i 384 kb/s. Intensywność napływu zgłoszeń do systemu jest stała i wynosi  $\lambda = 600$  pakietów/s, tym samym uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności obsługi pakietów. Pozostałymi parametrami początkowymi są: odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju wynosi średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$  oraz ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapelnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności obsługi pakietów. Każdy z eksperymentów ma przyporządkowany indywidualnie parametr  $n$  początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie, którego wartości wynoszą 0, 4 oraz 7 pakietów. Rysunki 4.1, 4.2 oraz 4.3 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.

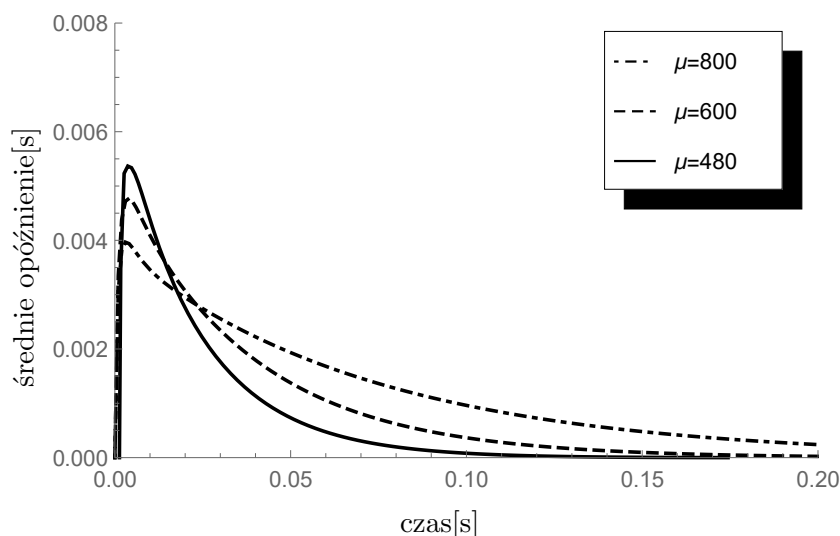
Pierwszym wnioskiem wynikającym z analizy wykresów jest fakt, że średnie opóźnienie kolejkowania dość szybko maleje wraz z upływem czasu (a tym samym zbliżaniem się do stanu ustalonego). Widoczne różnice w nachyleniu i kształcie wykresów średniego opóźnienia są skorelowane z intensywnością obsługi – im więcej pakietów w ciągu sekundy możemy obsłużyć,



Rysunek 4.1: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.



Rysunek 4.2: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 4\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.

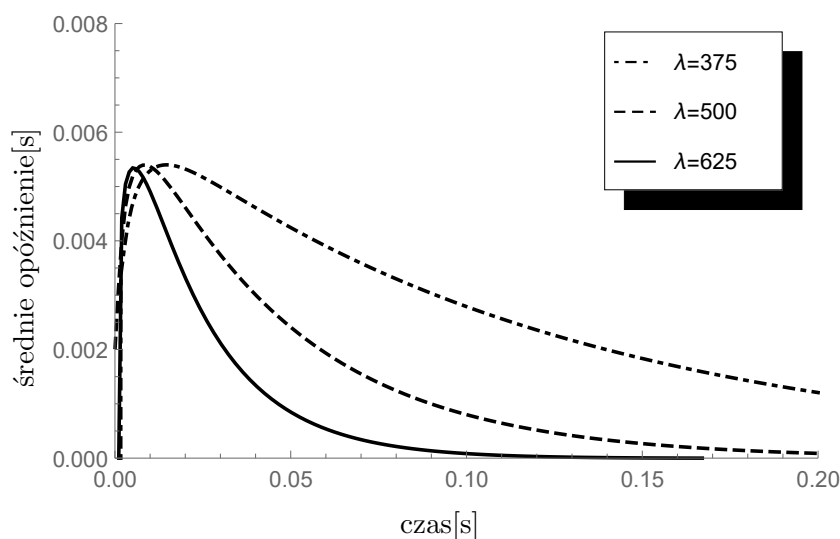


Rysunek 4.3: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 7\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.

tym wolniej wartość średniego opóźnienia maleje, jednocześnie osiągając niższą wartość maksymalną opóźnienia. Spadek wartości średniego opóźnienia jest bezpośrednio związany z utratą pakietów. Wpływa na to wspomniany w opisach równań (4.1.2) i (4.2.2) fakt przyjęcia założenia, że czas oczekiwania na obsługę pakietu utraconego wynosi  $v(t) = 0$ . Rezultatem analizy wartości oczekiwanej opóźnienia kolejkowego jest wzrastające wraz z upływem czasu prawdopodobieństwo utraty kolejnych pakietów, obniżające wartość średniego opóźnienia – wszak analizujemy tutaj wysokie obciążenia systemu na poziomach  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$ , które przekładają się na duże średnie wypełnienie systemu na poziomach  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$ . Widzimy także, że początkowa liczba pakietów obecnych w systemie wpływa na wartość maksymalnego średniego opóźnienia oraz w mniejszym stopniu także na tempo dążenia średniego opóźnienia do wartości osiągananej w stanie ustalonym. Charakter prezentowanych wykresów jest również konsekwencją przyjętej wartości pojemności systemu  $N = 7$ , wobec której możliwość grupowego napływu do trzech zgłoszeń równocześnie skutkuje stosunkowo wysoką szansą na przepełnienie bufora kolejkującego pakiety.

### 4.3.2 Badanie wpływu zmian intensywności napływu zgłoszeń w złożonym procesie Poissona

Kolejne trzy eksperymenty umożliwią nam przeanalizowanie zmian średniego opóźnienia kolejkowania (4.3.1) w zależności od wartości intensywności napływu pakietów. Rozważymy powtórnie trzy scenariusze, w których parametr  $\lambda$  odpowiadający za intensywność napływu zgłoszeń przyjmuje wartości  $\lambda \in \{375, 500, 625\}$  pakietów/s, co odpowiada prędkościom przetwarzania danych rzędu 300, 400 i 500 kb/s. Intensywność obsługi zgłoszeń jest stała i wynosi  $\mu = 500$  pakietów/s, tym samym uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Pozostałe parametry początkowe są identyczne z przyjętymi w poprzednich eksperymentach: odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju wynosi średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$  oraz ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Każdy z eksperymentów, których wyniki zaprezentowano na Rysunkach 4.4, 4.5 oraz 4.6, ma przyporządkowany indywidualnie parametr  $n$  początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie: 0, 4 lub 7 pakietów.



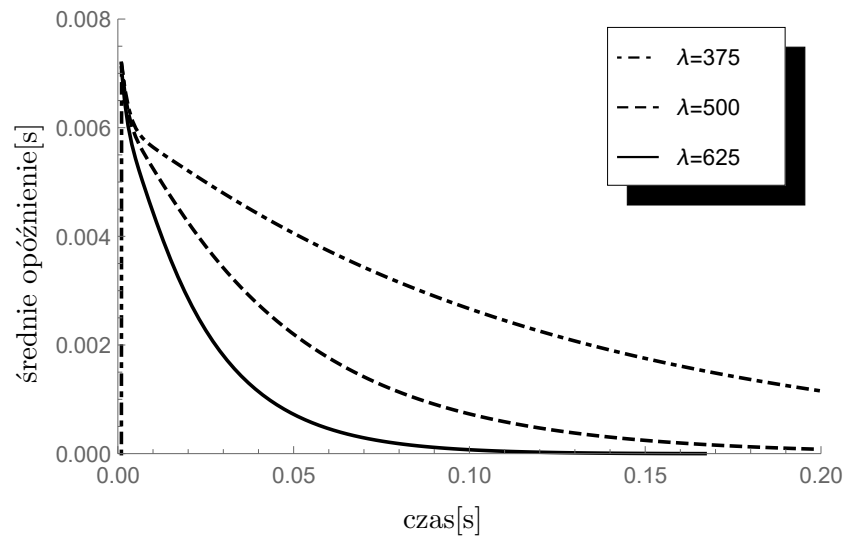
Rysunek 4.4: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 0\}$  dla  $\mu = 500$  pakietów/s.

Charakter widocznych na wykresach zmian omówimy odnosząc się raz jeszcze do eksperymentów zaprezentowanych w podrozdziale 4.3.1 oraz roz-

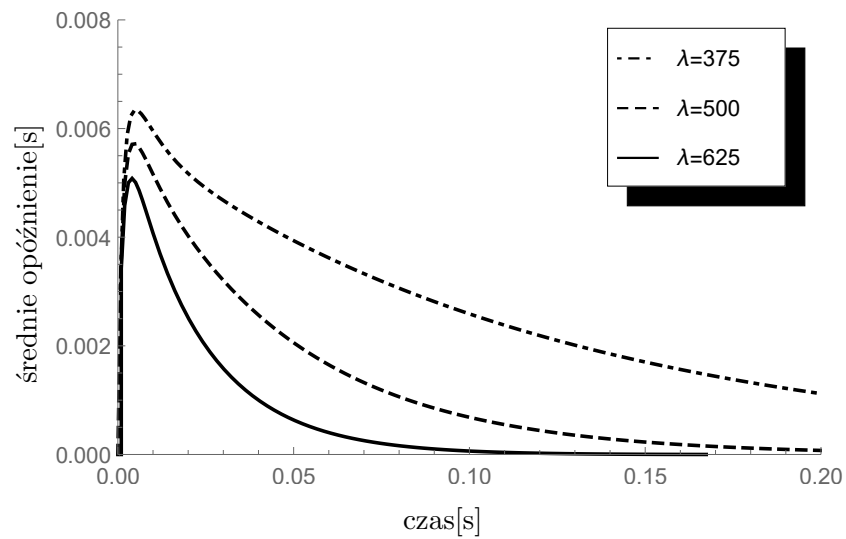


#### 4. Rozkład opóźnienia kolejkowania

---



Rysunek 4.5: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 4\}$  dla  $\mu = 500$  pakietów/s.



Rysunek 4.6: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 7\}$  dla  $\mu = 500$  pakietów/s.

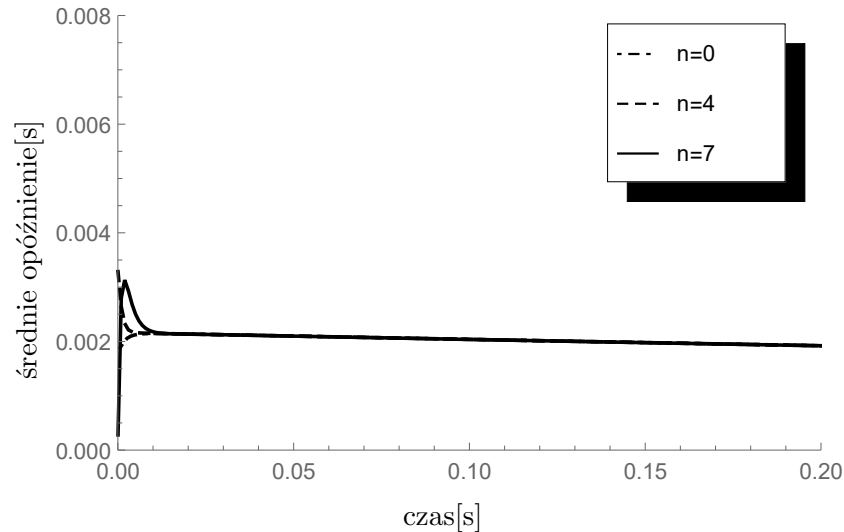
patrując kilka wybranych kwestii:

- w obecnych eksperymentach ponownie rozpatrujemy obciążenia systemu na poziomach  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$ , jednakże tym razem intensywności napływu i obsługi pakietów są relatywnie niższe względem przyjętych w poprzednich eksperymentach, co ma swoje przełożenie na nieco mniejsze prawdopodobieństwo występowania przepełnień bufora w przyjętej skali czasu;
- ponownie obserwujemy znaczącą korelację pomiędzy prawdopodobieństwem utraty pakietów a malejącą wartością średniego opóźnienia kolejkowania wraz z upływem czasu;
- ustalona intensywność obsługi pakietów ma przełożenie na maksymalną możliwą wartość średniego opóźnienia kolejkowania – w analizowanym przykładzie jest ona mało wrażliwa na zmieniające się intensywności napływu zgłoszeń (Rysunki 4.4, 4.5). Wyjątkiem jest Rysunek 4.6, w którym system startuje z przepełnionym buforem, tym samym bardziej intensywny napływ pakietów przekłada się na zwiększenie ilości traconych pakietów, zarazem wpływając na zaniżanie wartości średniego opóźnienia;
- tempo osiągnięcia przez system stanu równowagi (a tym samym stałej wartości średniego opóźnienia równej tej osiągniętej w stanie ustalonym) jest w analizowanym modelu słabo zależne od początkowej liczby zakumulowanych w buforze pakietów. Całość różnic pomiędzy rozkładami, ze względu na zmienność wartości  $n$ , koncentruje się w okresie do 0.1 sekundy czasu od momentu rozpoczęcia przetwarzania zgłoszeń przez system.

### 4.3.3 Badanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w złożonym Procesie Poissona

W celu jak najlepszego zrozumienia wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń na wartości średniego opóźnienia kolejkowania (4.3.1) w obecnym podrozdziale rozpatrzmy pięć eksperymentów charakteryzujących się zmienną wartością obciążenia systemu na poziomie  $\rho \in \{0.25; 0.5; 0.75; 1; 1.25\}$ . Do uzyskania wymienionych wartości obciążeń posłużymy się następującymi kombinacjami parametrów napływu i obsługi pakietów  $(\lambda, \mu) \in \{(300, 1200); (600, 1200); (600, 800); (600, 600); (600, 480)\}$ . Reszta parametrów pozostaje bez zmian: odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju trwa średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{0.4375; 0.875; 1.3125;$

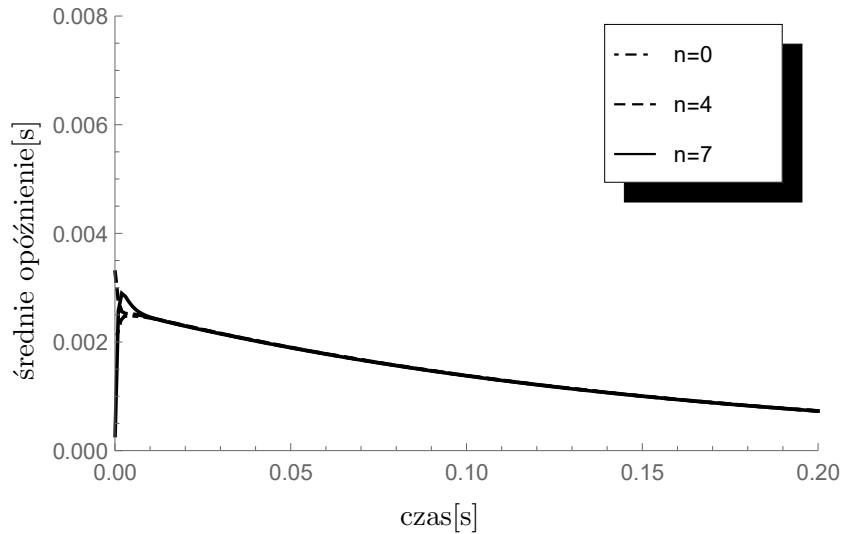
1.75; 2.1875} względem poszczególnych obciążeń systemu. Rysunki od 4.7 do 4.11 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.



Rysunek 4.7: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = n\}$  dla  $\lambda = 300$  pakietów/s oraz  $\mu = 1200$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 0.25$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 0.4375$ ).

Zaprezentowany zestaw wykresów umożliwia nam sformułowanie następujących wniosków:

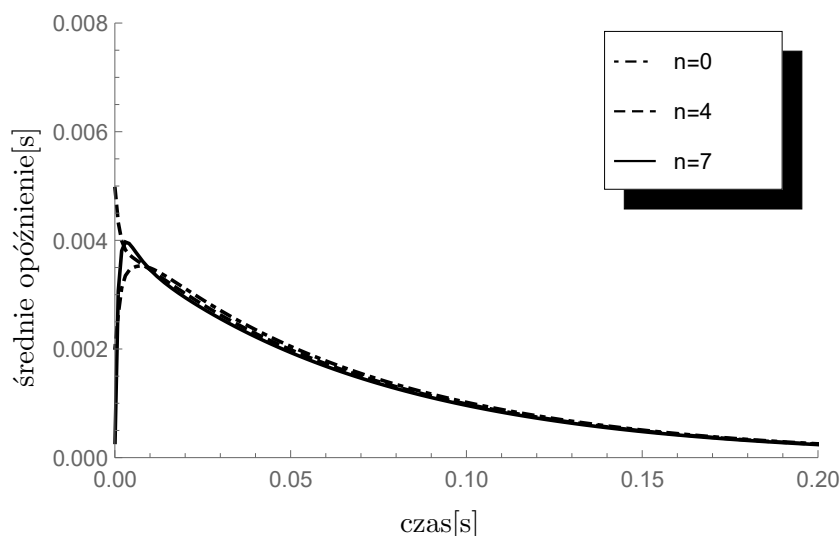
- zróżnicowanie wartości początkowej liczby zakolejkowanych w systemie pakietów ma zgodny z intuicją krótkotrwały wpływ na wartość średniego opóźnienia kolejkowania. Wpływ ten jest bardziej krótkotrwały w eksperymentach z mniejszym obciążeniem systemu (Rysunki 4.7 i 4.8), co jest naturalną konsekwencją wysokiego prawdopodobieństwa obsłużenia wszystkich zakolejkowanych zgłoszeń z jednoczesnym brakiem utraty kolejnych napływających zgłoszeń – niskie prawdopodobieństwo wystąpienia przepełnienia bufora ze względu na średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{0.4375; 0.875\}$  odpowiednio;
- wyniki zaprezentowane na Rysunku 4.7 pokazują bardzo szybkie osiągnięcie przez system stałej wartości średniego opóźnienia (równej tej osiągananej w stanie ustalonym), odzwierciedlając specyficznie uwarunkowany przypadek, w którym: obciążenie systemu  $\rho = 0.25$ , średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , a tym samym średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 0.4375$ , co wzięwszy pod uwagę pojemność systemu  $N = 7$  przekłada się na średnią akumulację ( $0.4375 \cdot 7 = 3.0625$ ) na poziomie



Rysunek 4.8: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = n\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s oraz  $\mu = 1200$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 0.5$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 0.875$ ).

trzech zgłoszeń (gdzie jedno jest aktualnie w trakcie obsługi). Średni czas obsługi pojedynczego pakietu wynosi  $\frac{1}{\mu} = 0.000833(3)$  s, przyjmując zatem, iż pakiet będący w obsłudze jest w przybliżeniu obsłużony średnio w 50%, wówczas łączny średni czas obsłużenia tych trzech zgłoszeń wynosi w przybliżeniu  $2.5 \cdot \frac{1}{\mu} = 0.0020833(3)$  s – a zatem średnio po takim czasie następuje obsługa pakietu wchodzącego do systemu w stanie stacjonarnym ( $t \rightarrow \infty$ ) i ma to swoje odzwierciedlenie na zaprezentowanym wykresie;

- ponownie obserwujemy, iż tempo osiągnięcia przez system wartości średniego opóźnienia bliskiej lub równej tej osiągniętej w stanie ustalonym jest słabo zależne od początkowej wartości zakumulowanych w buforze pakietów. Dla przypadków, w których system jest mocno obciążony wpływ różnej wartości początkowo zakolejkowanych pakietów zmienia kształt krzywej wartości średniego opóźnienia w okresie poprzedzającym osiągnięcie wartości zbliżonych do tej osiągniętej w stanie ustalonym.



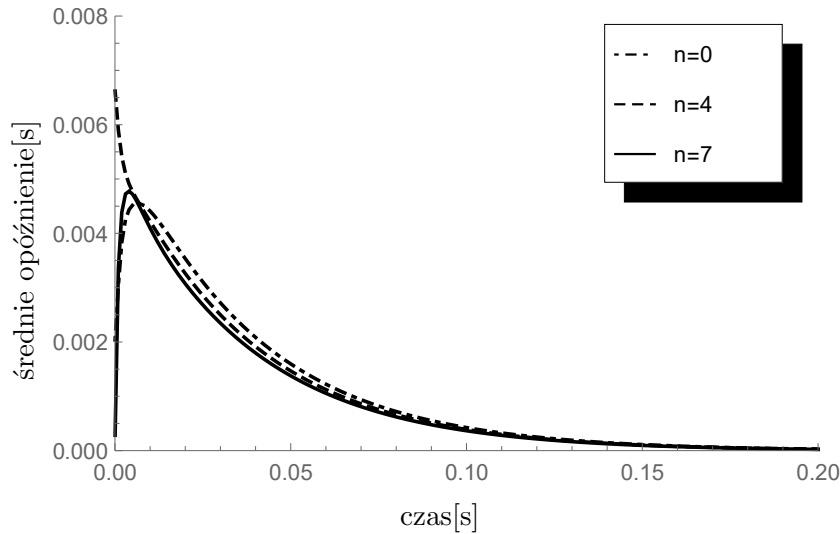
Rysunek 4.9: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = n\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s oraz  $\mu = 800$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 0.75$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 1.3125$ ).

#### 4.3.4 Badanie wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju w złożonym procesie Poissona

W ostatnich trzech eksperymentach dokonamy analizy wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju na wartości średniego opóźnienia kolejkowania (4.3.1) rozpatrując trzy scenariusze, w których parametr odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  przyjmuje wartości 500, 1000 oraz 1500 (co przekłada się na długości pojedynczego okresu przestoju  $t_p$  wynoszące odpowiednio 0.004, 0.002 i 0.0013(3) sekundy). Każdy z eksperymentów charakteryzuje się odmienną wartością obciążenia systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$ , a wartości te są rezultatem przyjęcia następujących kombinacji parametrów napływu i obsługi pakietów:  $(\lambda, \mu) \in \{(375, 500); (500, 500); (625, 500)\}$ . Reszta parametrów pozostaje bez zmian: średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych obciążeń systemu. Rysunki 4.12, 4.13 oraz 4.14 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.

Przyglądając się zaprezentowanemu zestawowi wykresów możemy wysunąć następujące wnioski:

- im krótszy jest okres przestoju (co jest równoważne zwiększaniu wartości parametru  $\lambda_v$ ), tym niższa jest wartość maksymalna średniego



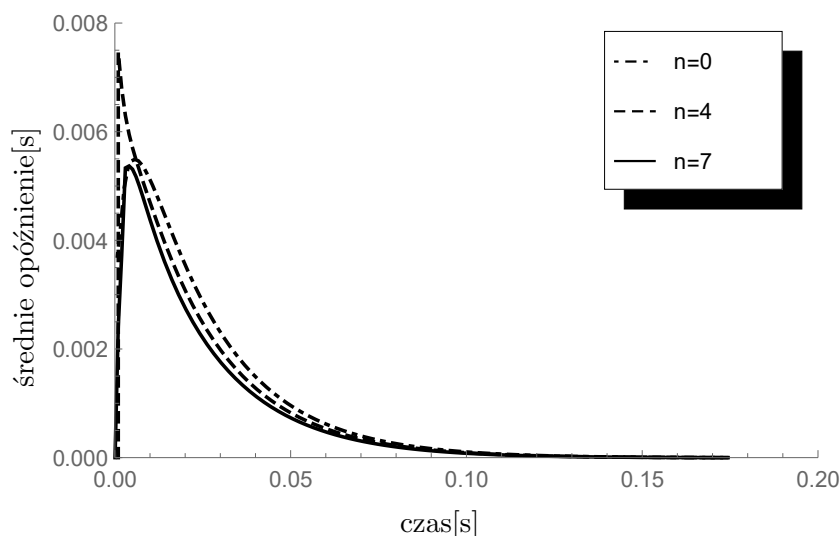
Rysunek 4.10: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = n\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s oraz  $\mu = 600$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 1.0$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 1.75$ ).

opóźnienia kolejkowania;

- krótszy okres przestoju w nieznacznym aczkolwiek obserwowalnym stopniu wpływa na zwiększenie wartości średniego opóźnienia kolejkowania w przedziale czasu następującym po osiągnięciu maksymalnej wartości opóźnienia. Dzieje się tak, ponieważ krótszy okres przestoju wiąże się ze zmniejszonym prawdopodobieństwem wystąpienia przepełnienia bufora (skutkującego zerowym opóźnieniem kolejkowania pakietu przybywającego do systemu w chwili wystąpienia przepełnienia).

#### 4.4 Podsumowanie rozdziału

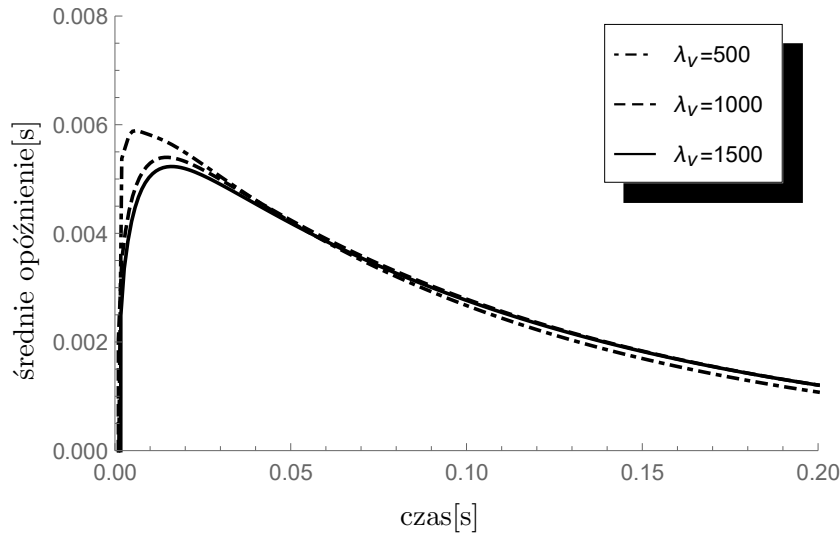
Dokonana w podrozdziale 4.3 analiza otrzymanych wartości opóźnienia kolejkowania w stanie nieustalonym dała nam możliwość wglądu w charakterystykę średniego czasu „spędzanego” w buforze przez pakiet napływający do systemu w chwili  $t$  w modelu kolejkowym z dyscypliną zawieszenia obsługi. Na wykresach uwidocznił się wpływ zmian wartości parametrów początkowych opisujących: intensywności napływu zgłoszeń i ich obsługi, początkowej liczby zakumulowanych w buforze pakietów, a także długości okresu przestoju. Umożliwiło to określenie stopnia przełożenia tychże parametrów na wartości średniego czasu oczekiwania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = n\}$ . Mo-



Rysunek 4.11: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = n\}$  dla  $\lambda = 600$  pakietów/s oraz  $\mu = 480$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 1.25$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 2.1875$ ).

zemy stwierdzić, iż wartość intensywności napływu pakietów  $\lambda$  wykazuje największy wpływ na kształt krzywej średniego opóźnienia. Pozostałe parametry uszeregowane według malejącej siły wpływu posiadają następującą kolejność: intensywność obsługi zgłoszeń  $\mu$ , odwrotność parametru skali rozkładu pojedynczego okresu przestoju  $\xi$ , zaś najmniejszy wpływ na kształt krzywej wywierają zmiany wartości początkowej liczby pakietów  $n$  obecnych w systemie. Wyprowadzone w rozprawie wzory stanowią swoiste uzupełnienie stanu wiedzy o rozkładzie opóźnienia kolejkowania w kontekście rozważanego w rozprawie typu modelu kolejkowego.

Przybliżmy pokrótce wybrane modele kolejkowe, dla których otrzymano wyniki dotyczące rozkładu prawdopodobieństwa opóźnienia kolejkowania. Artykuł [33] przedstawia model kolejkowy typu  $M/G/1$ , dla którego wyprowadzona została transformata Laplace'a opóźnienia kolejkowania w stanie ustalonym  $t \rightarrow \infty$ . Zaprezentowano także pewne rozszerzenie modelu bazowego zakładające, iż współczynnik intensywności napływu zgłoszeń zmienia się w czasie, oscylując wokół długoterminowej średniej  $\lambda$ . Ogólniejszy przypadek zawarto w pracy [68], gdzie rozważono model  $G^n I/G/1$  posiadający grupowy napływ pakietów. Wyprowadzony został wzór na potrójną transformatę Laplace'a opóźnienia kolejkowania zarówno w stanie nieustalonym jak i ustalonym. Kolejne prace nad rodziną modeli  $M/G/1$  podążają w kierunku specjalizacji bądź modyfikacji ich zachowania. W artykule [80]

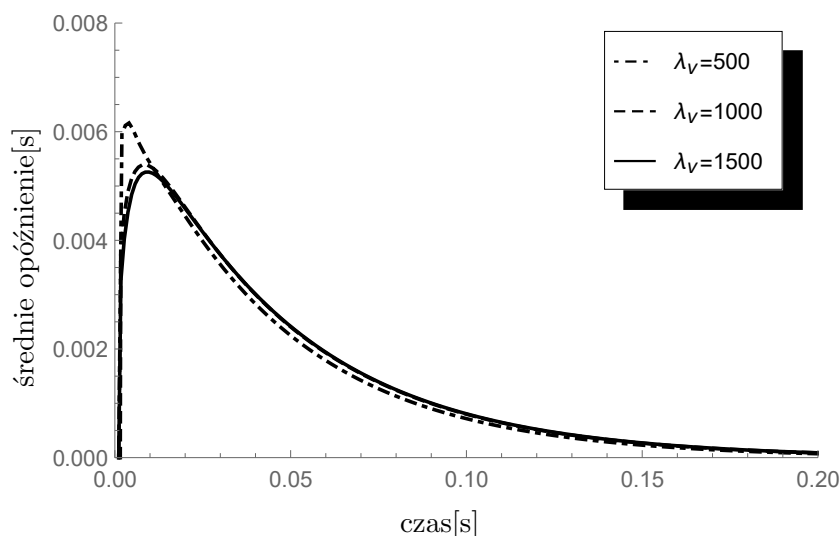


Rysunek 4.12: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 375$  pakietów/s oraz  $\mu = 500$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 0.75$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 1.3125$ ).

zaprezentowano model  $M/G/1/N$ , w którym za każdym razem, gdy system jest pusty, serwer obsługujący zgłoszenia jest wyłączany. Z chwilą przybycia pakietu przychodzącego do pustego systemu rozpoczyna się czas rozruchu i konfiguracji serwera (ang. *setup time*), który opisuje zmienna losowa o ogólnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Czas konfiguracji jest potrzebny, aby serwer osiągnął pełną zdolność do przetwarzania zadań, dlatego podczas konfiguracji proces obsługi zgłoszeń jest zawieszony. Kolejną modyfikację modelu  $M/G/1$  opisano w pracy [76], w której również rozpatrzono przypadek skończonej wielkości bufora (model  $M/G/1/N$ ). Tym razem założono, że serwer jest zawodny, tzn. po kolejnych bezawaryjnych okresach obsługi zgłoszeń opisanych zmiennymi losowymi wykładniczymi ze średnią  $\mu^{-1}$ , następują okresy napraw określone ogólną dystrybuantą. Zaimplementowany został również mechanizm sprzężenia zwrotnego Bernoulliego (ang. *Bernoulli feedback*). Każde zgłoszenie, niezależnie od pozostałych, po zakończeniu obsługi może ponownie dołączyć do kolejki z prawdopodobieństwem  $q \in [0, 1]$  bądź też definitywnie opuścić system z prawdopodobieństwem  $1 - q$ . Wynikiem końcowym prac [80] i [76] są wyprowadzone przez autorów wzory na transformaty Laplace'a opóźnienia kolejkowania w stanie nieustalonym  $t \in [0, \infty)$ .

Następne opracowania traktują o modelach zawierających mechanizm zawieszenia obsługi z pojedynczymi bądź wielokrotnymi okresami przestoju

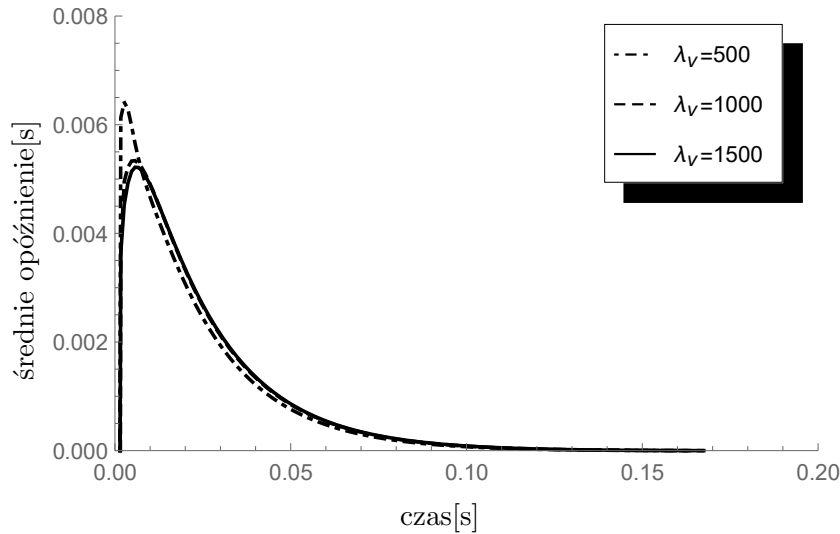




Rysunek 4.13: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 500$  pakietów/s oraz  $\mu = 500$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 1.0$ , średnie zapelnienie systemu  $\kappa_b = 1.75$ ).

składającymi się na okres bezczynności serwera. W [72] zaprezentowano model  $M/G/1/N$ , w którym każdorazowo gdy serwer obsługujący zgłoszenia opróżni bufor kolejkujący, następuje pojedynczy okres przestoju (o rozkładzie zadanym ogólną dystrybuantą). Po upływie tego okresu serwer natychmiast przełącza się w tryb obsługi zgłoszeń. Wyprowadzona w stanie nieustalonym podwójna transformata Laplace'a stanowi podstawę do wyliczenia jej odpowiednika dla stanu ustalonego oraz wzoru na średnie opóźnienie kolejkowania. Ogólniejszy pod względem zawieszania obsługi w modelu typu  $M/G/1/N$  przypadek, obejmujący wielokrotne okresy przestoju, został opisany w [153]. Oprócz wirtualnego czasu oczekiwania na obsługę wyznaczony został także średni czas oczekiwania. W pracy [113] przedstawiono model  $MAP/G/1$  z Markowskim procesem napływu zgłoszeń (ang. *Markovian Arrival Process (MAP)*) i wielokrotnymi okresami przestoju. Artykuł [126] opisuje uszczegółowioną względem poprzedniej pracy wersję modelu z ograniczoną pojemnością bufora (zatem jest to model typu  $MAP/G/1/N$ ) i zawierającego okresy: rozruchu, bezczynności i wygaszania obsługi. Okresy te zostały zdefiniowane w następujący sposób:

- okres rozruchu – okres następujący po ostatnim pojedynczym bądź ostatnim z wielu, składających się na okres bezczynności, okresie przestoju w obsłudze;



Rysunek 4.14: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość średniego opóźnienia kolejkowania  $\mathbf{E}\{v(t) | Y(0) = 0\}$  dla  $\lambda = 625$  pakietów/s oraz  $\mu = 500$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 1.25$ , średnie zapelnienie systemu  $\kappa_b = 2.1875$ ).

- okres beczynności – okres składający się z pojedynczych bądź wielokrotnych okresów przestoju, które to mają rozkład zgodny z zadaną dystrybuantą;
- okres wygaszania – okres w którym następuje przechodzenie systemu w stan zawieszenia obsługi zgłoszeń.

Wyprowadzone w artykułach [153], [113] i [126] transformaty Laplace'a dotyczą jedynie stanu ustalonego. W pracy [144] rozważany jest model kolejkowy typu  $M^K/G/1$  z grupowym wpływem zgłoszeń, okresem beczynności serwera składającym się z pojedynczego bądź wielu okresów przestoju. W modelu tym przyjęto ogólny typ rozkładu prawdopodobieństwa czasu obsługi pojedynczego zgłoszenia, jednakże czas trwania pojedynczego okresu obsługi (okresu zajętości systemu, w którym zgłoszenia są obsługiwane w sposób nieprzerwany) jest ograniczony przez nielosową wartość  $T$ . Uzyskane wyniki dotyczą wirtualnego czasu oczekiwania zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym systemu. Rozważono dwa przypadki zakończenia pojedynczego okresu nieprzerwanej obsługi, w rezultacie czego otrzymano dwa odrębne modele:

- w chwili  $T$ , oznaczającej konieczność zakończenia okresu obsługi serwer jest zobligowany dokończyć obsługę zgłoszenia będącego w trakcie obsługiwanego i następnie przechodzi w okres zawieszenia obsługi;

- w chwili  $T$ , oznaczającej konieczność zakończenia okresu obsługi, serwer natychmiast kończy obsługę zgłoszeń i przechodzi w okres zawieszenia obsługi.

Artykuł [167] prezentuje modelowanie przybliżonego, zależnego od czasu zachowania wirtualnego czasu oczekiwania na obsługę w systemach postaci  $M(t)/G/c$ . Kluczowym elementem tych badań jest wyprowadzenie dokładnych (algorytmicznych) wyrażeń dla zachowania wirtualnego czasu oczekiwania. W pracy opracowuje się i testuje przybliżenia statystyczne dla rozkładów wartości wirtualnych czasów oczekiwania w zdyskretyzowanych stanach niestacjonarnych. Wyniki z modeli są porównywane z wynikami uzyskanymi za pomocą: prostej aproksymacji stacjonarnej (ang. *Simple Stationary Approximation*, algorytm opisany m. in. w [10]), punktowej aproksymacji stacjonarnej (ang. *Pointwise Stationary Approximation*, algorytm zaprezentowany m. in. w [48]) oraz aproksymacji bazującej na modyfikowaniu obciążenia (ang. *Modified Offered Load Approximation* przedstawiony w [119]). Z kolei w [55] rozważono system kolejkowania typu  $DAR(1)/D/1$ , gdzie  $DAR$  (ang. *discrete autoregressive process*) jest procesem Markowa z geometrycznie zanikającą funkcją autokorelacji, która wykazuje ogólny rozkład. W przeprowadzonej analizie dla stanu ustalonego pokazano, iż podejście autorów zapewnia algorytm numeryczny do obliczania dyskretnych rozkładów czasu oczekiwania w oparciu o teorię kolejek  $GI/G/1$ , dzięki czemu zbadany został wpływ parametrów  $DAR$  na wirtualny rozkład czasu oczekiwania.

Kolejne przytoczone publikacje prezentują większą różnorodność metod użytych w badaniach nad zróżnicowanymi modelami kolejkowymi, dla których bazą są modele  $G/G/1$ . W artykule [66] wyznaczono transformaty całkowite funkcjonalów dwugranicznych (ang. *integral transforms of two-boundary functionals*) dla różnicy złożonego procesu Poissona i złożonego procesu odnowy. Otrzymane wyniki wykorzystano do badania systemu  $G^\delta/M^\alpha/1/B$  i wyprowadzono rozkłady wybranych cech systemu kolejkowego, m. in. wirtualnego czasu oczekiwania, zarówno w stanie nieustalonym jak i ustalonym. W pracy [92] rozpatrzono model kolejkowy  $M/G/1/\infty$  z zawodnym serwerem (doświadczającym awarii), wyznaczając rozkłady wirtualnego czasu oczekiwania zarówno w stanie nieustalonym jak i ustalonym. Rozważono także kilka uogólnień podstawowego modelu: model z grupowym napływem pakietów, model z niejednorodnymi strumieniami zgłoszeń, model z  $k$  rodzajami zgłoszeń oraz model z  $k$  rodzajami zgłoszeń priorytetowych. Następnym przykładem uszczegółowienia modelu  $G/G/1$  jest publikacja [118]. Zaprezentowano w niej model  $G/GI/N + GI$  z  $N$  początkowymi stanowiskami obsługi, których liczba zwiększa się w miarę upływu czasu, oraz zdarzającymi się w określonych warunkach porzuceniami zgłoszeń. Przedstawione w pracy wyniki dla długości kolejki, jak i wirtualnego czasu oczekiwania, uzyskano wykorzystując metodę aproksymacji dyfuzyjnej.

Część wyników zaprezentowanych w niniejszym rozdziale, obejmujących

zwarte postacie transformat Laplace'a rozkładu warunkowego opóźnienia kolejkowania oraz przykłady wykonanych numerycznych obliczeń, opublikowano w następujących artykułach:

- [75] – w artykule opisano wyniki osiągnięte dla prostego procesu Poissona (podrozdział 4.1);
- [83] – w pracy przedstawiono model typu  $M^X/G/1/N$ , dla którego wyznaczono transformatę Laplace'a warunkowego opóźnienia kolejkowania przy założeniu, iż każdy okres zawieszenia obsługi składa się z kolejnych okresów przestoju, każdy o takiej samej ustalonej długości.

Kończąc rozdział prezentujący analizę otrzymanych wartości opóźnienia kolejkowania w stanie tranzytywnym warto również wspomnieć, iż postać uzyskanych transformat Laplace'a umożliwia w prosty sposób otrzymanie wyniku także w stanie stacjonarnym. Korzystając z Twierdzenia 1.6 wobec wyznaczonej w (4.3.1) transformaty Laplace'a wartości oczekiwanej opóźnienia, możemy obliczyć wartość średnią opóźnienia kolejkowania w stanie ustalonym:

$$\begin{aligned}
 Ev &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}^X \{v(t) | Y(0) = n\} = \lim_{s \downarrow 0} s \cdot \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \mathbf{E}^X \{v(t) | Y(0) = n\} dt \\
 &= - \lim_{s \downarrow 0} \left( s \cdot \frac{\partial}{\partial z} [z \cdot \widehat{V}_n^X(s, z)] \Big|_{z=0} \right). \tag{4.4.1}
 \end{aligned}$$

W stanie stacjonarnym wartość średniego opóźnienia (4.4.1) oczywiście nie zależy od początkowego stanu bufora. Analiza stanu stacjonarnego nie była zasadniczym celem rozprawy, wobec czego ograniczono się do prezentacji wyników w stanie niestacjonarnym.

# Rozdział 5

## Analiza procesu liczącego obsłużone zgłoszenia

Ostatnią rozważaną charakterystyką kolejkowania badanego w niniejszej rozprawie modelu jest proces liczący obsłużone zgłoszenia (ang. *departure (counting) process*). Ścisłej ujmując, zajmiemy się rozkładem liczby zgłoszeń obsłużonych od startu systemu do ustalonej chwili  $t$ . Wzorem poprzednich rozdziałów rozpoczniemy od wyprowadzenia w zwartej postaci wzorów (sformułujemy je w postaci odpowiednich twierdzeń) dla prostego procesu Poissona (podrozdział 5.1) oraz ogólniejszego przypadku, jakim jest grupowy napływ zgłoszeń opisany złożonym procesem Poissona (podrozdział 5.2). Uzyskane i zapisane w formie twierdzeń podwójne transformaty „mieszane” rozkładu liczby obsłużonych zgłoszeń posłużą nam do wyznaczenia wartości średniej tej charakterystyki uwarunkowanej liczbą początkowo zgromadzonych w buforze zgłoszeń. W kolejnym etapie (podrozdział 5.3) porównamy i zobrazujemy na wykresach wyniki obliczeń numerycznych. Dokonane zostanie także zestawienie obliczeń numerycznych ze statystykami zebranymi w trakcie badań symulacyjnych uzyskanych na próbie dziesięciu tysięcy powtórzeń startu procesu kolejkowania pakietów w systemie z włączoną cykliczną rejestracją ilości obsłużonych pakietów (rejestracja dokonywana jest w przyjętych dyskretnych chwilach czasu). Na koniec (podrozdział 5.4) omówimy otrzymane wyniki i zestawimy je z krótką notą bibliograficzną przedstawiającą dotychczasowe prace poruszające tematykę wyznaczania charakterystyk procesu liczącego zgłoszenia w grupie modeli kolejkowych typu  $G/G/1$ .

### 5.1 Prosty proces Poissona

W badanym modelu kolejkowym typu  $M/G/1/N$  zgłoszenia napływają do systemu zgodnie z prostym procesem Poissona o intensywności  $\lambda$ . Obsługa zgłoszeń jest określona dyscypliną FIFO i zgodna z rozkładem zadany dystrybuantą  $F(\cdot)$ . Pojemność modelu to  $N$  zgłoszeń – jedno może być obsługiwane, a maksymalnie  $N - 1$  zakumulowanych w buforze. Okres zawieszenia

przez serwer obsługi złożony jest z wielu pojedynczych okresów przestoju, których długość trwania jest zgodna z rozkładem zadany dystrybuantą  $G(\cdot)$ . Zawieszenie obsługi rozpoczyna się każdorazowo, gdy ostatnie zgłoszenie zostanie obsłużone i w buforze brakuje zgłoszeń oczekujących.

Kolejny raz oznaczymy symbolem  $X(t)$  liczbę zgłoszeń obecnych w systemie w chwili  $t$ . Niech  $h(t)$  wyraża liczbę zgłoszeń obsłużonych przez system do chwili  $t$ . Przyjmijmy następujące oznaczenie dla rozkładu warunkowego liczby zgłoszeń obsłużonych w okresie od  $t = 0$  do chwili  $t > 0$ , gdzie warunkiem jest liczba zgłoszeń znajdujących się w buforze w początkowej chwili:

$$H_n(t, m) = \mathbf{P}\{h(t) = m \mid X(0) = n\}, \quad t > 0, 0 \leq n \leq N. \quad (5.1.1)$$

Zakładając, iż w momencie rozpoczęcia obsługi zgłoszeń ( $t = 0$ ) system jest pusty ( $n = 0$ ), wówczas rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi. Wykorzystując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym ([30] podrozdział 5.4) wyprowadzamy następujące równanie:

$$\begin{aligned} H_0(t, m) = & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \left[ \int_{v=y-u}^{t-u} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{[\lambda(u+v-y)]^k}{k!} \right. \right. \\ & \times e^{-\lambda(u+v-y)} H_{k+1}(t-u-v, m) + H_N(t-u-v, m) \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{[\lambda(u+v-y)]^k}{k!} \\ & \left. \left. \times e^{-\lambda(u+v-y)} \right\} dG(v) + \delta_{m,0} \bar{G}(t-u) \right] + \delta_{m,0} e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

gdzie  $\delta_{i,j}$ ,  $\bar{G}(\cdot)$ ,  $G^{i*}(\cdot)$  zostały określone w Definicjach 1.1, 1.3 i 1.4 odpowiednio.

Prawa strona wzoru (5.1.2) jest złożona z sumy czterech składników. Pierwszy element sumy odpowiada sytuacji, w której okres zawieszenia przez serwer obsługi kończy się przed chwilą  $t$ , a w chwili jego zakończenia w buforze zakumulowanych zgłoszeń jest mniej niż wynosi jego pojemność – wówczas obsługa zgłoszeń rozpoczyna się po zakończeniu ostatniego okresu przestoju o długości  $v$  (w momencie  $u + v < t$ ). Drugi składnik reprezentuje stan całkowitego zapelnienia bufora w momencie zakończenia okresu zawieszenia obsługi, kończącego się również przed chwilą  $t$ . Z racji tego, iż zapelnienie bufora skutkuje utratą niemieszczących się w systemie zgłoszeń, w momencie  $u + v < t$  serwer rozpoczyna obsługę z dokładnie  $N$  zgłoszeniami zakumulowanymi w systemie. Trzeci składnik sumy opisuje przypadek, w którym pierwsze zgłoszenie pojawia się w systemie przed chwilą  $t$ , jednak okres przestoju kończy się po chwili  $t$  (w momencie  $u + v > t$ ) – co tłumaczy wykorzystanie ogonu dystrybuanty  $\bar{G}(\cdot)$  w obliczeniach. Ostatni element sumy odpowiada sytuacji, w której pierwsze zgłoszenie napływa do serwera po chwili  $t$ .

Ponownie wykorzystamy fakt, że momenty przechodzenia w stan zawieszenia obsługi zgłoszeń w modelach kolejkowych typu  $M/G/1$ , są momentami Markowa [61] z uwagi na własność „braku pamięci” procesu poissonowskiego. Założmy, że w systemie w chwili rozpoczęcia obsługi znajduje się dokładnie  $X(0) = n$  zgłoszeń, przy czym  $1 \leq n \leq N$ . Wówczas zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym względem pierwszej chwili ukończenia obsługi pozwala nam wyprowadzić następujący układ równań całkowych:

$$H_n(t, m) = I\{m \geq 1\} \int_{y=0}^t \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} H_{n+k-1}(t-y, m-1) + H_{N-1}(t-y, m-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} \right] dF(y) + \delta_{m,0} \bar{F}(t), \quad (5.1.3)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ , natomiast  $I\{\cdot\}$  jest funkcją indykatorową wprowadzoną w Definicji 1.2.

Omówmy pokrótce prawą stronę układu (5.1.3). Pierwszy element sumy odzwierciedla przypadek, w którym pierwsza chwila zakończenia obsługi  $y$  następuje przed czasem  $t$  przy jednoczesnym założeniu braku wystąpienia całkowitego zapełnienia bufora (a zatem liczba pakietów przybyłych do chwili  $y$  nie może być większa niż  $N - n - 1$ ). Drugi element sumy zakłada sytuację wystąpienia całkowitego zapełnienia bufora przed momentem  $y$ , a fakt ten odzwierciedla dolna granica sumowania zakładająca nadejście co najmniej  $N - n$  zgłoszeń. Obydwa elementy sumy posiadają wspólną cechę - ich obliczanie ma sens tylko przy założeniu  $m \geq 1$ , tzn. gdy zakładana liczba obsłużonych do chwili  $t$  zgłoszeń jest niezerowa. Ostatni element sumy odpowiada zdarzeniu, gdy pierwsze ukończenie obsługi zgłoszeń  $y$  następuje po czasie  $t$ .

Wprowadźmy następujące oznaczenie dla transformaty Laplace’a układu liczby obsłużonych zgłoszeń:

$$\hat{h}_n(s, m) = \int_0^{\infty} e^{-st} H_n(t, m) dt, \quad \text{Re}(s) > 0, n \geq 0. \quad (5.1.4)$$

Wyznaczenie układu równań dla transformat Laplace’a ze wzorów (5.1.2) i (5.1.3) ponownie podzielimy na etapy, których liczba zdeterminowana jest przez ilości składników w obydwu rozważanych sumach (cztery składniki w (5.1.2) i trzy składniki w (5.1.3)).

Transformata Laplace’a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.1.2) ma postać

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t dy \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} (u+v-y)^k \times H_{k+1}(t-u-v, m) dG(v) =$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=u}^t dy \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} (u+v-y)^k \\
 & \times H_{k+1}(t-u-v, m) dG(v) = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{t=y}^{\infty} e^{-st} dt \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} (u+v-y)^k \\
 & \times H_{k+1}(t-u-v, m) dG(v) = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-\lambda v} (u+v-y)^k dG(v) \\
 & \times \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-st} H_{k+1}(t-u-v, m) dt = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} (u+v-y)^k dG(v) \\
 & \times \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} H_{k+1}(t-u-v, m) dt \tag{5.1.5}
 \end{aligned}$$

Dokonujemy podstawienia  $\underline{t} = t - u - v$ , a dla uproszczenia zapisu jednocześnie przyjmujemy notację nowych zmiennych pozbawioną podkreśleń. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} (u+v-y)^k dG(v) \\
 & \times \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} H_{k+1}(t, m) dt = \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{y=u}^{u+v} (u+v-y)^k dy \\
 & \times \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} H_{k+1}(t, m) dt \tag{5.1.6}
 \end{aligned}$$

Uwzględniając Definicję 1.6 w połączeniu z (2.1.9) oraz wyliczoną w (2.1.6) całką, przy jednoczesnym zastosowaniu oznaczenia (5.1.4), równanie (5.1.6) przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
 & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=0}^{N-2} \hat{h}_{k+1}(s, m) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} dG(v) = \\
 & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}_{k+1}(s, m) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^k}{k!} dG(v). \tag{5.1.7}
 \end{aligned}$$

Definiując

$$b_j(s) \stackrel{def}{=} (1 - g(\lambda + s))^{-1} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^j}{j!} dG(v), \tag{5.1.8}$$



otrzymujemy ostateczną postać pierwszego składnika całkowego

$$\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{h}_{k+1}(s, m) b_k(s). \quad (5.1.9)$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.1.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t dy \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} (u+v-y)^k \\ & \times H_N(t-u-v, m) dG(v) \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Składnik ten różni się od poprzedniego jedynie indeksami sumy  $\sum_{k=N-1}^{\infty}$  oraz elementem  $H_N$ , tym samym stosując analogiczne jak dla składnika pierwszego przekształcenia otrzymamy następującą postać ostateczną:

$$\begin{aligned} & (1 - g(\lambda + s))^{-1} \sum_{k=N-1}^{\infty} \widehat{h}_N(s, m) \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{k+1}}{(k+1)!} dG(v) = \\ & \widehat{h}_N(s, m) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s). \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Transformata Laplace'a trzeciego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.1.2) wygląda następująco

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t \delta_{m,0} \overline{G}(t-u) dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ & \delta_{m,0} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} \overline{G}(t-u) dt \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Uwzględnivszy obliczoną w (2.2.18) całkę, (5.1.12) przyjmie formę:

$$\begin{aligned} & \delta_{m,0} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} e^{-st} \overline{G}(t-u) (e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}) dt = \\ & \delta_{m,0} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{t=u}^{\infty} (e^{-s(t-u)} - e^{-(\lambda+s)(t-u)}) \overline{G}(t-u) dt \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

W kolejnych krokach, stosując podstawienia  $\underline{t} = t - u$ , obliczamy następu-

jące całki:

$$\begin{aligned}
 \int_{t=u}^{\infty} e^{-s(t-u)} \bar{G}(t-u) dt &= \int_{\underline{t}=0}^{\infty} e^{-s\underline{t}} \bar{G}(\underline{t}) d\underline{t} = \int_{\underline{t}=0}^{\infty} e^{-s\underline{t}} (1 - G(\underline{t})) d\underline{t} = \\
 &= \frac{e^{-s\underline{t}}}{-s} \Big|_{\underline{t}=0}^{\underline{t} \rightarrow \infty} - \int_{\underline{t}=0}^{\infty} e^{-s\underline{t}} G(\underline{t}) d\underline{t} = \frac{1}{s} - \left[ -\frac{1}{s} e^{-s\underline{t}} G(\underline{t}) \Big|_{\underline{t}=0}^{\underline{t} \rightarrow \infty} + \frac{1}{s} \int_{\underline{t}=0}^{\infty} e^{-s\underline{t}} dG(\underline{t}) \right] \\
 &= \frac{1}{s} - \left[ 0 + \frac{G(0)}{s} + \frac{g(s)}{s} \right] = \frac{1 - g(s)}{s}
 \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t=u}^{\infty} e^{-(\lambda+s)(t-u)} \bar{G}(t-u) dt &= \int_{\underline{t}=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)\underline{t}} \bar{G}(\underline{t}) d\underline{t} = \int_{\underline{t}=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)\underline{t}} (1 - G(\underline{t})) d\underline{t} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+s)\underline{t}}}{-(\lambda+s)} \Big|_{\underline{t}=0}^{\underline{t} \rightarrow \infty} - \left[ -\frac{1}{\lambda+s} e^{-(\lambda+s)\underline{t}} G(\underline{t}) \Big|_{\underline{t}=0}^{\underline{t} \rightarrow \infty} + \frac{1}{\lambda+s} \int_{\underline{t}=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)\underline{t}} dG(\underline{t}) \right] \\
 &= \frac{1}{\lambda+s} - \left[ 0 + \frac{G(0)}{\lambda+s} + \frac{g(\lambda+s)}{\lambda+s} \right] = \frac{1 - g(\lambda+s)}{\lambda+s}
 \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

W obliczonych całkach wykorzystaliśmy oznaczenie wprowadzone w Definicji 1.6, a także fakt, że  $G(\cdot)$  jest dystrybuantą nieujemnej zmiennej losowej, zatem  $G(0) = 0$ . Ostatecznie, uwzględniając zależność (2.1.9) w (5.1.13), otrzymujemy ostateczną postać składnika:

$$\begin{aligned}
 \delta_{m,0} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \left[ \frac{1 - g(s)}{s} - \frac{1 - g(\lambda+s)}{\lambda+s} \right] &= \\
 \frac{\delta_{m,0}}{1 - g(\lambda+s)} \left[ \frac{1 - g(s)}{s} - \frac{1 - g(\lambda+s)}{\lambda+s} \right] &
 \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

Transformata Laplace'a czwartego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.1.2) ma postać

$$\int_{t=0}^{\infty} \delta_{m,0} e^{-(\lambda+s)t} dt = \delta_{m,0} \frac{e^{-(\lambda+s)t}}{-(\lambda+s)} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{\delta_{m,0}}{\lambda+s} \tag{5.1.17}$$

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.1.3) ma postać

$$\begin{aligned}
 I\{m \geq 1\} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} H_{n+k-1}(t-y, m-1) dF(y) = \\
 I\{m \geq 1\} & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} e^{-st} H_{n+k-1}(t-y, m-1) dt = \\
 I\{m \geq 1\} & \times \\
 & \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} e^{-s(t-y)} H_{n+k-1}(t-y, m-1) dt
 \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

Następnie w równaniu (5.1.18) dokonamy podstawienia  $\underline{t} = t - y$ . Dla uproszczenia zapisu przyjmiemy notację nowych zmiennych niezawierającą podkreśleń. Otrzymujemy

$$I\{m \geq 1\} \sum_{k=0}^{N-n-1} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} dF(y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} H_{n+k-1}(t, m-1) dt \tag{5.1.19}$$

Definiując

$$a_j(s) \stackrel{def}{=} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \tag{5.1.20}$$

wraz z jednoczesnym zastosowaniem wprowadzonego oznaczenia transformaty Laplace'a (5.1.4) otrzymujemy ostateczną postać składnika:

$$I\{m \geq 1\} \sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \hat{h}_{n+k-1}(s, m-1) \tag{5.1.21}$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.1.3) ma postać

$$I\{m \geq 1\} \sum_{k=N-n}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} H_{N-1}(t-y, m-1) dF(y) \tag{5.1.22}$$

Składnik ten różni się od poprzedniego jedynie indeksami sumy  $\sum_{k=N-n}^{\infty}$  oraz elementem  $H_{N-1}$ , tym samym stosując analogiczne przekształcenia jak dla pierwszego składnika wzoru (5.1.3) otrzymamy następującą postać

ostateczną:

$$I\{m \geq 1\} \sum_{k=N-n}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} dF(y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} H_{N-1}(t, m-1) dt =$$

$$I\{m \geq 1\} \hat{h}_{N-1}(s, m-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s) \quad (5.1.23)$$

W ostatnim składniku całkowym po prawej stronie wzoru (5.1.3) ponownie skorzystamy z Definicji 1.6 oraz z faktu, że  $F(0) = 0$ , otrzymując:

$$\delta_{m,0} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dt = \delta_{m,0} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} (1 - F(t)) dt = \delta_{m,0} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \right.$$

$$\left. \left( - \frac{e^{-st}}{-s} F(t) \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} + \frac{1}{s} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dF(t) \right) \right] = \delta_{m,0} \left[ \frac{1}{s} - \frac{f(s)}{s} \right] = \delta_{m,0} \frac{1 - f(s)}{s} \quad (5.1.24)$$

W celu uproszczenia notacji oznaczymy składnik trzeci wzoru (5.1.2) w następujący sposób:

$$d(s, m) \stackrel{def}{=} \frac{\delta_{m,0}}{1 - g(\lambda + s)} \left[ \frac{1 - g(s)}{s} - \frac{1 - g(\lambda + s)}{\lambda + s} \right]. \quad (5.1.25)$$

W konsekwencji wyznaczony układ równań dla transformat Laplace'a otrzymany ze wzorów (5.1.2) i (5.1.3) przyjmie następującą postać:

$$\hat{h}_0(s, m) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) \hat{h}_k(s, m) + \hat{h}_N(s, m) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s} \quad (5.1.26)$$

$$\hat{h}_n(s, m) = I\{m \geq 1\} \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \hat{h}_{n+k-1}(s, m-1) + \right.$$

$$\left. \hat{h}_{N-1}(s, m-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s) \right] + \delta_{m,0} \frac{1 - f(s)}{s} \quad (5.1.27)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ .

Aby uniknąć niedogodności powodowanych przez funkcje indykatorowe  $I\{\cdot\}$ , wprowadźmy następującą funkcję tworzącą prawdopodobieństwa (zastosowanie funkcji tworzących jest często spotykane w analizie charakterystyk stochastycznych modeli kolejkowych, przykładem są np. prace [166], [121], [71], [24]):

$$\tilde{h}_n(s, z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \hat{h}_n(s, m), \quad 0 \leq n \leq N, |z| < 1. \quad (5.1.28)$$

Ponadto zdefiniujmy także następujące funkcje:

$$\tilde{a}_j(s, z) \stackrel{def}{=} z a_j(s), \quad (5.1.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma(s, z) &\stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left( \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s} + d(s, m) \right) = \frac{1}{\lambda + s} + \frac{1}{1 - g(\lambda + s)} \\ &\times \left[ \frac{1 - g(s)}{s} - \frac{1 - g(\lambda + s)}{\lambda + s} \right] = \frac{1 - g(s)}{s[1 - g(\lambda + s)]}. \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

Układ równań (5.1.26) i (5.1.27) otrzyma teraz nową postać

$$\tilde{h}_0(s, z) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) \tilde{h}_k(s, z) + \tilde{h}_N(s, z) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s) + \gamma(s, z), \quad (5.1.31)$$

$$\tilde{h}_n(s, z) = \sum_{k=0}^{N-n-1} \tilde{a}_k(s, z) \tilde{h}_{n+k-1}(s, z) + \tilde{h}_{N-1}(s, z) \sum_{k=N-n}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) + \frac{1 - f(s)}{s}, \quad (5.1.32)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ .

W wyznaczonym układzie równań dla transformat Laplace'a (5.1.31) i (5.1.32) dokonujemy podstawienia

$$\tilde{u}_n(s, z) = \tilde{h}_{N-n}(s, z) \quad (5.1.33)$$

otrzymując

$$\tilde{u}_N(s, z) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) \tilde{u}_{N-k}(s, z) + \tilde{u}_0(s, z) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s) + \gamma(s, z), \quad (5.1.34)$$

$$\tilde{u}_n(s, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{a}_k(s, z) \tilde{u}_{n-k+1}(s, z) + \tilde{u}_1(s, z) \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) + \frac{1 - f(s)}{s} \quad (5.1.35)$$

gdzie  $0 \leq n \leq N - 1$ .

W kolejnym kroku skupimy się na równaniu (5.1.35) wykonując następujące jego przekształcenia

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(s, z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{a}_k(s, z) \tilde{u}_{n-k+1}(s, z) + \tilde{u}_1(s, z) \tilde{a}_n(s, z) + \tilde{u}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) \\ &+ \frac{1 - f(s)}{s} \\ \tilde{u}_n(s, z) &= \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k(s, z) \tilde{u}_{n-k+1}(s, z) + \tilde{u}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) + \frac{1 - f(s)}{s} \\ \tilde{u}_n(s, z) &= \sum_{k=0}^{n+1} \tilde{a}_k(s, z) \tilde{u}_{n-k+1}(s, z) - \tilde{u}_0(s, z) \tilde{a}_{n+1}(s, z) + \tilde{u}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) \\ &+ \frac{1 - f(s)}{s} \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

Następnie w pierwszej sumie znajdującej się po prawej stronie równania (5.1.36) dokonujemy podstawienia  $\underline{k} = k - 1$ . Dla uproszczenia zapisu zrezygnujemy z podkreśleń w zapisie nowej zmiennej. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(s, z) &= \sum_{k=-1}^n \tilde{a}_{k+1}(s, z)\tilde{u}_{n-k}(s, z) - \tilde{u}_0(s, z)\tilde{a}_{n+1}(s, z) + \tilde{u}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) \\ &+ \frac{1-f(s)}{s} \\ \sum_{k=-1}^n \tilde{a}_{k+1}(s, z)\tilde{u}_{n-k}(s, z) - \tilde{u}_n(s, z) &= \tilde{a}_{n+1}(s, z)\tilde{u}_0(s, z) - \tilde{u}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) \\ - \frac{1-f(s)}{s} & \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

Definiując

$$\psi_n(s, z) \stackrel{def}{=} \tilde{a}_{n+1}(s, z)\tilde{u}_0(s, z) - \tilde{u}_1(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) - \frac{1-f(s)}{s}, \quad (5.1.38)$$

równanie (5.1.37) sprowadzimy do postaci

$$\psi_n(s, z) = \sum_{k=-1}^n \tilde{a}_{k+1}(s, z)\tilde{u}_{n-k}(s, z) - \tilde{u}_n(s, z), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (5.1.39)$$

Wykonane przekształcenia umożliwiają nam zastosowanie Twierdzenia 1.4. Dla określonych w (5.1.29) i (5.1.39) ciągów  $(\tilde{a}_n)$  oraz  $(\psi_n)$  możemy wyrazić  $n$ -ty wyraz ciągu  $\tilde{u}_n$  w sposób rekurencyjny za pomocą wyrazów ciągu  $(R_n)$  określonego z kolei za pomocą ciągu  $(\tilde{a}_n)$ . Otrzymujemy wówczas:

$$\tilde{u}_n(s, z) = C(s, z)R_{n+1}(s, z) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z)\psi_k(s, z), \quad n \geq 0. \quad (5.1.40)$$

W kolejnych krokach wyprowadzimy formuły dla funkcji  $\tilde{u}_0(s, z)$ ,  $\tilde{u}_1(s, z)$  występujących w definicji (5.1.38), a także zapiszemy w postaci jawnej element  $C(s, z)$  – w tym celu podstawimy do równania (5.1.40)  $n = 0$ :

$$\tilde{u}_0(s, z) = C(s, z)R_1(s) \Rightarrow C(s, z) = \tilde{u}_0(s, z)\tilde{a}_0(s, z). \quad (5.1.41)$$

Analogicznie wyznaczamy pierwsze „wyrazy” w równaniach (5.1.38) i (5.1.39) także podstawiając  $n = 0$  oraz wykorzystując fakt, iż  $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_j(s, z) = zf(s)$ ,

$$\begin{aligned} \psi_0(s, z) &= \tilde{a}_1(s, z)\tilde{u}_0(s, z) - \tilde{u}_1(s, z) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} = \\ \tilde{a}_1(s, z)\tilde{u}_0(s, z) - \tilde{u}_1(s, z) &\left[ \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) - \tilde{a}_0(s, z) \right] - \frac{1-f(s)}{s} = \\ \tilde{a}_1(s, z)\tilde{u}_0(s, z) - \tilde{u}_1(s, z) &\left[ zf(s) - \tilde{a}_0(s, z) \right] - \frac{1-f(s)}{s} \end{aligned} \quad (5.1.42)$$

$$\psi_0(s, z) = \tilde{a}_0(s, z)\tilde{u}_1(s, z) + \tilde{a}_1(s, z)\tilde{u}_0(s, z) - \tilde{u}_0(s, z). \quad (5.1.43)$$

Porównując (5.1.42) i (5.1.43) otrzymujemy

$$\tilde{u}_1(s, z) = [zf(s)]^{-1} \left[ \tilde{u}_0(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} \right]. \quad (5.1.44)$$

Pozostała nam do wyprowadzenia formuła dla funkcji  $\tilde{u}_0(s, z)$ , od której zależą zarówno  $\tilde{u}_1(s, z)$  jak i  $C(s, z)$ . Podstawiając zależności (5.1.38), (5.1.41) i (5.1.44) do równania (5.1.40) otrzymamy

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(s, z) &= \tilde{a}_0(s, z)R_{n+1}(s, z)\tilde{u}_0(s, z) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \left[ \tilde{a}_{k+1}(s, z)\tilde{u}_0(s, z) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{u}_1(s, z) \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{a}_i(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} \right] \\ &= \tilde{a}_0(s, z)R_{n+1}(s, z)\tilde{u}_0(s, z) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \left[ \tilde{a}_{k+1}(s, z)\tilde{u}_0(s, z) \right. \\ &\quad \left. - (zf(s))^{-1} \left( \tilde{u}_0(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} \right) \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{a}_i(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} \right] \end{aligned} \quad (5.1.45)$$

Definiując

$$\begin{aligned} A_n(s, z) &\stackrel{def}{=} R_{n+1}(s, z)\tilde{a}_0(s, z) \\ &\quad + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \left[ \tilde{a}_{k+1}(s, z) - (zf(s))^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{a}_i(s, z) \right] \end{aligned} \quad (5.1.46)$$

oraz

$$B_n(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{1-f(s)}{zs f(s)} \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{a}_i(s, z) - zf(s) \right) \quad (5.1.47)$$

zapisujemy (5.1.45) w nowej postaci

$$\tilde{u}_n(s, z) = A_n(s, z)\tilde{u}_0(s, z) + B_n(s, z). \quad (5.1.48)$$

W przedostatnim kroku do równania (5.1.34) wstawiamy zależność (5.1.48), otrzymując

$$\begin{aligned} A_N(s, z)\tilde{u}_0(s, z) + B_N(s, z) &= \tilde{u}_N(s, z) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) [A_{N-k}(s, z)\tilde{u}_0(s, z) \\ &\quad + B_{N-k}(s, z)] + \tilde{u}_0(s, z) \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s) + \gamma(s, z). \end{aligned} \quad (5.1.49)$$

W końcu z równania 5.1.49 wyznaczamy jawną postać funkcji  $\tilde{u}_0(s, z)$ :

$$\tilde{u}_0(s, z) = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) B_{N-k}(s, z) - B_N(s, z) + \gamma(s, z)}{A_N(s, z) - \sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) A_{N-k}(s, z) - \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s)}. \quad (5.1.50)$$

Wyprowadzone zależności (5.1.48) i (5.1.50) w połączeniu z podstawieniem (5.1.33) posłużą nam do uzyskania ostatecznej postaci podwójnej transformaty „mieszanej” rozkładu liczby obsłużonych zgłoszeń. Ponieważ

$$\tilde{h}_n(s, z) = \tilde{u}_{N-n}(s, z) = \tilde{u}_0(s, z) A_{N-n}(s, z) + B_{N-n}(s, z), \quad (5.1.51)$$

zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 5.1.** *W modelu kolejkowym typu  $M/G/1/N$  z regulaminem wielokrotnych okresów przestoju podwójna transformata „mieszana” rozkładu warunkowego liczby zgłoszeń obsłużonych do chwili  $t$ , gdzie warunkiem jest ich liczba zakumulowana w buforze w początkowej chwili, wyraża się następującym wzorem:*

$$\tilde{h}_n(s, z) = B_{N-n}(s, z) + A_{N-n}(s, z) \times \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) B_{N-k}(s, z) - B_N(s, z) + \gamma(s, z)}{A_N(s, z) - \sum_{k=1}^{N-1} b_k(s) A_{N-k}(s, z) - \sum_{k=N}^{\infty} b_k(s)}, \quad (5.1.52)$$

gdzie  $b_k(s)$ ,  $\gamma(s, z)$ ,  $A_k(s)$ ,  $B_k(s, z)$  określono w (5.1.8), (5.1.30), (5.1.46) i (5.1.47) odpowiednio.

## 5.2 Złożony proces Poissona

W niniejszym podrozdziale poszerzymy zakres naszych rozważań o grupowy napływ pakietów, rozważając tym samym model kolejkowy typu  $M^X/G/1/N$ , w którym z prawdopodobieństwem  $p_k$  (gdzie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ) do systemu napływają grupy liczące  $k$  zgłoszeń obsłużalnych (będących w istocie pojedynczym zgłoszeniem napływającym), a napływ jest określony złożonym procesem Poissona o intensywności  $\lambda$  (grup zgłoszeń na jednostkę czasu). Niezmiennie obsługa zgłoszeń przebiega według dyscypliny FIFO i jest zgodna z rozkładem zadany przez dystrybuantę  $F(\cdot)$ . Pojemność systemu to  $N$  zgłoszeń – bufor akumulujący zawiera  $N - 1$  miejsc na pojedyncze zgłoszenia obsłużalne, a dodatkowo jedno takie zgłoszenie może być obsłużwane. W dalszym ciągu okres zawieszenia przez serwer obsługi składa się z wielu pojedynczych okresów przestoju, a ich długość trwania jest zgodna z rozkładem zadany przez dystrybuantę  $G(\cdot)$ .

Powtórnie w celu uniknięcia kolizji oznaczeń oznaczmy przez  $Y(t)$  liczbę zgłoszeń (obsłużalnych) obecnych w systemie w chwili  $t$ , pozostawiając takie samo oznaczenie  $h(t)$  określające liczbę zgłoszeń obsłużonych przez serwer do chwili  $t$ . Zdefiniujmy w następujący sposób rozkład warunkowy



liczby zgłoszeń obsłużonych do chwili  $t > 0$ , gdzie warunkiem jest liczba zgłoszeń zakumulowanych w buforze w chwili początkowej  $t = 0$ :

$$H_n^X(t, m) = \mathbf{P}\{h(t) = m \mid Y(0) = n\}, \quad t > 0, 0 \leq n \leq N. \quad (5.2.1)$$

Ponownie, zakładając, iż system jest pusty ( $n = 0$ ) w chwili rozpoczęcia obsługi zgłoszeń ( $t = 0$ ), już w tej chwili rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi. Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymujemy następujący wzór dla modelu z grupowym napływem zgłoszeń:

$$\begin{aligned} H_0^X(t, m) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &\times \int_{v=y-u}^{t-u} \left[ \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{[\lambda(u+v-y)]^j}{j!} e^{-\lambda(u+v-y)} H_{k+r}^X(t-u-v, m) \right. \\ &+ H_N^X(t-u-v, m) \sum_{r=N-k}^{\infty} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{[\lambda(u+v-y)]^j}{j!} e^{-\lambda(u+v-y)} \left. \right] dG(v) \\ &+ \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{t-u} H_N^X(t-u-v, m) dG(v) \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^t \delta_{m,0} \bar{G}(t-u) dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy + \delta_{m,0} e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

gdzie  $\delta_{i,j}$ ,  $\bar{G}(\cdot)$ ,  $G^{i*}(\cdot)$ ,  $p_j^{i*}$  zostały określone w Definicjach 1.1, 1.3, 1.4 i 1.5 odpowiednio.

Dla przypadku grupowego napływu zgłoszeń prawa strona wzoru (5.2.2), opisującego proces zliczający obsłużone zgłoszenia, składa się z sumy pięciu składników. Analogicznie do wzoru (5.1.2) pierwszy element sumy odpowiada sytuacji, w której okres zawieszenia przez serwer obsługi kończy się przed chwilą  $t$ , a w momencie jego zakończenia w buforze zakumulowanych zgłoszeń jest mniej niż wynosi jego pojemność. W takim przypadku obsługa zgłoszeń rozpoczyna się po zakończeniu ostatniego okresu przestoju o długości  $v$  (w momencie  $u+v < t$  odpowiadającym całkowitej długości początkowego okresu zawieszenia obsługi), a w buforze zakumulowanych może być  $k+r$  zgłoszeń, gdzie  $k$  to ilość zgłoszeń przybyłych w momencie  $y$  (rozmiar pierwszej nadchodzącej grupy zgłoszeń), a  $r \in \{0, \dots, N-k-1\}$  to ilość zgłoszeń które napłynęły do systemu w przedziale czasu o długości  $u+v-y$ . Drugi oraz trzeci składnik sumy opisują przypadek, w którym następuje całkowite wypełnienie bufora w trakcie trwania okresu zawieszenia obsługi, kończącego się również przed chwilą  $t$ . Występująca w obydwu składnikach funkcja  $H_N^X(t-u-v, m)$  stanowi, iż w momencie  $u+v < t$  serwer rozpoczyna obsługę dokładnie  $N$  zgłoszeń zakumulowanych w systemie. Wyróżnikiem tych składników jest sposób doprowadzenia do efektu całkowitego wypełnienia bufora. Drugi składnik realizuje przypadek kilkukrotnego (co najmniej

dwukrotnego) grupowego napływu zgłoszeń, których liczba po ich zsumowaniu daje wartość równą co najmniej  $N$ . Natomiast trzeci składnik odnosi się do przypadku, w którym jednokrotny napływ grupy pakietów skutkuje wypełnieniem bufora. Składniki czwarty i piąty są identyczne ze składnikami trzecim i czwartym wzoru (5.1.2). Dla przypomnienia: czwarty składnik odzwierciedla przypadek napływu pierwszego zgłoszenia przed chwilą  $t$ , skutkującego rozpoczęciem obsługi zgłoszeń (czyli zakończeniem okresu przestoju systemu) następującym po chwili  $t$  (w momencie  $u + v > t$ ), zaś piąty odpowiada sytuacji, w której pierwsze zgłoszenie napływa do systemu po chwili  $t$ .

Do wyprowadzenia równania opisującego proces zliczający obsłużone zgłoszenia przy założeniu, że w buforze na starcie obecnych jest  $Y(0) = n$  zgłoszeń (przy czym  $1 \leq n \leq N$ ), powtórnie wykorzystamy fakt, iż w modelu kolejkowym typu  $M^X/G/1$  momenty zakończenia obsługi zgłoszeń są momentami Markowa [61]. Tym samym zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym względem pierwszej chwili ukończenia obsługi umożliwi nam wyprowadzenie następującego układu równań całkowitych:

$$H_n^X(t, m) = I\{m \geq 1\} \int_{y=0}^t \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^k p_k^{j*} \frac{(\lambda y)^j}{j!} e^{-\lambda y} H_{n+k-1}^X(t-y, m-1) \right. \\ \left. + H_{N-1}^X(t-y, m-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{j=0}^k p_k^{j*} \frac{(\lambda y)^j}{j!} e^{-\lambda y} \right] dF(y) + \delta_{m,0} \bar{F}(t), \quad (5.2.3)$$

Układ (5.2.3) stanowi rozszerzenie układu (5.1.3) na przypadek grupowego napływu zgłoszeń, wyrażonego występującą dwukrotnie sumą  $\sum_{j=0}^k p_k^{j*}$  i związaną z nią odpowiednią indeksacją. Opis występujących po prawej stronie równości (5.2.3) trzech elementów sumy jest analogiczny do opisu układu (5.1.3) poczynionego w podrozdziale 5.1 i z tej racji nie będziemy go powielać w tym miejscu.

Wprowadźmy następujące oznaczenie dla transformaty Laplace'a rozkładu warunkowego liczby obsłużonych zgłoszeń w systemie z grupowym ich napływem:

$$\hat{h}_n^X(s, m) = \int_0^{\infty} e^{-st} H_n^X(t, m) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, n \geq 0. \quad (5.2.4)$$

Również dla ostatniej rozważanej charakterystyki kolejkowania proces wyznaczenia układu równań dla transformat Laplace'a z układu równań (5.2.2) i (5.2.3) zostanie podzielony na kilka etapów, a ich liczba jest uwarunkowana ilością składników w rozważanych sumach (pięć składników w (5.2.2) i trzy składniki w (5.2.3)).

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.2.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t dy \\ & \times \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} (u+v-y)^j H_{k+r}^X(t-u-v, m) dG(v) \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Składnik ten ma analogiczną postać do pierwszego składnika wzoru (5.1.5). Różnice pomiędzy tymi składnikami obejmują powiększenie ilości sum do czterech i odmienność zmiennych indeksujących występujących w sumach ze względu na grupowy napływ zgłoszeń. Metodyka prowadzenia przekształceń z wykorzystaniem zamian granic całkowania pozostaje niezmienna, a jej powielenie dla (5.2.5) pozwala nam uzyskać następującą formę:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} dy \times \\ & \int_{v=y-u}^{\infty} (u+v-y)^j e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} H_{k+r}^X(t-u-v, m) dt. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Dokonując podstawienia  $\underline{t} = t - u - v$  w połączeniu z (2.1.9), obliczoną w (2.1.6) całką oraz oznaczeniem (5.2.4), doprowadzamy składnik (5.2.6) do następującej postaci:

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \widehat{h}_{k+r}^X(s, m) \frac{1}{1-g(\lambda+s)} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{j+1}}{(j+1)!} dG(v). \quad (5.2.7)$$

Definiując

$$b_r(s) \stackrel{def}{=} \frac{1}{1-g(\lambda+s)} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} \frac{(\lambda v)^{j+1}}{(j+1)!} dG(v) \quad (5.2.8)$$

otrzymujemy ostateczną postać składnika

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} \widehat{h}_{k+r}^X(s, m) b_r(s). \quad (5.2.9)$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.2.2) ma postać

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=N-k}^{\infty} \sum_{j=0}^r p_r^{j*} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t e^{-\lambda u} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t dy \\ & \times \int_{v=y-u}^{t-u} e^{-\lambda v} (u+v-y)^j H_N^X(t-u-v, m) dG(v). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

## 5. Analiza procesu liczącego obsłużone zgłoszenia

---

Składnik ten różni się od poprzedniego jedynie indeksami sumy  $\sum_{r=N-k}^{\infty}$  oraz  $H_N^X$ , wobec czego, stosując analogiczne przekształcenia, otrzymujemy następującą postać ostateczną:

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=N-k}^{\infty} \hat{h}_N^X(s, m) b_r(s). \quad (5.2.11)$$

Transformata Laplace'a trzeciego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.2.2) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy \\ & \times \int_{v=y-u}^{t-u} H_N^X(t-u-v, m) dG(v). \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Stosując takie same zamiany granic całkowania jak w przypadku pierwszego składnika (5.1.5) otrzymamy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{\infty} dG(v) \\ & \times \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-st} H_N^X(t-u-v, m) dt = \\ & \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-su} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-sv} dG(v) \\ & \times \int_{t=u+v}^{\infty} e^{-s(t-u-v)} H_N^X(t-u-v, m) dt. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Następnie w równaniu (5.2.13) dokonujemy podstawienia  $\underline{t} = t - u - v$ . Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy notację nowych zmiennych pozbawioną podkreśleń

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-su} dG^{i*}(u) \int_{y=u}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \int_{v=y-u}^{\infty} e^{-sv} dG(v) \\ & \times \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} H_N^X(t, m) dt = \\ & \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-su} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} dG(v) \int_{y=u}^{u+v} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ & \times \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} H_N^X(t, m) dt. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Uwzględniając obliczoną w (2.2.7) całkę w połączeniu z oznaczeniem (5.2.4)

możemy przekształcić (5.2.14) do postaci

$$\begin{aligned}
 \widehat{h}_N^X(s, m) &= \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-su} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} e^{-\lambda u} [1 - e^{-\lambda v}] dG(v) = \\
 \widehat{h}_N^X(s, m) &= \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \int_{v=0}^{\infty} [e^{-sv} - e^{-(\lambda+s)v}] dG(v) = \\
 \widehat{h}_N^X(s, m) &= \sum_{k=N}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)u} dG^{i*}(u) \\
 &\times \left[ \int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} dG(v) - \int_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)v} dG(v) \right]. \tag{5.2.15}
 \end{aligned}$$

Stosując Definicję 1.6 i zależność (2.1.9) otrzymujemy ostateczną postać składnika:

$$\widehat{h}_N^X(s, m) = \sum_{k=N}^{\infty} p_k \frac{g(s) - g(\lambda + s)}{1 - g(\lambda + s)}. \tag{5.2.16}$$

Transformata Laplace'a czwartego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.2.2) ma następującą postać:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{u=0}^t \delta_{m,0} \overline{G}(t-u) dG^{i*}(u) \int_{y=u}^t \lambda e^{-\lambda y} dy. \tag{5.2.17}$$

Składnik ten jest identyczny jak składnik trzeci (5.1.12) wzoru (5.1.2), tym samym jego ostateczna postać przedstawiona w (5.1.16) wyraża się następująco:

$$\frac{\delta_{m,0}}{1 - g(\lambda + s)} \left[ \frac{1 - g(s)}{s} - \frac{1 - g(\lambda + s)}{\lambda + s} \right]. \tag{5.2.18}$$

Transformata Laplace'a piątego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.2.2) ma postać

$$\int_{t=0}^{\infty} \delta_{m,0} e^{-(\lambda+s)t} dt = \delta_{m,0} \frac{e^{-(\lambda+s)t}}{-(\lambda+s)} \Bigg|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s}. \tag{5.2.19}$$

Transformata Laplace'a pierwszego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.2.3) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 & I\{m \geq 1\} \times \\
 & \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \sum_{k=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^k p_k^{j*} \frac{(\lambda y)^j}{j!} e^{-\lambda y} H_{n+k-1}^X(t-y, m-1) dF(y) \\
 & = I\{m \geq 1\} \sum_{k=0}^{N-n-1} \\
 & \times \sum_{j=0}^k p_k^{j*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \int_{t=y}^{\infty} e^{-s(t-y)} H_{n+k-1}^X(t-y, m-1) dt.
 \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

Dokonując podstawienia  $\underline{t} = t - y$  w równaniu (5.2.20) i upraszczając zapis, poprzez przyjęcie notacji nowych zmiennych niezawierającej podkreśleń, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & = I\{m \geq 1\} \sum_{k=0}^{N-n-1} \\
 & \times \sum_{j=0}^k p_k^{j*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} H_{n+k-1}^X(t, m-1) dt.
 \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Definiując

$$a_l(s) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^l p_l^{j*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \tag{5.2.22}$$

wraz z jednoczesnym zastosowaniem wprowadzonego oznaczenia transformaty Laplace'a (5.2.4) otrzymujemy ostateczną postać składnika:

$$I\{m \geq 1\} \sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \hat{h}_{n+k-1}^X(s, m-1). \tag{5.2.23}$$

Transformata Laplace'a drugiego składnika całkowego po prawej stronie wzoru (5.2.3) ma następującą postać:

$$\begin{aligned}
 & I\{m \geq 1\} \times \\
 & \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt \int_{y=0}^t \sum_{k=N-n}^{\infty} \sum_{j=0}^k p_k^{j*} \frac{(\lambda y)^j}{j!} e^{-\lambda y} H_{N-1}^X(t-y, m-1) dF(y).
 \end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Stosując analogiczne względem pierwszego składnika przekształcenia otrzymamy następującą postać ostateczną:

$$\begin{aligned}
 & I\{m \geq 1\} \sum_{k=N-n}^{\infty} \\
 & \times \sum_{j=0}^k p_k^{j*} \int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dF(y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} H_{N-1}^X(t, m-1) dt = \\
 & I\{m \geq 1\} \hat{h}_{N-1}^X(s, m-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s). \tag{5.2.25}
 \end{aligned}$$

Ostatni składnik całkowy po prawej stronie wzoru (5.2.3) jest identyczny ze składnikiem trzecim wzoru (5.1.3), wyprowadzonego dla prostego procesu Poissona, dla którego szczegółowe obliczenia przeprowadziliśmy w (5.1.24). W ich rezultacie otrzymaliśmy:

$$\delta_{m,0} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dt = \delta_{m,0} \frac{1-f(s)}{s}. \tag{5.2.26}$$

W celu uproszczenia notacji zdefiniujemy:

- jako  $D(s)$  następujący fragment trzeciego składnika wzoru (5.2.2)

$$D(s) \stackrel{def}{=} \sum_{k=N}^{\infty} p_k \frac{g(s) - g(\lambda + s)}{1 - g(\lambda + s)}, \tag{5.2.27}$$

- jako  $d(s, m)$  cały czwarty składnik wzoru (5.2.2)

$$d(s, m) \stackrel{def}{=} \frac{\delta_{m,0}}{1 - g(\lambda + s)} \left[ \frac{1 - g(s)}{s} - \frac{1 - g(\lambda + s)}{\lambda + s} \right]. \tag{5.2.28}$$

Wówczas układ równań dla transformat Laplace'a otrzymany z (5.2.2) i (5.2.3) przyjmie następującą postać:

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_0^X(s, m) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{r=0}^{N-k-1} \hat{h}_{k+r}^X(s, m) b_r(s) + \hat{h}_N^X(s, m) \sum_{r=N-k}^{\infty} b_r(s) \right] + \\
 & \hat{h}_N^X(s, m) C(s) + d(s, m) + \frac{\delta_{m,0}}{\lambda + s} \tag{5.2.29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_n^X(s, m) &= I\{m \geq 1\} \left[ \sum_{k=0}^{N-n-1} a_k(s) \hat{h}_{n+k-1}^X(s, m-1) + \right. \\
 & \left. \hat{h}_{N-1}^X(s, m-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} a_k(s) \right] + \delta_{m,0} \frac{1-f(s)}{s}, \tag{5.2.30}
 \end{aligned}$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ .

Aby uniknąć niedogodności powodowanych przez funkcje indykatrowe  $I\{\cdot\}$ , ponownie zastosujemy podejście wykorzystujące funkcję tworzącą. Niech

$$\tilde{h}_n^X(s, z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \hat{h}_n^X(s, m), \quad 0 \leq n \leq N, |z| < 1. \quad (5.2.31)$$

Funkcja określona w (5.2.31) jest analogiczna do funkcji wprowadzonej w (5.1.28) dla przypadku prostego procesu Poissona.

Ponadto, analogicznie do procesu prostego, skorzystamy ze zdefiniowanych w (5.1.29) i (5.1.30) funkcji  $\tilde{a}_j(s, z)$  i  $\gamma(s, z)$  (nie występuje w nich indeksacja wskazująca na wykorzystywanie złożonego procesu Poissona). Wówczas układ równań (5.2.29) i (5.2.30) otrzyma następującą postać:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0^X(s, z) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{r=0}^{N-k-1} \tilde{h}_{k+r}^X(s, z) b_r(s) + \tilde{h}_N^X(s, z) \sum_{r=N-k}^{\infty} b_r(s) \right] + \\ &\tilde{h}_N^X(s, z) D(s) + \gamma(s, z) \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

$$\tilde{h}_n^X(s, z) = \sum_{k=0}^{N-n-1} \tilde{a}_k(s, z) \tilde{h}_{n+k-1}^X(s, z) + \tilde{h}_{N-1}^X(s, z) \sum_{k=N-n}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) + \frac{1-f(s)}{s}, \quad (5.2.33)$$

gdzie  $1 \leq n \leq N$ .

Do otrzymanego w (5.2.32) i (5.2.33) układu równań dla transformat Laplace'a zastosujemy podstawienie

$$\tilde{u}_n^X(s, z) = \tilde{h}_{N-n}^X(s, z), \quad (5.2.34)$$

w wyniku którego układ ten przyjmie następującą postać:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_N^X(s, z) &= \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{r=0}^{N-k-1} b_r(s) \tilde{u}_{N-k-r}^X(s, z) + \tilde{u}_0^X(s, z) \sum_{r=N-k}^{\infty} b_r(s) \right] \\ &+ \tilde{u}_0^X(s, z) D(s) + \gamma(s, z), \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

$$\tilde{u}_n^X(s, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{a}_k(s, z) \tilde{u}_{n-k+1}^X(s, z) + \tilde{u}_1^X(s, z) \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) + \frac{1-f(s)}{s} \quad (5.2.36)$$

gdzie  $0 \leq n \leq N-1$ .

W kolejnych krokach dokonywane przez nas przekształcenia są identyczne z przekształceniami prowadzonymi dla prostego procesu Poissona w krokach (5.1.36) i (5.1.37) i mają na celu doprowadzenie równania (5.2.36) do



postaci umożliwiającej zastosowanie Twierdzenia 1.4. Wychodząc od równania

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n^X(s, z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{a}_k(s, z) \tilde{u}_{n-k+1}^X(s, z) + \tilde{u}_1^X(s, z) \tilde{a}_n(s, z) + \tilde{u}_1^X(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) \\ &+ \frac{1-f(s)}{s} \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

w wyniku przekształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^n \tilde{a}_{k+1}(s, z) \tilde{u}_{n-k}^X(s, z) - \tilde{u}_n^X(s, z) &= \tilde{a}_{n+1}(s, z) \tilde{u}_0^X(s, z) \\ - \tilde{u}_1^X(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) - \frac{1-f(s)}{s}. \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

Definiując

$$\psi_n(s, z) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{a}_{n+1}(s, z) \tilde{u}_0^X(s, z) - \tilde{u}_1^X(s, z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) - \frac{1-f(s)}{s}, \quad (5.2.39)$$

równanie (5.2.38) przekształcamy do postaci

$$\psi_n(s, z) = \sum_{k=-1}^n \tilde{a}_{k+1}(s, z) \tilde{u}_{n-k}^X(s, z) - \tilde{u}_n^X(s, z), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (5.2.40)$$

Dla określonych w (5.2.22) i (5.2.39) ciągów  $(\tilde{a}_n)$  oraz  $(\psi_n)$  wyrażamy  $n$ -ty wyraz  $\tilde{u}_n^X$  w sposób rekurencyjny za pomocą ciągu  $(R_n)$  określonego z kolei wyrazami ciągu  $(\tilde{a}_n)$ . Otrzymujemy:

$$\tilde{u}_n^X(s, z) = C(s, z) R_{n+1}(s, z) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \psi_k(s, z), \quad n \geq 0. \quad (5.2.41)$$

Pozostało nam wyprowadzenie formuł na funkcje  $\tilde{u}_0^X(s, z)$ ,  $\tilde{u}_1^X(s, z)$  występujące we wzorze (5.2.39), a także zapisanie w postaci jawnej elementu  $C(s, z)$ . Podstawiając  $n = 0$  do równania (5.2.41) otrzymujemy

$$\tilde{u}_0^X(s, z) = C(s, z) R_1(s) \Rightarrow C(s, z) = \tilde{u}_0^X(s, z) \tilde{a}_0(s, z). \quad (5.2.42)$$

Analogicznie wyznaczamy pierwsze „wyrazy” w równaniach (5.2.39) i (5.2.40)

(dla  $n = 0$ ), korzystając zarazem z faktu, iż  $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_j(s, z) = zf(s)$ :

$$\begin{aligned} \psi_0(s, z) &= \tilde{a}_1(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) - \tilde{u}_1^X(s, z) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} = \\ &= \tilde{a}_1(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) - \tilde{u}_1^X(s, z) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(s, z) - \tilde{a}_0(s, z) \right] - \frac{1-f(s)}{s} = \\ &= \tilde{a}_1(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) - \tilde{u}_1^X(s, z) \left[ zf(s) - \tilde{a}_0(s, z) \right] - \frac{1-f(s)}{s}, \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

$$\psi_0(s, z) = \tilde{a}_0(s, z)\tilde{u}_1^X(s, z) + \tilde{a}_1(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) - \tilde{u}_0^X(s, z). \quad (5.2.44)$$

Porównując (5.2.43) i (5.2.44) otrzymujemy

$$\tilde{u}_1^X(s, z) = [zf(s)]^{-1} \left[ \tilde{u}_0^X(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} \right]. \quad (5.2.45)$$

Pozostała nam do wyprowadzenia formuła dla funkcji  $\tilde{u}_0^X(s, z)$ . Podstawiając zależności (5.2.39), (5.2.42) i (5.2.45) do równania (5.2.41) dostajemy

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n^X(s, z) &= \tilde{a}_0(s, z)R_{n+1}(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \left[ \tilde{a}_{k+1}(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{u}_1^X(s, z) \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{a}_i(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} \right] \\ &= \tilde{a}_0(s, z)R_{n+1}(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \left[ \tilde{a}_{k+1}(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) \right. \\ &\quad \left. - (zf(s))^{-1} \left( \tilde{u}_0^X(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} \right) \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{a}_i(s, z) - \frac{1-f(s)}{s} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

Definiując w sposób identyczny z zaprezentowanym w (5.1.46) i (5.1.47) funkcje

$$\begin{aligned} A_n(s, z) &\stackrel{def}{=} R_{n+1}(s, z)\tilde{a}_0(s, z) \\ &\quad + \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \left[ \tilde{a}_{k+1}(s, z) - (zf(s))^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{a}_i(s, z) \right] \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

oraz

$$B_n(s, z) \stackrel{def}{=} \frac{1-f(s)}{zf(s)} \sum_{k=0}^n R_{n-k}(s, z) \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{a}_i(s, z) - zf(s) \right), \quad (5.2.48)$$

otrzymujemy nową postać (5.2.46)

$$\tilde{u}_n^X(s, z) = A_n(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) + B_n(s, z). \quad (5.2.49)$$

Następnie wstawiamy zależność (5.2.49) do równania (5.2.35), otrzymując

$$\begin{aligned}
 A_N(s, z)\tilde{u}_0^X(s, z) + B_N(s, z) &= \tilde{u}_N^X(s, z) = \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{r=0}^{N-k-1} b_r(s) [A_{N-k-r}(s, z) \right. \\
 &\times \tilde{u}_0^X(s, z) + B_{N-k-r}(s, z)] + \tilde{u}_0^X(s, z) \left. \sum_{r=N-k}^{\infty} b_r(s) \right] + \tilde{u}_0^X(s, z)D(s) + \gamma(s, z).
 \end{aligned} \tag{5.2.50}$$

W końcowym kroku z równania (5.2.50) wyznaczamy jawną postać funkcji:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_0^X(s, z) &= \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} b_r(s) B_{N-k-r}(s, z) - B_N(s, z) + \gamma(s, z)}{A_N(s, z) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{r=0}^{N-k-1} b_r(s) A_{N-k-r}(s, z) + \sum_{r=N-k}^{\infty} b_r(s) \right] - D(s)}.
 \end{aligned} \tag{5.2.51}$$

Wyprowadzone zależności (5.2.49) i (5.2.51) w połączeniu z podstawieniem (5.2.34) pozwalają nam na uzyskanie ostatecznej postaci podwójnej transformaty „mieszanej” rozkładu warunkowego liczby obsłużonych zgłoszeń. Odpowiedni wynik sformułujemy w postaci twierdzenia.

**Twierdzenie 5.2.** *W modelu kolejkowym typu  $M^X/G/1/N$  z regulaminem wielokrotnych okresów przestoju podwójna transformata „mieszana” rozkładu warunkowego liczby obsłużonych do chwili  $t$  zgłoszeń wyraża się następującym wzorem:*

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_n^X(s, z) &= B_{N-n}(s, z) + A_{N-n}(s, z) \times \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^{N-1} p_k \sum_{r=0}^{N-k-1} b_r(s) B_{N-k-r}(s, z) - B_N(s, z) + \gamma(s, z)}{A_N(s, z) - \sum_{k=1}^{N-1} p_k \left[ \sum_{r=0}^{N-k-1} b_r(s) A_{N-k-r}(s, z) + \sum_{r=N-k}^{\infty} b_r(s) \right] - D(s)},
 \end{aligned} \tag{5.2.52}$$

gdzie  $b_k(s)$ ,  $\gamma(s, z)$ ,  $D(s)$ ,  $A_k(s)$ ,  $B_k(s, z)$  zdefiniowano w (5.2.8), (5.1.30), (5.2.27), (5.2.47) i (5.2.48) odpowiednio.

### 5.3 Analiza numeryczna i symulacje.

W celu przeprowadzenia analizy wyników obliczeń numerycznych musimy pochylić się nad następującą kwestią: zdefiniowane w (5.1.1) i (5.2.1) rozkłady liczby pakietów obsłużonych do chwili  $t$  są w naturalny sposób uzależnione od konkretnej wartości parametru  $m$  oznaczającego dokładną liczbę obsłużonych pakietów ( $h(t) = m$ ). Wyznaczanie rozkładów prawdopodobieństwa obsłużenia poszczególnych ilości zgłoszeń jest wysoce nieefektywne obliczeniowo, a tym samym również czasowo (uzyskując charakterystykę

w stanie nieustalonym musielibyśmy prezentować zmienne w czasie rozkłady prawdopodobieństwa obsłużenia poszczególnych możliwych wartości  $m \in 0, 1, 2, \dots$ ). Bardziej intuicyjną i zarazem łatwiej osiąganą obliczeniowo miarą jest wartość średnia ilości pakietów obsłużonych do chwili  $t$ . Do jej wyznaczenia ponownie posłużymy się faktem, iż wartość oczekiwana (stanowiąca moment zwykły rzędu pierwszego) jest równa pierwszej pochodnej z funkcji tworzącej (podejście takie jest często stosowane w analizie charakterystyk stochastycznych modeli kolejkowych, zob. np. [24] oraz [30] podrozdział 3.1 wzór (3.14)). Funkcja tworząca dla omawianej charakterystyki kolejkowania została wprowadzona dla procesów prostego i złożonego w (5.1.28) oraz (5.2.31) odpowiednio. Ograniczając się do bardziej ogólnego przypadku złożonego procesu Poissona przyjmijmy następujące oznaczenie dla średniej liczby zgłoszeń obsłużonych do chwili  $t$  (gdzie  $0 < t < \infty$ ) uwarunkowanej początkowym stanem bufora akumulującego:

$$\mathbf{E}^X \{h(t) | Y(0) = n\} \stackrel{def}{=} EH_n^X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \mathbf{P}\{h(t) = m | Y(0) = n\}. \quad (5.3.1)$$

Innymi słowy średnia ilość obsłużonych do chwili  $t$  zgłoszeń równa jest sumie iloczynów: ilości zgłoszeń  $m$  oraz prawdopodobieństw obsłużenia dokładnie  $m$  zgłoszeń dla  $m \in 0, 1, 2, \dots$ . Obliczając pierwszą pochodną z funkcji tworzącej (5.2.31) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial z} [\tilde{h}_n^X(s, z)] \right|_{z=1} &= \left. \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \cdot \mathbf{P}\{h(t) = m | Y(0) = n\} dt \right] \right|_{z=1} = \\ &= \left. \left[ \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} m z^{m-1} \cdot \mathbf{P}\{h(t) = m | Y(0) = n\} dt \right] \right|_{z=1} = \\ &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \mathbf{P}\{h(t) = m | Y(0) = n\} dt = LT[EH_n^X(t)], \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

gdzie operator  $LT[\cdot]$  oznacza transformatę Laplace'a. W celu otrzymania wartości średniej liczby zgłoszeń obsłużonych do chwili  $t$ , do wyprowadzonej w (5.3.2) transformaty Laplace'a zastosujemy algorytm numerycznego jej odwracania. W niniejszym rozdziale, wzorem poprzednich, wykorzystamy algorytm Gavera-Stehfesta, a także drugi algorytm nazywany od nazwisk twórców algorytmem Abate-Choudhury-Whitt (obydwa algorytmy zaczerpnięto z pracy [1]). Użycie drugiego algorytmu podyktowane jest zaprezentowanym w podrozdziale 5.3.1 niesatysfakcjonującym wynikiem osiąganym przez obliczenia numeryczne z użyciem algorytmu Gavera-Stehfesta względem obliczeń symulacyjnych. Dla opisywanej w rozdziale charakterystyki kolejkowania bardziej zbieżne rezultaty porównania obliczeń numerycznych i symulacji są osiągane przy użyciu algorytmu Abate-Choudhury-Whitt.

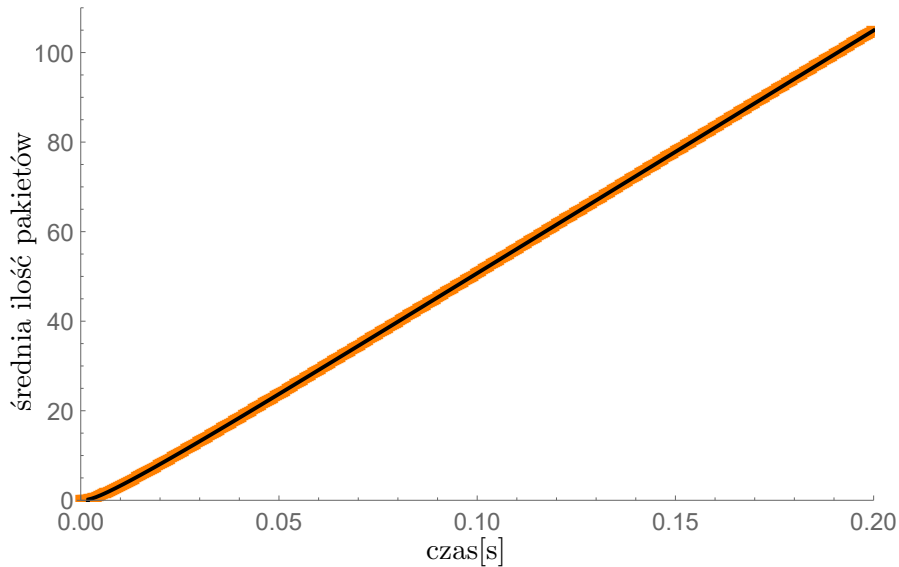
W dalszej części rozdziału wszystkie zaprezentowane wyniki zostały wygenerowane dla modelu, którego pojemność określona literą  $N$  wynosi 10 pakietów (przy czym bufor akumulujący zgłoszenia może zgromadzić do dzielnicy pakietów w trakcie gdy jeden pakiet jest obsługiwany). Dystrybuanta  $G(\cdot)$ , wyznaczająca długość trwania każdego pojedynczego okresu zawieszenia obsługi, oraz  $F(\cdot)$ , która wyznacza czas obsługi każdego zgłoszenia, są dystrybuantami rozkładu wykładniczego postaci (4.3.2), gdzie parametr  $\mu$  będzie określony indywidualnie dla wszystkich wykonanych w niniejszym rozdziale badań. Podstawową jednostką objętości pakietów  $v$  po raz kolejny będzie wartość 100 B. W nawiązaniu do zaprezentowanego w Przykładzie 1 modelowania średniego rozmiaru pakietu, w niniejszym rozdziale powielimy przyjęte wcześniej rozumowanie, zgodnie z którym pojedyncze zgłoszenie o rozmiarze będącym wielokrotnością podstawowej jednostki objętości –  $j \cdot v = j \cdot 100$  B – traktujemy jako grupę o liczności  $j$  pakietów/zgłoszeń.

### 5.3.1 Analiza porównawcza obliczeń numerycznych i symulacji.

Podobnie jak w analizach porównawczych wykonanych w podrozdziałach 2.3.2 oraz 3.3.1 obecne badania symulacyjne także przeprowadzone zostały na próbach o liczności dziesięciu tysięcy powtórzeń startu procesu kolejkowania pakietów. Analogicznie jak wcześniej dla każdej próby losowane jest unikalne ziarno używane do inicjalizacji generatora liczb pseudolosowych odpowiadających za losowość momentów napływu i czasu obsługi pakietów, a także długości pojedynczych okresów przestoju w trakcie zawieszenia obsługi. W symulacjach włączona została rejestracja ilości obsłużonych pakietów, dokonywana z krokiem czasowym  $t_c$ . Krok ten zarówno dla procesu prostego jak i procesu złożonego jest taki sam, wynosi  $t_c = 0.0005$  sekundy i opisuje chwile czasu  $k \cdot t_c = t \in [0, 0.2]$  dla  $k = 0; 1; 2; \dots; 400$ , w których następuje zarejestrowanie aktualnej liczby obsłużonych pakietów.

Pozostałe parametry wybranego modelu kolejkowego prezentują się następująco: początkowa liczba zgłoszeń w systemie  $n = 0$ , intensywność napływu zgłoszeń  $\lambda = 600$  pakietów/s, intensywność ich obsługi  $\mu = 600$  pakietów/s, odwrotność parametru skali dla dystrybuanty  $V(\cdot)$  to  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju wynosi średnio  $t_p = 0.002$  s). Ostatnim występującym w modelu parametrem, związanym z grupowym napływem pakietów w procesie złożonym, jest ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , którego postać definiuje średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ . Maksymalne różnice w wartościach średniej ilości obsłużonych pakietów, wyznaczone w chwilach  $k \cdot t_c$ , pomiędzy obliczeniami numerycznymi a wynikami symulacyjnymi wynoszą:

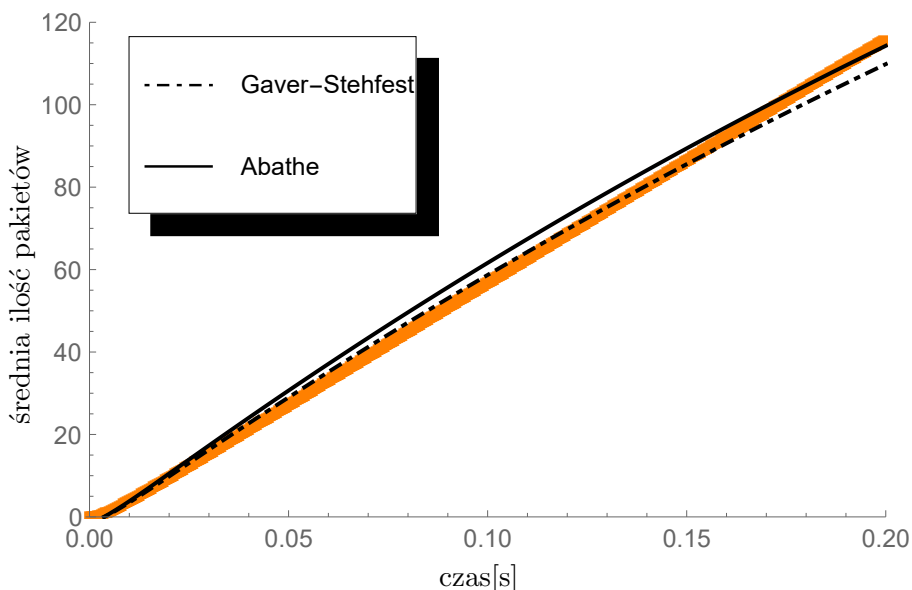
- 0.140957 dla procesu prostego,



Rysunek 5.1: Porównanie wartości średniej  $\mathbf{E}\{h(t) \mid X(0) = 0\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla prostego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (5.1.52) – czarna linia na wykresie; 2) jako statystyczny wynik badań symulacyjnych – pomarańczowe kwadraty na wykresie.

- 5.9372 dla procesu złożonego z algorytmem Gavera-Stehfesta odwracania transformaty Laplace’a,
- 4.92585 dla procesu złożonego z algorytmem Abate-Choudhury-Whitta odwracania transformaty Laplace’a.

Wykres przedstawiony na Rysunku 5.1 obrazuje wysoką zgodność pomiędzy obliczeniami numerycznymi a wynikami symulacyjnymi. Wynik zaprezentowany na Rysunku 5.2 wymaga bardziej wyczerpującego komentarza. Używana w poprzednich rozdziałach metoda numerycznego odwracania transformaty Laplace’a oparta na algorytmie Gavera-Stehfesta zapewniała satysfakcjonujące rezultaty dla rozpatrywanych charakterystyk rozkładu liczby zgłoszeń, czasu do przepelnienia bufora oraz opóźnienia kolejowania. Dla obecnej charakterystyki procesu liczącego zgłoszenia okazała się jednak niedostatecznie dokładna w zestawieniu z wynikami symulacyjnymi – wraz z upływem czasu występuje postępujące niedoszacowanie ilości obsłużonych pakietów (dla przyjętej rozpiętości czasu w końcowym momencie  $t = 0.2$  [s] błąd wynosi już niespełna 6 pakietów). W celu zlokalizowania źródła problemu zaimplementowano algorytm Abate-Choudhury-Whitta, a otrzymane wyniki zaprezentowano na wykresie. Zaowocowało to



Rysunek 5.2: Porównanie wartości średniej  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 0\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla złożonego procesu Poissona, otrzymanego: 1) poprzez numeryczne obliczenia wykorzystujące wzór (5.2.52) – czarne linie na wykresie, z czego przerywana uzyskana dla algorytmu Gavera-Stehfesta, zaś ciągła dla algorytmu Abate-Choudhury-Whitt odwracania transformaty Laplace’a (skrótowiec 'Abathe'); 2) jako statystyczny wynik badań symulacyjnych – pomarańczowe kwadraty na wykresie.

niewielkim maksymalnym błędem (niepełna 5 pakietów) osiąganym w chwili  $t \approx 0.1$  [s]. Zaistniała sytuacja uwidacznia występujący w rozpatrywanej charakterystyce problem numeryczny w zakresie obliczeń przybliżonych. Występujące we wzorze (5.2.52) nieskończone szeregi w trakcie prowadzonych na nich obliczeniach numerycznych w programie Mathematica są ograniczane bądź sumowane w sposób przybliżony – to w połączeniu z przybliżonym numerycznym odwracaniem transformaty generuje narastające błędy w wynikowej funkcji wyznaczającej średnią ilość obsłużonych pakietów. W procesie zliczającym obsłużone zgłoszenia istotną rolę odgrywają również wartości wyliczane dla przypadków, gdy następuje przepełnienie bufora – wzory (5.2.10) i (5.2.24). W tych przypadkach występujące we wzorach nieskończone szeregi dla  $r \in \{N - k, \dots, \infty\}$   $k \in \{N - n, \dots, \infty\}$  są problematyczne z punktu widzenia obliczeń numerycznych – nadejście coraz to większego w rozmiarze wyjściowego pakietu  $r \cdot 100$  B lub  $k \cdot 100$  B (interpretowanego jako grupa  $r$  lub  $k$  pakietów stubajtowych) jest coraz mniej prawdopodobne (malejące prawdopodobieństwo ma swój wyraz w przeliczanych splotach prawdopodobieństw  $p_r^{j*}$  i  $p_k^{j*}$ ), jednakże wiąże się z obliczanym „przetworzeniem”

pewnej ilości  $l < N$  pakietów które bufor zdołał pomieścić zanim nastąpiło jego przepełnienie. Z drugiej strony konieczne, z punktu widzenia ograniczonej mocy obliczeniowej dostępnej w komputerze, ograniczanie ilości obliczanych elementów nieskończonych sum skutkuje pewnym niedoszacowaniem wyliczanej transformaty Laplace'a rozkładu średniej ilości obsłużonych pakietów. Efekt ten jest potęgowany w większym stopniu poprzez algorytm Gavera-Stehfesta numerycznego odwracania rzeczonyj transformaty aniżeli przez algorytm Abate-Choudhury-Whitta, co obserwujemy na Rysunku 5.2.

W poprzednich charakterystykach efekt ograniczania sumowania nieskończonych szeregów nie był tak znaczący, ze względu na nieproporcjonalnie mniejszy wpływ obliczanych pod szeregami wartości – bez względu na to czy nadejdzie przekraczająca w danym momencie rozmiar bufora wartość 3 czy 10 pakietów, to liczba zgłoszeń w przepełnionym buforze jest stała i nie zależy od wybranego rzędu wielkości, pierwsze przepełnienie bufora także jest niezależne od rzędu wielkości gdyż tak i tak wystąpi, opóźnienie kolejkowania również bo każdy pakiet niemieszczący się w buforze posiada opóźnienie równe zero.

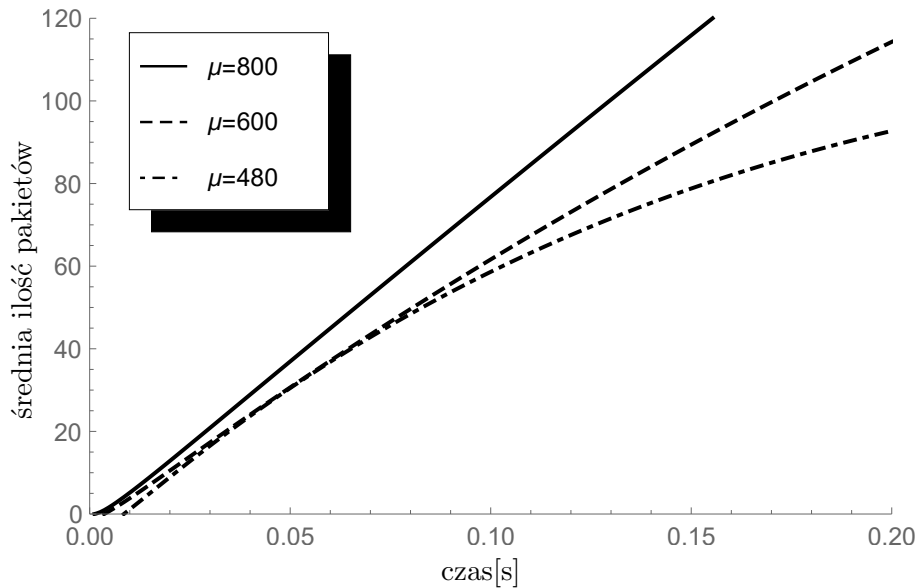
### 5.3.2 Badanie wpływu zmian czasu obsługi zgłoszeń w złożonym procesie Poissona

W trzech pierwszych eksperymentach przeanalizujemy wpływ zmian czasu obsługi zgłoszeń na średnią liczbę obsłużonych do chwili  $t$  zgłoszeń (5.3.1). Rozważymy trzy scenariusze, w których parametr  $\mu$  dystrybuanty (4.3.2) reprezentujący intensywność obsługi zgłoszeń przyjmuje wartości  $\mu \in \{800, 600, 480\}$  pakietów/s, co przekłada się na prędkości przetwarzania danych rzędu 640, 480 i 384 kb/s. Intensywność napływu zgłoszeń do systemu jest stała i wynosi  $\lambda = 600$  pakietów/s, wówczas uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności obsługi pakietów. Pozostałymi parametrami początkowymi są: odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (co przekłada się na długość pojedynczego okresu przestoju wynoszącą średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$  oraz ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności obsługi pakietów. Każdy z eksperymentów ma przyporządkowany indywidualnie parametr  $Y(0) = n$  początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie, którego wartości wynoszą 0, 5 oraz 10 pakietów. Rysunki 5.3, 5.4 oraz 5.5 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.

Analizując pierwszą grupę eksperymentów możemy wysunąć następujące, zgodne z oczekiwaniami wnioski:

- w przypadku gdy w chwili startu systemu nie ma żadnych pakietów wymagających przetworzenia i serwer przechodzi w stan zawieszenia

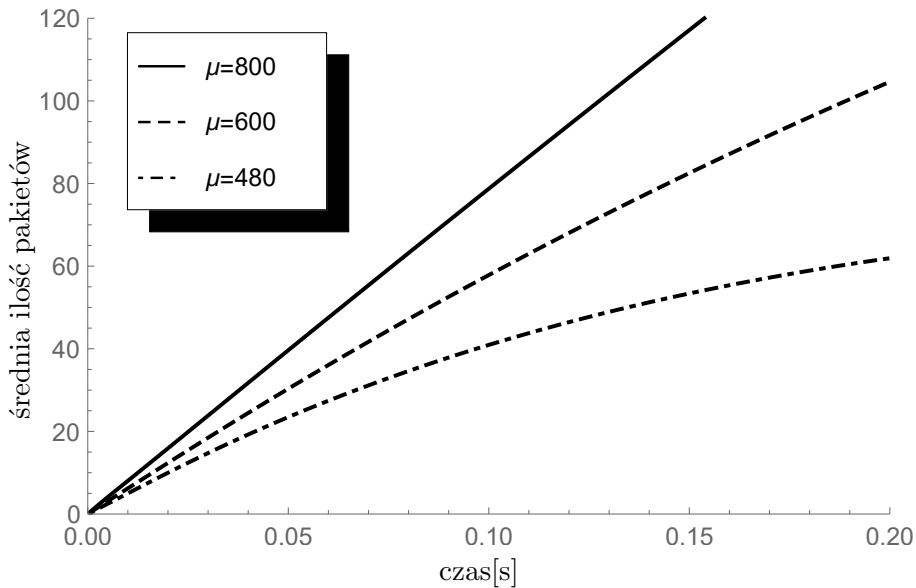




Rysunek 5.3: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 0\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.

obsługi (Rysunek 5.3), im wyższa jest intensywność obsługi zgłoszeń, tym prędzej następuje moment obsłużenia pierwszego pakietu (a tym samym punkt przecięcia krzywej wartości średniej ilości obsłużonych pakietów z osią czasu jest bliższy  $t = 0$ );

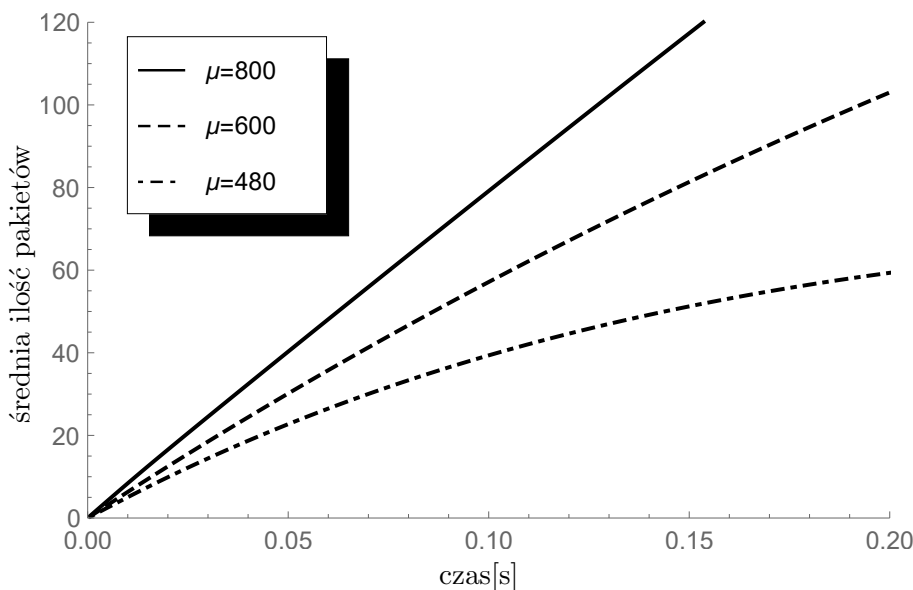
- w przypadku gdy w chwili startu systemu w buforze istnieją zakolejkowane pakiety wymagające obsługi (Rysunki 5.4 i 5.5), wówczas wszystkie krzywe wartości średniej ilości obsłużonych pakietów przecinają oś czasu dla  $t = 0$ ;
- im mniejsza jest intensywność obsługi pakietów, tym mniejsza jest średnia ilość obsłużonych pakietów;
- wraz ze wzrostem liczby zakolejkowanych w buforze w chwili startu systemu pakietów, niższa jest średnia ilość obsłużonych do chwili  $t = 0.20$  [s] pakietów. Fakt ten jest konsekwencją utraty pewnej ilości pakietów, która to utrata jest wynikiem następującego wcześniej pierwszego przepełnienia bufora oraz kolejnych występujących przepełnień z racji występujących w eksperymentach wysokich wartości średniego zapełnienia systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$ .



Rysunek 5.4: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 5\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.

### 5.3.3 Badanie wpływu zmian intensywności napływu zgłoszeń w złożonym procesie Poissona

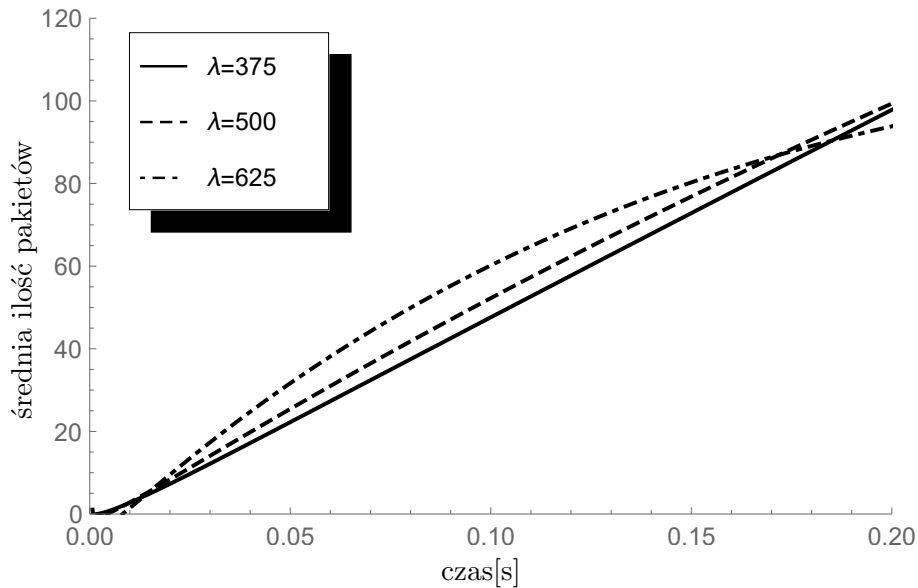
W kolejnych trzech eksperymentach przeanalizujemy zachowanie się wartości średniej ilości obsłużonych do chwili  $t$  zgłoszeń (5.3.1) w zależności od zmiennych wartości intensywności napływu pakietów. Znow rozważymy trzy scenariusze, w których parametr  $\lambda$  odpowiadający za intensywność napływu zgłoszeń przyjmuje wartości  $\lambda \in \{375, 500, 625\}$  pakietów/s, co odpowiada prędkościom przetwarzania danych rzędu 300, 400 i 500 kb/s. Intensywność obsługi zgłoszeń jest stała i wynosi  $\mu = 500$  pakietów/s, tym samym uzyskujemy obciążenie systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Pozostałe parametry początkowe są identyczne z przyjętymi w poprzednich eksperymentach: odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju wynosi średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$  oraz ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapelnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych intensywności napływu pakietów. Każdy z trzech eksperymentów ma przyporządkowany indywidualnie parametr  $n$  początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie – 0, 5 oraz 10 pakietów. Uzyskane wyniki zaprezentowano na Rysunkach 5.6, 5.7 oraz 5.8.



Rysunek 5.5: Wpływ zmian intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 10\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 600$  pakietów/s.

Wobec stałej dla wszystkich trzech eksperymentów wartości intensywności obsługi pakietów na poziomie  $\mu = 500$  pakietów/s w czasie  $t = 0.20$  [s] w przypadku ciągłej nieprzerwanej pracy serwer obsłuży średnio 100 pakietów – wszystkie zaprezentowane na wykresach rozkłady zmierzają ku tej granicy. Prezentowany na rysunkach i oznaczony linią ciągłą wykres wartości średniej  $\mathbf{E}^X$  liczby obsłużonych pakietów uzyskany dla średniego zapelnienia systemu na poziomie  $\kappa_b = 1.3125$  jest swoistą eksperymentalną realizacją koncepcji ciągłej nieprzerwanej pracy serwera. Obserwowany wzrost wartości  $\mathbf{E}^X$  w przybliżeniu jest swoistą funkcją liniową, której należy się spodziewać w przypadku nieprzerwanej obsługi kolejnych pakietów.

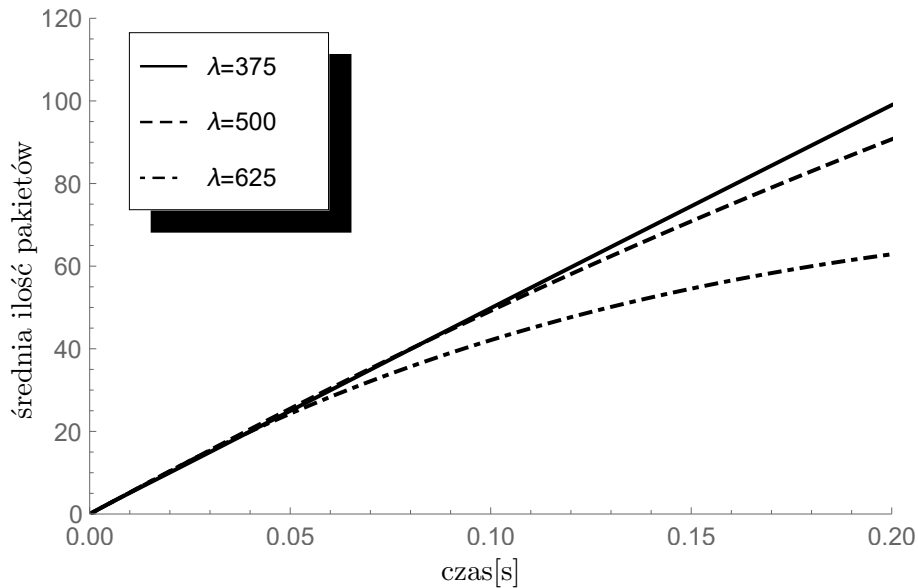
Na Rysunkach 5.7 i 5.8 widoczny jest, a wynikający z występujących w eksperymentach wysokich wartości średniego zapelnienia systemu  $\kappa_b \in \{1.75; 2.1875\}$  i początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie równej odpowiednio 5 oraz 10 pakietów, efekt spadku tempa wzrostu średniej ilości obsłużonych w czasie  $t \in [0, 0.20]$  [s] pakietów wraz ze wzrostem intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$ . Zastanówmy się głębiej nad tym efektem: mając na starcie wypełniony w połowie bądź całkowicie system uzyskujemy bardzo wysokie prawdopodobieństwo utraty pakietów; w procesie Poissona momenty nadejścia kolejnych pakietów są niezależnymi zmiennymi losowymi rozłożonymi nierównomiernie w czasie, zatem możliwe są spiętrzenia w ilości napływających w krótkim czasie pakietów, po których następuje pewien



Rysunek 5.6: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 0\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\mu = 500$  pakietów/s.

dłuższy od uśrednionego okres bez napływu pakietów – obydwie przytoczone fakty składają się na tym większe prawdopodobieństwo utraty pakietów w momentach spiętrzenia napływu, im większa jest intensywność  $\lambda$  napływu pakietów. W przypadkach takiego spiętrzenia zmniejsza się pula pozostałych napływających do systemu w zadanym czasie  $t \in [0, 0.20]$  [s] i możliwych do zakolejkowania a następnie obsłużenia pakietów. A zatem wartość średniej ilości obsłużonych do chwili  $t = 0.20$  pakietów jest zaniżona tym bardziej im wyższe jest opisane powyżej prawdopodobieństwo utraty pakietów w spiętrzeniach.

Nieco odmienne zachowanie uwidocznione jest w eksperymencie ukazanym na Rysunku 5.6, na którym dla  $\lambda \in \{500, 625\}$  zamiast postępującego od startu systemu spadku tempa wzrostu wartości  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 0\}$  obserwujemy początkowy wzrost tempa i następujący dopiero później stopniowy spadek. Powodem jest brak zgłoszeń obecnych w systemie w chwili jego startu. Opisany w poprzednim akapicie efekt utraty napływających pakietów z powodu spiętrzeń w ich napływie widoczny jest po pewnym czasie (z opóźnieniem), gdy dojdzie najpierw do pierwszego, a potem kolejnych całkowitych wypełnień bufora.

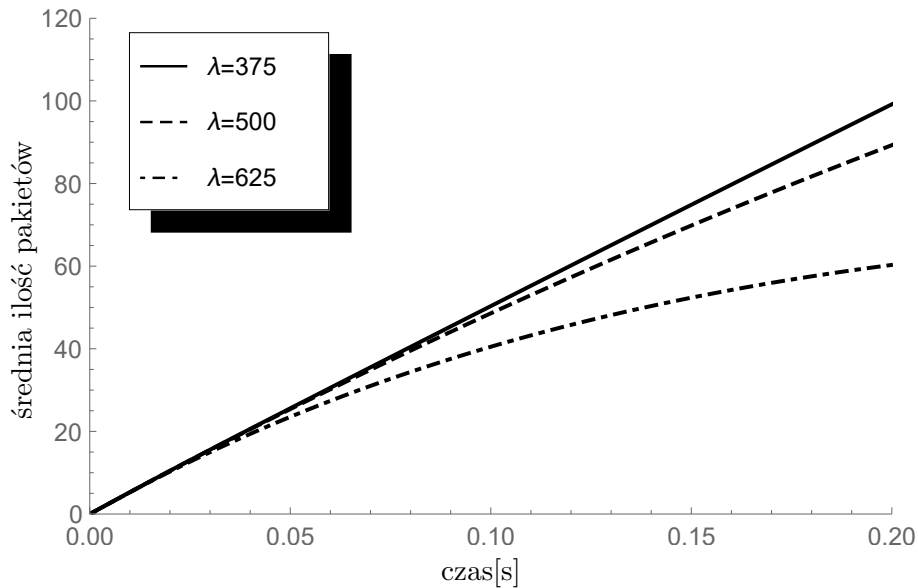


Rysunek 5.7: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 5\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\mu = 500$  pakietów/s.

### 5.3.4 Badanie wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie w złożonym Procesie Poissona

Rozpatrując następujące trzy eksperymenty dokonamy analizy wpływu zmian wartości początkowej liczby zgłoszeń na wartości średnie liczby obsłużonych do chwili  $t$  zgłoszeń (5.3.1). Ponownie rozważymy zmienne wartości obciążenia systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$ . Do uzyskania wymienionych wartości obciążeń posłużymy się następującymi kombinacjami parametrów napływu i obsługi pakietów:  $(\lambda, \mu) \in \{(600, 800); (600, 600); (600, 480)\}$ . Reszta parametrów pozostaje bez zmian: odwrotność parametru skali  $\xi = 1000$  (wówczas pojedynczy okres przestoju trwa średnio  $t_p = 0.002$  s), średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych obciążeń systemu. Rysunki od 5.9 do 5.11 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.

W pierwszym eksperymencie (Rysunek 5.9), w którym średnie zapełnienie systemu umiarkowanie przekracza jego pojemność ( $\kappa_b = 1.3125 > 1$ ), możemy zaobserwować stały liniowy wzrost średniej ilości obsłużonych pakietów w przyjętym przedziale czasu. Zróźnicowanie początkowej liczby zgłoszeń obecnych w systemie, zgodnie z oczekiwaniem, ma niewielki wpływ na



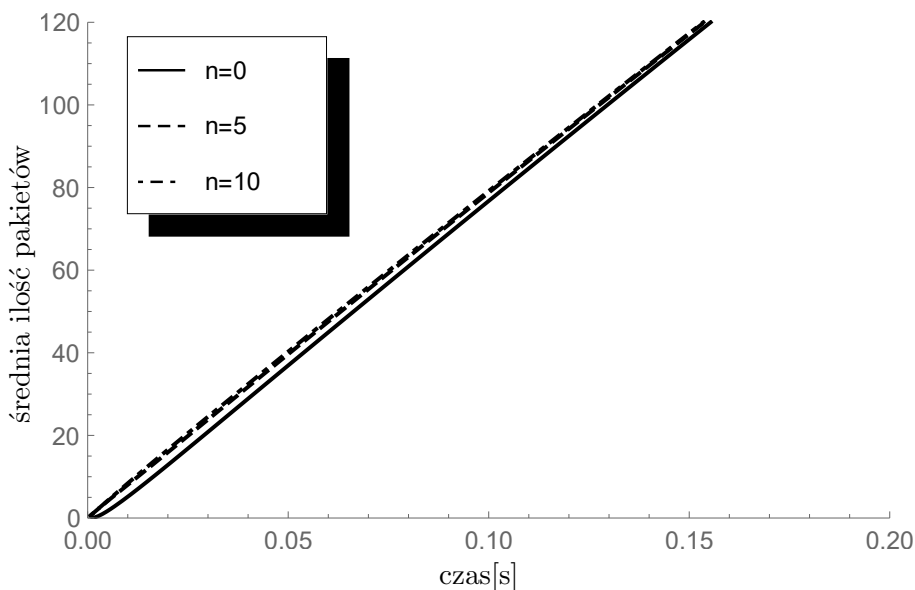
Rysunek 5.8: Wpływ zmian intensywności napływu zgłoszeń  $\lambda$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 10\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\mu = 500$  pakietów/s.

charakter rozkładu. Różnica sprowadza się do natychmiastowego rozpoczęcia przetwarzania zakolejkowanych na starcie systemu pakietów, które to zwiększają wartość  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = n\}$  tuż po starcie systemu.

Na Rysunkach 5.10 i 5.11 ponownie obserwujemy efekt spadku tempa wzrostu średniej ilości obsłużonych w czasie  $t \in [0, 0.20]$  [s] pakietów (zapełnienie systemu wynosi  $\kappa_b = 1.75$  i  $\kappa_b = 2.1875$  odpowiednio). Efekt ten został omówiony w podrozdziale 5.3.3. Spadek tempa jest tym większy, im większe jest początkowe wypełnienie bufora pakietami w chwili startu systemu.

### 5.3.5 Badanie wpływu zmian długości pojedynczego okresu przestoju w złożonym procesie Poissona

W ostatnich trzech eksperymentach zbadamy wpływ zmian długości pojedynczego okresu przestoju na wartości średnie liczby obsłużonych do chwili  $t$  zgłoszeń (5.3.1), rozpatrując trzy scenariusze, w których parametr odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  przyjmuje wartości 500, 1000 oraz 1500 (co przekłada się na długości pojedynczego okresu przestoju  $t_p$  wynoszące odpowiednio 0.004, 0.002 i 0.0013(3) sekundy). Każdy z eksperymentów charakteryzuje się odmienną wartością obciążenia systemu na poziomie  $\rho \in \{0.75; 1; 1.25\}$ , które to wartości są rezultatem przyjęcia następujących kombinacji parametrów napływu i obsługi pakietów  $(\lambda, \mu) \in \{(375, 500); (500, 500); (625, 500)\}$ .

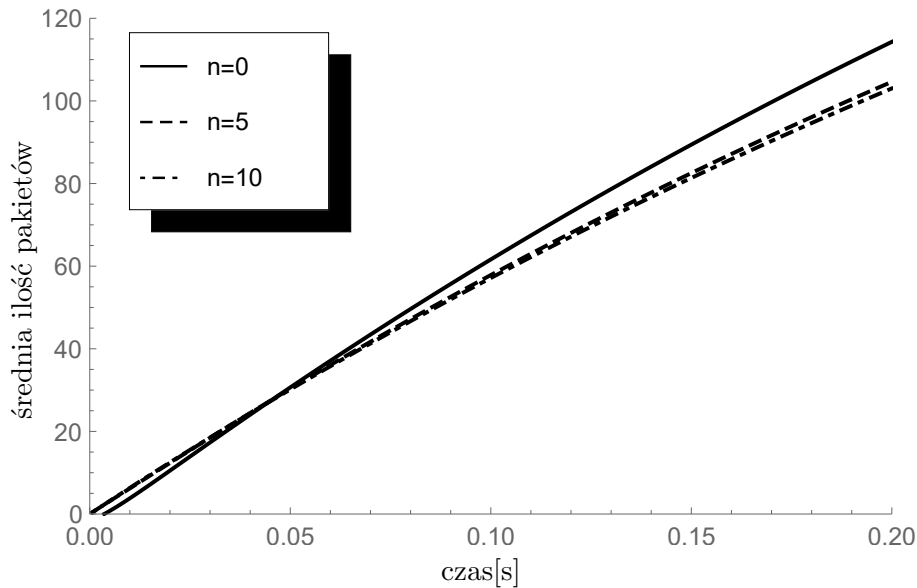


Rysunek 5.9: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X \{h(t) | Y(0) = n\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 600$  pakietów/s oraz  $\mu = 800$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 0.75$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 1.3125$ ).

Reszta parametrów powtórnie pozostaje niezmienniona: średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.75$ , ciąg prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25, 0, \dots\}$ , wobec czego otrzymujemy średnie zapełnienie systemu na poziomie  $\kappa_b \in \{1.3125; 1.75; 2.1875\}$  względem poszczególnych obciążeń systemu. Rysunki 5.12, 5.13 oraz 5.14 prezentują otrzymane wyniki obliczeń numerycznych.

Zgodnie z oczekiwaniami, im wyższa wartość odwrotności parametru skali  $\xi = \lambda_v$  (a tym samym krótszy pojedynczy okres przestoju  $t_p$ ), tym większa jest średnia ilość obsłużonych do chwili  $t$  pakietów. Rezultat ten jest tym mocniej widoczny, im bardziej przepełniony jest system. Najdobitniej prezentuje to Rysunek 5.14, na którym obserwujemy intensywne obniżanie się tempa wzrostu średniej ilości obsłużonych w czasie  $t \in [0, 0.20]$  [s] pakietów, co jest skutkiem skumulowania wpływu dwóch czynników:

1. wydłużania długości pojedynczego okresu przestoju  $t_p$ ;
2. wzrostu, wraz z długością  $t_p$ , utraty pakietów spowodowanej całkowitym zapełnieniem bufora pakietami w okresach zawieszenia przez serwer obsługi.

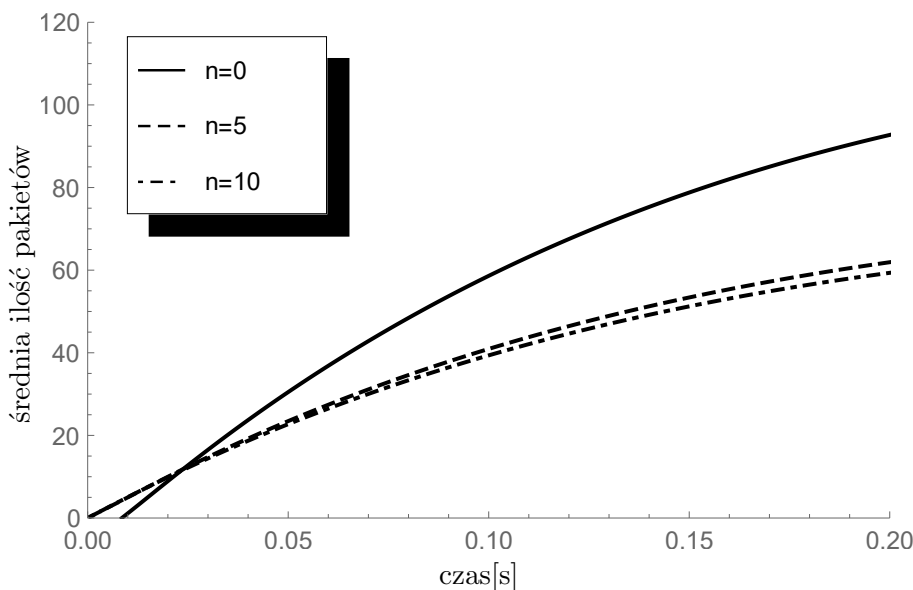


Rysunek 5.10: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = n\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 600$  pakietów/s oraz  $\mu = 600$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 1.0$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 1.75$ ).

## 5.4 Podsumowanie rozdziału

Przeprowadzona w podrozdziale 5.3 analiza otrzymanych wartości średnich liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów (w stanie nieustalonym) dała nam możliwość wglądu w charakterystykę procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w modelu kolejkowym z dyscypliną zawieszenia obsługi. Zaprezentowane wykresy uwidaczniają wpływ zmian wartości parametrów opisujących: intensywność napływu zgłoszeń i ich obsługi, początkową liczbę zakumulowanych w buforze pakietów, długość okresu przestoju, co pozwala na określenie stopnia wpływu tychże parametrów na cechy rozpatrywanych wartości oczekiwanych  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = n\}$ . W przypadku mocno obciążonego systemu (gdy zapełnienie systemu wynosi  $\kappa_b = 1.75$  lub  $\kappa_b = 2.1875$ ), zmiana wartości dowolnego z rozpatrywanych parametrów ma istotny lub wręcz silny wpływ na kształt krzywej reprezentującej średnią ilość obsłużonych do chwili  $t$  pakietów. Z kolei dla mniej obciążonego ruchem wejściowym systemu ( $\kappa_b = 1.3125$ ) możemy stwierdzić, iż wartość intensywności obsługi zgłoszeń  $\mu$  wykazuje największy wpływ na kształt omawianej krzywej. W drugiej kolejności wartość intensywności napływu pakietów  $\lambda$  także wykazuje istotny wpływ na kształt tejże krzywej. Najmniejszy wpływ obserwujemy w przypadku zmian wartości odwrotności parametru skali rozkładu pojedynczego

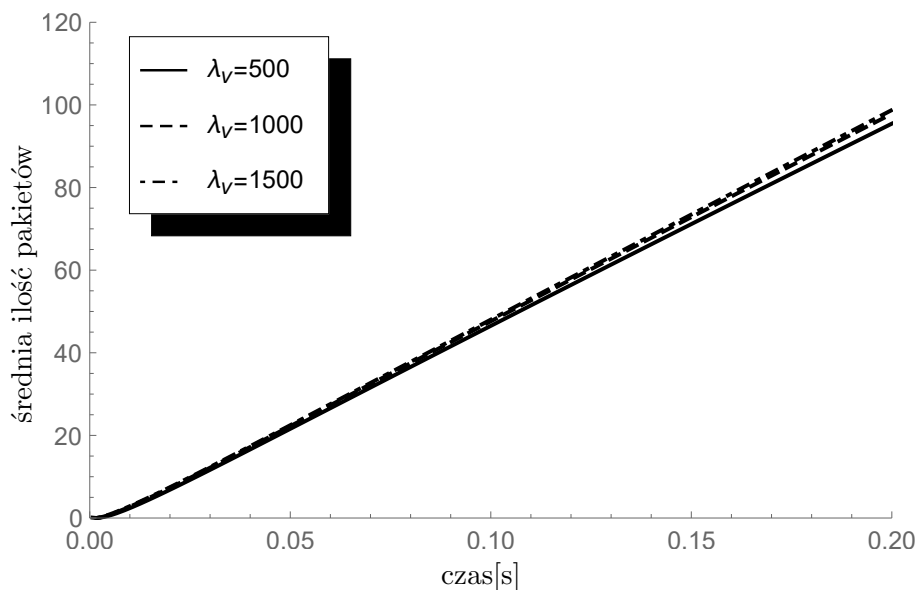




Rysunek 5.11: Wpływ zmian wartości liczby zgłoszeń  $n$  obecnych wewnątrz systemu w chwili  $t = 0$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X \{h(t) \mid Y(0) = n\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 600$  pakietów/s oraz  $\mu = 480$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 1.25$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 2.1875$ ).

okresu przestoju  $\xi$  oraz zmian wartości początkowej liczby pakietów  $n$  obecnych w systemie.

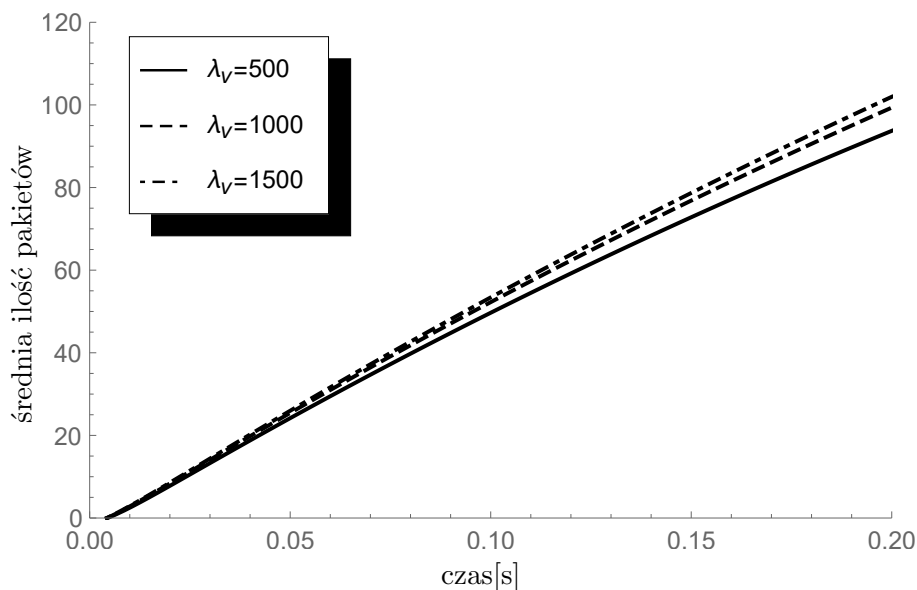
Wyprowadzone w niniejszym rozdziale wzory stanowią istotne uzupełnienie stanu wiedzy na temat zachowania się procesów zliczających obsłużone zgłoszenia w szerokim spektrum modeli kolejkowych z pojedynczym oraz grupowym napływem zgłoszeń. Przegląd wybranych modeli kolejkowych, dla których istnieją publikacje opisujące omawianą charakterystykę rozpoczniemy od pracy [60]. Opisano w niej rozkład czasu pomiędzy kolejnymi momentami zakończenia obsługi pakietów w kolejce typu  $GI/G/1$  uzyskany poprzez analizę rozkładu okresów bezczynności serwera (ang. *server idle time*). Inne podejście względem tego samego modelu zaproponował autor publikacji [53], wprowadzając procedurę obliczania współczynników szeregu MacLaurina momentów i kowariancji procesu wyznaczającego momenty obsłużenia kolejnych zgłoszeń kolejki  $GI/G/1$  względem parametru skali  $\theta$  w przyjętym iloczynie  $\theta \cdot S_n$ , gdzie  $S_n$  jest czasem obsługi  $n$ -tego pakietu według przyjętego rozkładu czasów obsługi. Wykazano, że w pewnych warunkach momenty i kowariancje posiadają pochodne dowolnego rzędu dla  $\theta = 0$  i można je wyznaczyć na podstawie uzyskanych współczynników. Pochodne te mogą być następnie użyte do interpolacji momentów i kowariancji procesu wyznaczającego momenty obsłużenia kolejnych zgłoszeń, a interpo-



Rysunek 5.12: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 0\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 375$  pakietów/s oraz  $\mu = 500$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 0.75$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 1.3125$ ).

lacja ta może być dokonana za pomocą wielomianów lub funkcji wymiernych. W [169] sformułowano twierdzenie graniczne wspierające aproksymację procesu zliczającego obsłużone pakiety wieloserwerowej kolejki  $G_t/GI/\infty$ , gdzie proces napływu charakteryzuje zmienna w czasie funkcja intensywności napływu  $l(t)$ , a wiele stanowisk obsługi jest zajętych ciągłą obsługą zgłoszeń.

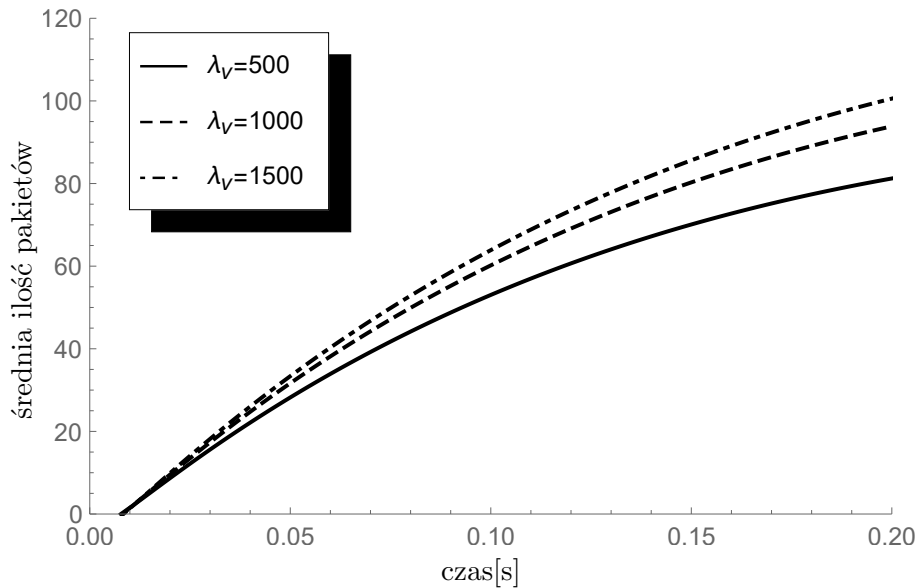
W dalszej części przeglądu przejdziemy do opracowań opisujących bardziej uszczegółowione typy modeli kolejkowych. W [54] dla prostego modelu  $M/M/1$  został wyprowadzony wzór na prawdopodobieństwo  $P(j, t)$ , iż dokładnie  $j$  pakietów zostanie obsłużonych w przedziale czasu  $[0, t)$ . Wykonano przykładowe obliczenia i zaprezentowano je w formie tabeli prawdopodobieństw zależnej od parametrów  $j$  oraz  $t$ . W publikacji [143] przeanalizowano zachowanie procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w kolejce typu  $MAP/SM/1$ . Na podstawie wyprowadzonych wyrażeń autor wyjaśnia, jaki wpływ na proces zliczający obsłużone zgłoszenia mają występujące w systemie spiętrzenia ilości zgłoszeń (ang. *burstiness*) oraz korelacja procesu napływu i obsługi. Artykuł [138] analizuje model  $N/G/1$ , w którym proces napływu pakietów jest tak zwanym procesem punktowym  $N$  (zwanym też procesem fazowym), obejmującym m. in. proces MMPP (ang. *Markov-Modulated Poisson Process*). Dokonana w artykule analiza opiera się na wyznaczeniu transformaty Laplace’a–Stieltjesa rozkładów czasu pomiędzy ko-



Rysunek 5.13: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 0\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 500$  pakietów/s oraz  $\mu = 500$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 1.0$ , średnie zapełnienie systemu  $\kappa_b = 1.75$ ).

lejnymi momentami zakończenia obsługi pakietów w kolejce typu  $N/G/1$ . Przykłady liczbowe wykazują, iż początkowa korelacja czasów między przybyciem kolejnych pakietów jest zachowana w przypadku kolejnych momentów zakończenia obsługi pakietów. Model kolejkowy  $MMPP/G/1$  badany jest w pracy [172]. Scharakteryzowano w niej proces zliczający obsłużone zgłoszenia wykorzystując do tego klasyczną, opartą na włożonych łańcuchach Markowa metodologię, która jednakże nie pozwala na zapisanie jawnych wzorów dla omawianej charakterystyki. Zastosowany został markowski proces odnowy w momentach zakończenia obsługi zgłoszeń. Wyprowadzono wzory zarówno na całkę Laplace’a–Stieltjes’a stacjonarnej funkcji rozkładu czasów obsługi zgłoszeń, jak i rekurencyjny wzór na kowariancję czasów pomiędzy kolejnymi momentami zakończenia obsługi zgłoszeń. Wykonano także eksperymenty numeryczne, które potwierdziły poprawność wyprowadzonych wzorów.

Odmienne podejście do przytoczonych klas modeli kolejkowych zostało zaprezentowane w pracy [62]. Artykuł traktuje o modelach  $ME/ME/1$ , gdzie  $ME$  oznacza klasę macierzowych rozkładów wykładniczych, identyczną z klasą rozkładów, które posiadają transformację Laplace’a–Stieltjesa o wartościach rzeczywistych. W pracy wykorzystano konstrukcję “quasi” procesu urodzin i śmierci (ang. *Quasi-Birth-and-Death Process (QBD)*) dla nieskoń-



Rysunek 5.14: Wpływ zmian wartości odwrotności skali  $\xi = \lambda_v$  na wartość średnią  $\mathbf{E}^X\{h(t) | Y(0) = 0\}$  liczby obsłużonych do chwili  $t$  pakietów dla  $\lambda = 625$  pakietów/s oraz  $\mu = 500$  pakietów/s (obciążenie systemu  $\rho = 1.25$ , średnie zapelnienie systemu  $\kappa_b = 2.1875$ ).

czoney kolejki  $GI/G/1$ .

Skończona aproksymacja QBD odzwierciedla charakterystykę procesu liczącego obsłużone zgłoszenia, który to jest niezależny od rozmiaru bufora w aproksymacji, wykorzystując do tego rozkład wirtualnego czasu oczekiwania na obsługę. Rozkład ten jest uzyskiwany poprzez znalezienie  $m_s$  wartości własnych w ujemnej półpłaszczyźnie dla macierzy sprzężeń  $C$ . Definicja i koncepcja zastosowania tejże macierzy została zaczerpnięta z cytowanej w artykule pracy [109] opisującej rozkład opóźnienia kolejkowania w modelu  $PH/PH/1$ , gdzie  $PH$  oznacza fazowy rozkład prawdopodobieństwa. Na koniec autor porównuje otrzymane wyniki z wynikami osiągniętymi dla systemu  $GI/G/1/N$ .

Jako jeden z przykładów praktycznego zastosowania rozważań nad procesem opisującym obsłużone do chwili  $t$  zgłoszenia wyróżnijmy artykuł [146]. Przedstawiono w nim model analityczny procesu odlotów samolotów z lotniska. Procedura modelowania rzeczywistego procesu obejmuje oszacowanie niezakłóconych rozkładów czasu kołowania oraz opracowanie modelu kolejkowego w oparciu o analizę stanów nieustalonych systemów kolejkowych  $D/E/1$ .

Parametry procesu obsługi pasa startowego szacowane są na podstawie danych operacyjnych. Wykorzystując jako dane wejściowe harmonogram ob-

sługi statku powietrznego przez kontrolę lotów, model estymuje przewidywany harmonogram użycia pasa startowego oraz czasy startu poszczególnych samolotów. Szacuje się również oczekiwany czas do kołowania, opóźnienie w kolejce i jego wariancję dla każdego lotu, a także poziom zatłoczenia lotniska, rozmiar kolejki na pasie startowym oraz przepustowość lotniska. Proponowane podejście ilustruje studium przypadku oparte na międzynarodowym porcie lotniczym Newark Liberty, a model jest estymowany przy użyciu danych z 2011 r.

Zacytowane do tej pory artykuły opisują modele z pojedynczym napływem pakietów oraz brakiem uwzględnienia okresów zawieszenia obsługi. W dalszej części przejdziemy do modeli z grupowym napływem pakietów, poczynając od takich, które również nie posiadają mechanizmu zawieszenia obsługi, i zmierzając do opracowań zawierających taki mechanizm. W [173] zaproponowano rodzinę skończonych aproksymacji dla procesu liczącego obsłużone zgłoszenia kolejki  $BMAP/MAP/1$ . Przybliżenia procesu wyjściowego uzyskano za pomocą techniki ETAQA (ang. *Efficient Technique for the Analysis of Quasi-Birth-Death processes by Aggregation*) stosowanej w procesach Markowa typu  $M/G/1$ , a zaproponowanej w pracy [136]. Zaprezentowane przybliżenia są indeksowane przez parametr  $n$  ( $n > 1$ ), który określa wielkość modelu wyjściowego jako  $n+1$  bloków procesu typu  $M/G/1$ . Takie przybliżenie zachowuje rozkład brzegowy rzeczywistego procesu liczącego obsłużone zgłoszenia oraz korelacje opóźnień czasów obsługi kolejnych pakietów aż do indeksu  $n - 2$ . W artykule [71] rozważany jest system kolejkowy ze skończonym buforem i grupowym napływem pakietów opisanym złożonym procesem Poissona. Skonstruowany został układ równań całkowych dla funkcji rozkładu liczby pakietów  $h(t)$  obsłużonych do chwili  $t$ , uwarunkowany początkową ilością obecnych w systemie pakietów. Następnie otrzymany został wzór dla podwójnej transformaty „mieszanej” rozkładu  $h(t)$  (wyprowadzony przy użyciu techniki potencjału). Na podstawie tej reprezentacji, numerycznie przy użyciu jednego z algorytmów aproksymacji odwrotnej transformacji Laplace’a, obliczona została średnia ilość  $E_n h(t)$  obsłużonych do chwili  $t$  pakietów, gdzie  $n$  oznacza początkowy stan bufora akumulującego. Ponadto badane jest zachowanie procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w przypadku, gdy rozmiar bufora dąży do nieskończoności. Dołączone są również przykłady numeryczne.

Bardziej rozbudowany model typu  $BMAP/G/1/N$  zaprezentowano w pracy [74]. Autor wykorzystuje ideę włożonego łańcucha Markowa i wzór na prawdopodobieństwo całkowite do budowy układu równań całkowych dla warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa liczby pakietów przetworzonych do ustalonego czasu  $t$ . Wyprowadzone zostaje rozwiązanie odpowiedniego układu, zapisanego w postaci „mieszanych” podwójnych transformat, przy użyciu podejścia opartego na algebrze liniowej i rachunku macierzowym. W pracy zaprezentowano także niektóre aspekty numerycznego podejścia do otrzymanych wyników analitycznych, w szczególności wykorzy-

stanie metody uniformizacyjnej wraz z przykładem numerycznym.

Pierwszym zacytowanym artykułem, opisującym model zawierający mechanizm zawieszenia obsługi będzie praca [42]. Przeanalizowano w niej proces zliczający obsłużone zgłoszenia zarówno w przypadku systemu  $BMAP/G/1$  niezawierającego wielokrotnych okresów przestoju, jak i dla zawierającego takie okresy. Zamiast używać metody rekurencyjnej w celu uzyskania kowariancji pomiędzy  $n$  kolejnymi momentami zakończenia obsługi zgłoszeń, wyprowadzono macierzową reprezentację umożliwiającą obliczenie wybranych statystyk (średniej, wariancji, skośności). Za pomocą eksperymentów numerycznych zbadano również kilka interesujących zjawisk wykazanych w statystykach ilości obsłużonych pakietów. Kolejnym artykułem opisującym model z mechanizmem zawieszenia obsługi jest [69]. Zaprezentowane w nim podejście oparto na teorii odnowy, stosowanej do uzyskania wyników w przypadku ogólnym. Wyprowadzona została jawna reprezentacja transformaty Laplace'a funkcji tworzącej rozkładu prawdopodobieństwa  $h(t)$ . Wszystkie uzyskane formuły były funkcjami parametrów wejściowych systemu i czynników pewnej tożsamości faktoryzacji typu Wienera-Hopfa. Rozszerzeniem tej pracy jest artykuł [70], w którym zaproponowano innowacyjną metodę badania procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w stanie nieustalonym. Wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo całkowite i teorię odnowy, skierowano przeprowadzaną analizę – z systemu zawierającego grupowy napływ pakietów i wielokrotne okresy przestoju w momentach opróżnienia systemu z pakietów wymagających obsłużenia – na badanie odpowiedniego systemu bez okresów zawieszenia obsługi. Reprezentację dla rozkładu procesu liczącego obsłużone zgłoszenia uzyskano bez ograniczeń dotyczących rozkładów zmiennych losowych charakteryzujących wielkości grup, czas obsługi pojedynczego zgłoszenia oraz długość okresów przestoju. Formuła jest użyteczna numerycznie dla prostszych systemów, ponieważ została zapisana jedynie za pomocą rozkładów „wejściowych” systemu i związanych z tymi rozkładami składowych pewnej tożsamości faktoryzacyjnej typu Wienera-Hopfa. W publikacji [103] rozważono proces zliczający i optymalną strategię sterowania dla modelu kolejowania  $Geo/G/1$  w czasie dyskretnym, w którym system działa pod kontrolą polityki  $\text{Min}(N, V)$  z wielokrotnymi okresami przestoju. Zgodnie z tą polityką, gdy wszystkie zgłoszenia w systemie zostaną obsłużone, serwer przechodzi w tryb zawieszenia obsługi, gdzie okres zawieszenia jest dyskretną zmienną losową  $V$ . W trakcie tego okresu, jeśli liczba zgłoszeń w systemie osiągnie  $N$ , serwer natychmiast zaczyna obsługiwać oczekujące zgłoszenia. Jeśli natomiast w kolejce jest mniej niż  $N$  zgłoszeń, lecz co najmniej jedno, serwer kontynuuje okres zawieszenia do jego upłynięcia, a następnie rozpoczyna obsługę zgromadzonych w buforze zgłoszeń. Autorzy uzyskują jawne wyrażenie funkcji tworzącej dla wartości oczekiwanej liczby obsłużonych zgłoszeń w przedziale  $(0+, n+]$  niezależnie od stanu początkowego systemu.

Część wyników zaprezentowanych w niniejszym rozdziale, obejmujących

zwartą postać podwójnej transformaty Laplace'a rozkładu warunkowego liczby zgłoszeń obsłużonych do chwili  $t$  (Twierdzenie 5.1), analizę wartości średnich obsłużonych do chwili  $t$  pakietów (zależność (5.3.1) obliczona dla prostego procesu Poissona) oraz przykłady wykonanych numerycznych obliczeń, opublikowano w następującym artykule [81].

# Rozdział 6

## Modele kolejkowe w ujęciu Dynamiki Systemowej

W odróżnieniu od poprzednich rozdziałów, prezentujących rezultaty analityczne oraz symulacyjne wyznaczonych charakterystyk kolejkowania rozważanego w dysertacji modelu z dyscypliną zawieszenia obsługi, w niniejszym rozdziale omówiona zostanie koncepcja właściwego doboru długości pojedynczych okresów przestoju z uwagi na ustalone wartości intensywności napływu, obsługi zgłoszeń oraz pojemności bufora kolejującego zgłoszenia. W celu doprecyzowania sformułowania „właściwy dobór” odwołamy się do specyfiki bezprzewodowych sieci sensorowych, stanowiących główne źródło inspiracji autora, w których to sieciach teoria kolejek znajduje zastosowanie (przykładowe prace: [159], [160], [102], [77], [51], [22]). W szczególności odniesiemy się do podgrupy sieci opartych na technologii LoRa (ang. *Long Range Radio*) i protokole LoRaWAN (ang. *LoRa Wide Area Network*) [9], tworzących system komunikacji bezprzewodowej dalekiego zasięgu o małej mocy (LPWAN), wykorzystywany w transmisji pakietów pomiędzy urządzeniami internetu rzeczy IoT (ang. *Internet of Things*).

Architektura sieci LoRaWAN<sup>®</sup> jest wdrażana w topologii gwiazdy gwiazd (ang. *star-of-stars*), w której bramy przekazują wiadomości między urządzeniami końcowymi a centralnym serwerem sieciowym. W październiku 2022 roku [7] funkcjonalność protokołu LoRaWAN została poszerzona o specyfikację [8] urządzenia przekaźnikowego (ang. *relay*) uczestniczącego w przesyłaniu pakietów pomiędzy urządzeniami końcowymi a bramami. Przekaznik, jako urządzenie zasilane bateryjnie, umożliwia łatwe we wdrożeniu rozszerzenie zasięgu sieci za ułamek kosztów dodania dodatkowych bram wymagających podłączenia zasilania z sieci energetycznej. Z uwagi na limitowaną pojemność baterii, mechanizm przesyłu pakietów przez przekaźnik wymaga dużej efektywności energetycznej, co z kolei przekłada się na konieczność stosowania wszelkich możliwych mechanizmów pozwalających na oszczędność energii przy jednoczesnym braku utraty funkcjonalności urządzenia. Owymi przekaźnikami mogą być dedykowane urządzenia bądź urządzenia wspierające



technologię LoRa, urządzenia desygnowane do takiej roli tymczasowo, m. in. przekaźniki mobilne umożliwiające odbiór danych z czujników, buforujące je i wysyłające do przewodowych punktów dostępowych, gdy znajdują się w ich pobliżu [123].

W kontekście omawianego w dysertacji modelu kolejkowego, przekaźnik jest swoistym „serwerem” obsługującym przesył zgłoszeń w górę topologii gwiazdy. Każdy okres zawieszenia obsługi, wyzwany opróżnieniem bufora przekaźnika ze zgłoszeń, jest równoznaczny z przejściem w niskoenergetyczny tryb uśpienia. Przetwarzanie zgłoszeń związane jest z dwoma trybami, zróżnicowanymi w kwestii zużycia energii. Każde napływające do przekaźnika zgłoszenie powiązane jest z trybem nasłuchu, a każde obsłużone zgłoszenie z trybem transmisji. Przyjmijmy w uproszczeniu, iż ilość energii zużyta na sam nasłuch oraz samą transmisję pakietu jest stała. Wówczas miejscem, w którym możemy dokonać optymalizacji energetycznej w przekaźniku jest algorytm przełączania się pomiędzy trybami. Każde przełączenie urządzenia w inny tryb pracy powiązane jest z jakimś kosztem energetycznym, na który składają się m. in. wykonanie zaprogramowanych instrukcji wprowadzających urządzenie w dany tryb oraz ewentualny rozruch odpowiednich modułów urządzenia. Tym samym ilość przełączeń pomiędzy trybami powinna być możliwie najmniejsza.

Zdefiniujmy następujący problem badawczy, który jest tożsamy z użytym w pierwszym akapicie sformułowaniem „właściwy dobór długości pojedynczych okresów przestoju” – jest nim dobór długości zapewniającej jak najmniejszą liczbę przełączeń pomiędzy obsługą zgłoszeń (tryb transmisji pakietów od przekaźnika do bramy) a okresem zawieszenia obsługi (tryb uśpienia i tryb nasłuchu pakietów pochodzących od urządzeń końcowych, rozpatrywane jako nierozłączna całość z uwagi na specyfikę rozważanego modelu kolejkowego). Na dobór wpływ ma również postawienie nacisku na wykluczenie bądź minimalizację utraty pakietów spowodowaną przepełnieniem bufora kolejkującego zgłoszenia w okresie zawieszenia obsługi. Innymi słowy, obsługa zgłoszeń powinna być bezstratna, płynna i okresowa, w następującym rozumieniu: serwer obsługuje grupę zgłoszeń, następnie przechodzi w stan spoczynku na możliwie jak najdłuższy okres (w trakcie którego w buforze gromadzi się nowa grupa zgłoszeń w ilości mniejszej bądź równej pojemności bufora), po czym rozpoczyna się kolejny cykl obsługi i spoczynku.

### 6.1 Dynamika Systemowa

W toku rozważań nad metodologią rozwiązywania tak postawionego problemu badawczego zrodziła się koncepcja przeniesienia zagadnienia kolejkowania pakietów na grunt Dynamiki Systemowej. Pojęcie Dynamiki Systemowej (ang. *System Dynamics* (SD)) związane jest na poziomie semantycznym z głównym jej aspektem, którym to jest ujmowanie dynamiki świata w od-

wzorowującym ją modelu symulacyjnym. Stwierdzenie, pochodzące z książki [43] Jaya Forrester (jednego z czołowych twórców SD), mówi: „Całkowanie (czyli akumulacja) przekłada się na czasowy charakter zachowań, produkuje opóźnienia pomiędzy strumieniami oraz stwarza dynamiczne zachowanie się systemu. Procesy całkowania w rzeczywistym świecie reprezentowane są w modelach poprzez równania poziomów. Dynamiczne zachowanie jest wynikiem procesu całkowania.” Jak możemy zauważyć, systemy kolejkowe swoim charakterem bardzo mocno wpisują się w koncepcje leżące u podstaw Dynamiki Systemowej. Wyprowadzone w niniejszej rozprawie wzory analityczne dla prezentowanego modelu kolejkowego typu  $M^X/G/1/N$  bazują na równaniach całkowych, a rezultaty numeryczne zaprezentowane na wykresach ukazują dynamikę zmian zachodzących w czasie od startu systemu. W książce [114] Łukaszewicz w następujący sposób opisuje używane przez Forrester trzynaście podstawowe elementy modeli symulacyjnych w ujęciu SD:

- poziom (oznaczmy go symbolem  $P_{level}[\cdot]$ ) – jest to stan wyróżnionego elementu systemu/zasoby (np. liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce na obsługę  $P_{level}[\text{Packets in queue}]$ ), a wielkość chwilowa poziomu równa jest zakumulowanej różnicy strumieni dopływu (np. nowych zgłoszeń) i odpływu (obsłużone zgłoszenia);
- strumień (oznaczmy go symbolem  $S_{rate}[\cdot]$ ) – element określający szybkość, z jaką zasoby (np. nowe zgłoszenia w sieci  $S_{rate}[\text{Accepted packets}]$ ) uzupełniają bądź uszczuplają zawartość przyporządkowanych im poziomów. Wielkość chwilowa strumienia regulowana jest przez stanowisko decyzyjne;
- stanowisko decyzyjne – element zawierający formułę decyzyjną, która reguluje wielkość strumieni w zależności od informacji o chwilowych stanach systemu.

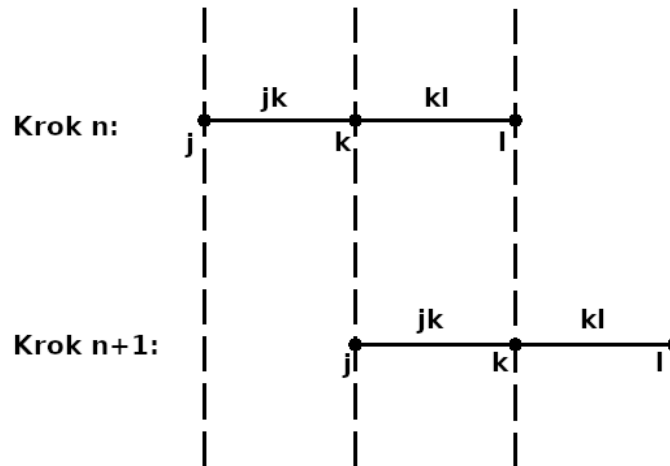
Mając zdefiniowane podstawowe elementy modelu, pochyłmy się nad podstawową strukturą modeli SD, którą stanowią pętle sprzężenia zwrotnego. Myślenie systemowe [21], [41] bazuje na stwierdzeniu, iż rzeczywistość nie jest linearna, lecz wielokierunkowa, złożona z różnorodnych zależności wyrażonych w postaci pętli sprzężeń zwrotnych. Sprzężenia zwrotne w systemie powodują, że skutek zachowania się systemu jest jednocześnie przyczyną tegoż zachowania. W kontekście modeli kolejkowych – składają się one z wielu powiązanych ze sobą przyczyn i skutków tworzących strukturę systemu i wpływających na dynamikę zmian. Przykładem może być zmienna charakterystyka napływu pakietów do stanowiska obsługi, która to determinuje okresy wzmożonej obsługi bądź jej zawieszenia, co z kolei prowadzi do oscylacyjnego charakteru odpowiedzi systemu. Wskutek chwilowego braku pakietów wymagających obsługi serwer rozpoczyna okres zawieszenia obsługi, który w rezultacie doprowadza do nagromadzenia się pakietów w buforze

kolejkującym i tym samym doprowadza do ciągłej obsługi zakolejkowanych zgłoszeń po zakończeniu okresu zawieszenia. Bardziej wyczerpujące omówienie pętli zwrotnych wraz z odpowiednimi przykładami możemy znaleźć w pierwszym rozdziale książki [67].

Model w ujęciu SD w zapisie analitycznym wyrażony jest za pomocą wzorów matematycznych, opisujących chwilowy stan wektorów poziomów, strumieni oraz parametrów modelu. Przyjmując zaprezentowaną w książce [67] konwencję Coyle'a (zob. także [34]) opisu wektorów, parametrów i związków występujących między nimi, a także mając na uwadze zaprezentowany na Rysunku 6.1 model upływu czasu, jesteśmy w stanie zapisać następujący układ równań wyrażających stan modelu SD w ustalonym kroku symulacji:

$$\begin{cases} l.k &= F(l.j, r.jk, a.j, l0, c), \\ r.kl &= G(l.k, r.kl, a.k, c), \\ a.k &= H(l.k, a.k, c). \end{cases} \quad (6.1.1)$$

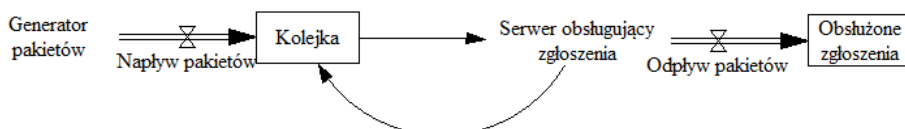
gdzie:  $l.k$  – wektor wartości poziomów w chwili  $k$ ,  $r.kl$  – wektor wartości strumieni w przedziale  $kl$ ,  $a.k$  – wektor wartości pomocniczych w chwili  $k$  (parametrów zmiennych w czasie np. ilości nowych pakietów przybyłych do systemu),  $l0$  – wektor wartości początkowych poziomów,  $c$  – wektor parametrów początkowych modelu (stałych w czasie np. rozmiar bufora kolejkującego),  $F; G; H$  są funkcjami wyrażającymi związki pomiędzy wektorami i parametrami w modelu.



Rysunek 6.1: Model upływu czasu modelu symulacyjnego w ujęciu Dynamiki Systemowej.

Uproszczony schemat ogólnie pojmowanego modelu kolejkowego, zamodelowanego zgodnie z regułami SD, przedstawiony jest na Rysunku 6.2. Kolejka (w domyśle bufor kolejkujący zgłoszenia) oraz obsłużone zgłoszenia są

poziomami  $P_{level}[\cdot]$ , napływ i odpływ pakietów są strumieniami  $S_{rate}[\cdot]$ , zaś generator pakietów oraz serwer obsługujący zgłoszenia są stanowiskami decyzyjnymi. Możemy zaobserwować również strukturę pętli sprzężenia zwrotnego pomiędzy kolejką a serwerem. Schemat ten przedstawia swoisty szkielet, na którym zostanie zbudowany właściwy model kolejkowy z dyscypliną zawieszenia obsługi.



Rysunek 6.2: Uproszczony schemat modelu kolejkowego w ujęciu Dynamiki systemowej.

## 6.2 Model kolejkowy w oprogramowaniu Vensim

Do budowy oraz symulacji modelu kolejkowego w ujęciu SD wykorzystamy oprogramowanie Vensim (dokumentacja elektroniczna [164], przykłady wykorzystywania oprogramowania w literaturze przedmiotu: [46], [100], [140]) firmy Ventana Systems Inc. Vensim jest jednym ze stworzonych specjalnie na potrzeby tworzenia symulacji SD programów komputerowych i rozwijany jest nieprzerwanie od 1988 roku. Spośród innych programów wyróżnia się rozbudowanymi możliwościami dokonywania optymalizacji na przeprowadzanych w nim symulacjach. Fakt ten w znaczącym stopniu przyczynił się do wyboru tegoż oprogramowania, umożliwiając autorowi dysertacji wykorzystanie wbudowanego w program optymalizatora, bazującego na metodzie Powella [131]. Program oferuje również możliwość wyznaczenia przedziałów ufności w oparciu o wbudowaną w symulator metodę Monte Carlo ([14], [16]).

Stworzony w oprogramowaniu Vensim model kolejkowy obwarowany jest pewnymi ograniczeniami, związanymi ze specyfiką środowiska symulacyjnego, które jako produkt komercyjny jest środowiskiem zamkniętym, uniemożliwiającym ingerencję w kod źródłowy. Omówmy pokrótce występujące ograniczenia oraz wynikającą z nich specyfikę stworzonej symulacji (Rysunek 6.3):

1. Z uwagi na zgodność środowiska symulacyjnego z występującym w SD modelem upływu czasu (Rysunek 6.1) krok symulacji  $k_s$  (ang. *Time step*) jest stały i definiowany jednorazowo w ustawieniach programu Vensim (definiowalna jest tylko jednostka czasu, np. 100 ms). Wszystkie przeliczenia równań (6.1.1), opisujących stan modelu, dokonywane

są co zdefiniowany krok  $k_s$  i nie mogą być wykonane w żadnym innym losowym momencie. W efekcie występujące w modelu kolejkowym procesy, których długość trwania winna być losowa (np. okres zawieszenia obsługi), są zdyskretyzowane do krotności  $n \cdot k_s$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) kroku symulacji.

2. Program Vensim nie posiada wbudowanej funkcji realizującej wprost proces stochastyczny Poissona. Istniejąca funkcja losująca wartości liczbowe zgodnie z rozkładem wykładniczym nie posiada opcji losowania momentów czasu, a jak już zostało wspomniane, krok  $k_s$  pomiędzy kolejnymi przeliczeniami stanu symulacji jest stały i nie może być zadany żadnym rozkładem (co umożliwiłoby stworzenie autorskiej wersji procesu Poissona w oprogramowaniu). W celu zamodelowania złożonego procesu Poissona posłużymy się inną wbudowaną funkcją – Random Poisson – która to losuje wartości zgodnie z rozkładem Poissona o zadanej wartości oczekiwanej  $\lambda$ . Zdefiniowana w tejże funkcji  $\lambda$  jest w istocie intensywnością z jaką losowane są poszczególne wartości w zadanym krokiem  $k_s$  przedziale czasu. Ta własność pozwala na zapewnienie losowości zarówno wobec rozmiaru pakietu napływającego (Definicja 1.8) jak i dyskretnej chwili czasu wyrażonej  $n$ -tym krokiem symulacji, w której ten pakiet pojawia się w systemie. W symulowaniu złożonego procesu Poissona skorzystamy z faktu, że jeśli zbiór losowych momentów w przestrzeni czasu tworzy proces Poissona, to liczba momentów w okresie  $T_s$  o skończonej długości jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. Przyjętym w symulacji okresem  $T_s$  będzie jedna sekunda.
3. Oprogramowanie nie posiada również wbudowanej funkcjonalności realizującej instrukcję pętli o zadanym cyklu. W przypadku omawianego w rozprawie mechanizmu zawieszenia obsługi – naturalną realizacją funkcjonalności umożliwiającą odczekanie zadanego okresu przed ponownym wznowieniem obsługi byłaby konstrukcja odpowiedniej pętli. Brak takowej funkcjonalności przełożył się na wykonywany z krokiem  $k_s$  mechanizm pomniejszania pozostałego zasobu  $P_{level}$ [Remaining vacation cycle time], który to zasób jest wartością całkowitą reprezentującą pozostałą liczbę kroków składających się na okres zawieszenia obsługi. Widoczny na Rysunku 6.3, a oznaczony zielonym wielokątem blok poziomów, strumieni oraz stanowisk decyzyjnych, jest autorską realizacją mechanizmu zastępującego brakującą klasyczną konstrukcją pętli.
4. W związku z wymienionymi ograniczeniami wynikającymi za specyfiki środowiska symulacyjnego, stworzony w programie Vensim model kolejkowy jest modelem typu  $M^X/D/1/N$ . Dla uproszczenia przyjmujemy, iż czas  $T_{Serw}$  potrzebny do obsłużenia pakietu obsługiwalnego

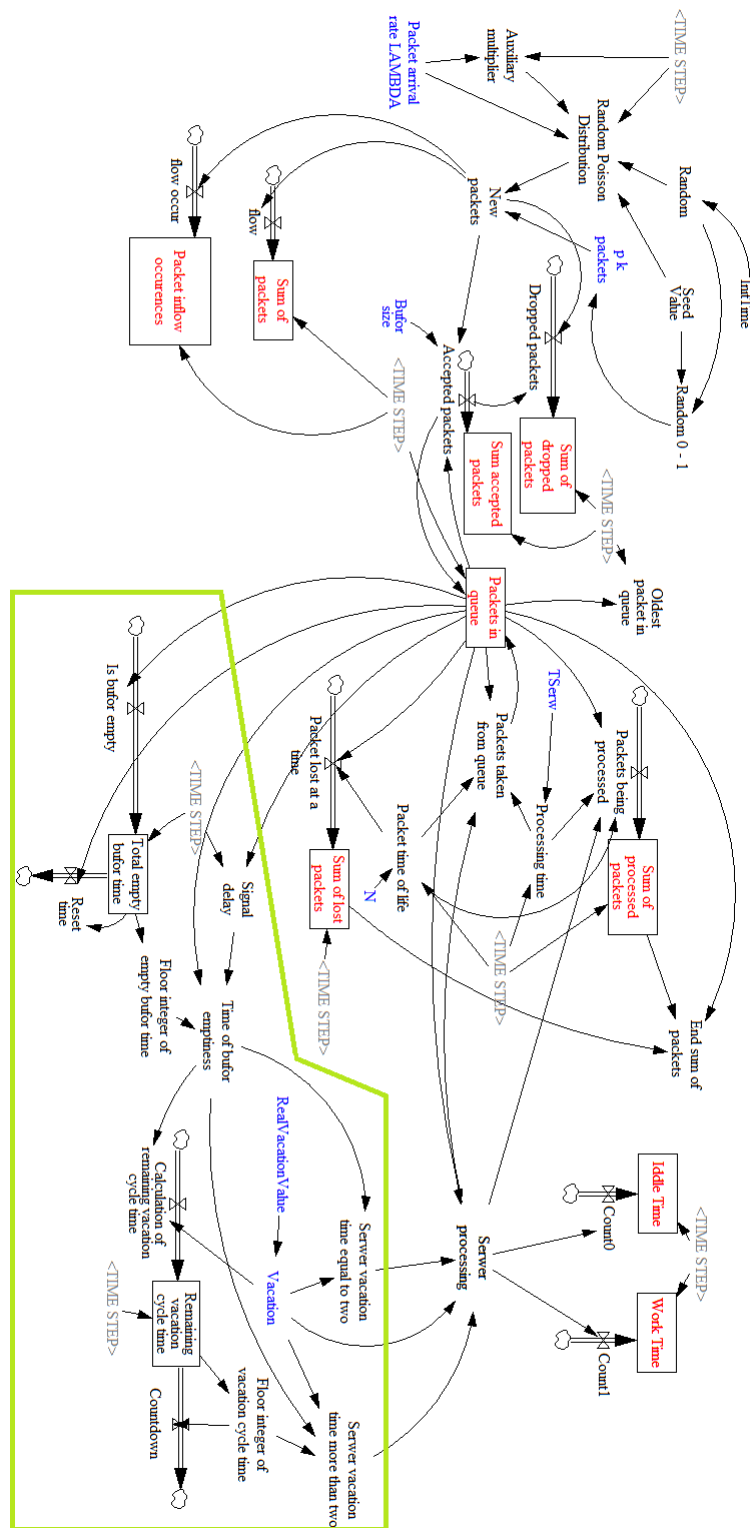
(Definicja 1.9) o rozmiarze  $v = 100$  B ( $v$  sformułowano w Definicji 1.7) jest stały i równy 100 ms, która to wartość jest zarazem krokiem  $k_s$  symulacji. Podkreślmy jeszcze raz fakt, iż tutaj  $M^X$  oznacza zdyskretyzowaną do stałego kroku symulacji losowość, tzn. pakiet o losowym rozmiarze (zgodnie z Definicją 1.8) może nadejść w losowej chwili  $t$ , przy czym  $t = n \cdot k_s$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Długość pojedynczego okresu przestoju  $t_p$  jest parametrem, którego wartość jest stała w trakcie całej symulacji i określona zależnością  $t_p = m \cdot k_s$ ,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

5. Na schemacie (Rysunek 6.3) omawianego modelu kolejkowego kolorem czerwonym wyróżnione zostały poziomy: ilości momentów, w których nastąpiło nadejście pakietu napływającego  $P_{level}[Packet\ inflow\ occurrences]$ ; sumy pakietów obsługiwanych napływających do systemu  $P_{level}[Sum\ of\ packets]$ ; sumy pakietów obsługiwanych, które nie dostały się do systemu z powodu przepełnienia bufora kolejki  $P_{level}[Sum\ of\ dropped\ packets]$ ; sumy pakietów, które trafiły do bufora  $P_{level}[Sum\ accepted\ packets]$ ; pakietów aktualnie znajdujących się w kolejce  $P_{level}[Packets\ in\ queue]$ ; sumy pakietów utraconych z powodu przekroczenia maksymalnego dopuszczalnego czasu oczekiwania na obsługę (odpowiednik TTL – ang. *Time To Live* – znanego z sieci komputerowych)  $P_{level}[Sum\ of\ lost\ packets]$ ; sumy pakietów obsłużonych  $P_{level}[Sum\ of\ processed\ packets]$ ; sumarycznego czasu bezczynności  $P_{level}[Idle\ Time]$  oraz pracy serwera  $P_{level}[Work\ Time]$ .

Kolorem niebieskim wyróżniono następujące parametry początkowe modelu:

- intensywność napływu pakietów LAMBDA;
- $p\ k\ packet$  – ciąg prawdopodobieństw  $(p_k)$ , z jakimi do systemu napływają pakiety krotności  $k$  podstawowej jednostki objętości;
- rozmiar bufora (kolejki);
- $T_{serw}$  – czas obsługi pakietu obsługiwalnego;
- $RealVacationValue$  oraz  $Vacation$  – długość pojedynczego okresu przestoju wyrażona jako liczba rzeczywista oraz całkowita (w modelu wartość rzeczywista występuje wyłącznie na potrzeby wbudowanego optymalizatora i dokonywanych nim wyliczeń);
- $N$  – maksymalny dopuszczalny czas oczekiwania na obsługę.

6. Modele kolejkowe w ujęciu Dynamiki Systemowej



Rysunek 6.3: Schemat modelu kolejkowego typu  $M^X/D/1/N$  w środowisku oprogramowania Vensim.

### 6.3 Walidacja modelu

Stworzony model symulacyjny został poddany walidacji polegającej na zwerifikowaniu zwracanych przez symulator, dla prostego scenariusza, wyników i porównanie ich z oczekiwanymi. Intensywności napływu i obsługi wynoszą 10 pakietów/s. Scenariusz zakłada, iż do systemu co krok symulacji  $k_s = 100$  ms napływa dokładnie jeden pakiet. Ponieważ obsługa pakietów odbywa się z identyczną intensywnością w takim samym jednostajnym schemacie, system znajduje się w stanie permanentnej równowagi. Mając na względzie, iż system jest pusty ( $n = 0$ ) w chwili  $t = 0$  (czyli w momencie jego uruchomienia), w chwili tej rozpoczyna się okres zawieszenia obsługi. Okres ten powinien wystąpić jedynie na starcie symulacji i składać się z pojedynczego okresu przestoju, z uwagi na późniejszy ciągły i jednostajny napływ pojedynczych pakietów. Ustalmy, że długość okresu przestoju wyniesie 300 ms. Rezultaty wykonanej symulacji walidacyjnej przedstawiono na Rysunkach 6.4 i 6.5.

Zaprezentowane wykresy są ściśle zgodne z oczekiwanym rezultatem:

- po starcie systemu następuje trwający 300 ms okres zawieszenia obsługi, w trakcie którego w buforze zostają zakumulowane 3 pakiety – Rysunek 6.4;
- w chwili  $t = 300$  ms rozpoczyna się obsługa pakietów, która trwa aż do końca symulowanego okresu 1000 s. W tym czasie ilość nagromadzonych w buforze pakietów pozostaje niezmienna, równa 3, ze względu na proces ciągłego jednostajnego napływu kolejnych pakietów – Rysunki 6.4 i 6.5;
- wykres prezentujący jednostajny napływ pakietów oraz kolejny, odzwierciedlający jednostajnie narastający sumaryczny czas spędzony w trybie obsługi pakietów, zostały przedstawione na Rysunku 6.5.

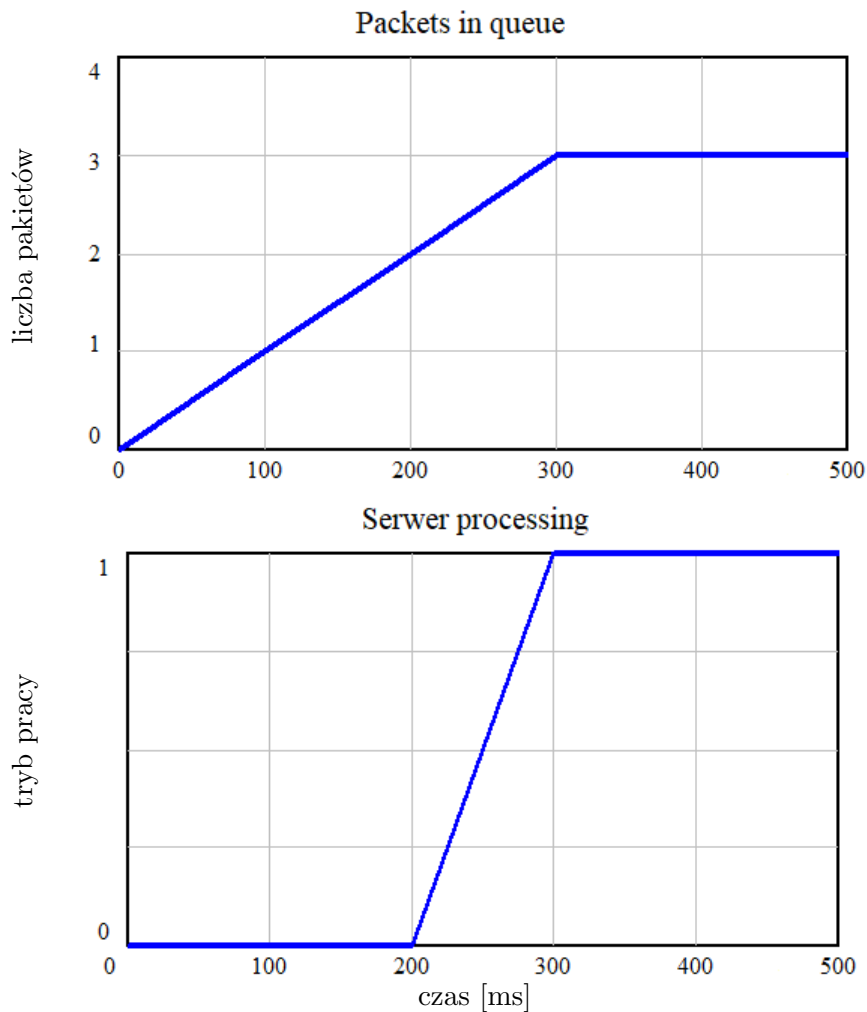
Wykonana na prostym scenariuszu walidacja w sposób jednoznaczny weryfikuje poprawność przeliczeń wykonywanych w stworzonym modelu symulacyjnym, dając podstawę do prowadzenia dalszych badań z użyciem tegoż modelu.

### 6.4 Symulacje i optymalizacja długości okresu przestoju

Wartości parametrów początkowych modelu symulacyjnego, dobrane w oparciu o specyfikację protokołu LoRaWAN oraz poczynione przez autora rozprawy założenia, zostały zebrane w poniższej numerowanej liście (1):

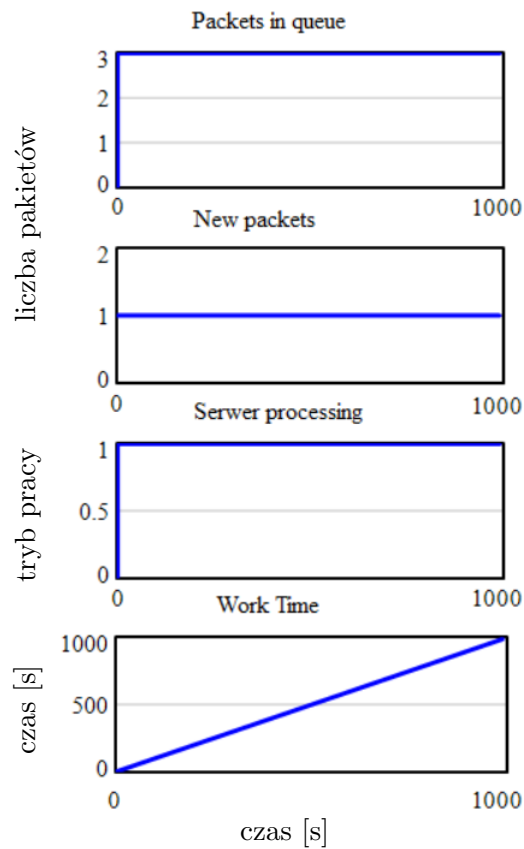
1. Intensywność napływu pakietów LAMBDA wynosi 4 pakiety/s.





Rysunek 6.4: Wykresy prezentujące: zajętość bufora, tryb pracy serwera (0 - okres przestoju; 1 - obsługa zgłoszeń); dla scenariusza walidacyjnego w początkowych 500 ms od startu symulacji.

2. Intensywność obsługi pakietów wynosi 10 pakietów/s ( $T_{serv} = 100$  ms).
3. Maksymalny możliwy rozmiar transmitowanego w sieciach LoRaWAN<sup>®</sup> pakietu wynosi 256 B [130], przy czym zgodnie ze specyfikacją [39] rozmiar pakietu różni się w zależności od rozmiaru preambuły oraz szybkości transmisji danych (ang. *Data Rate*) ze względu na maksymalny czas transmisji w eterze dozwolony indywidualnie dla różnych specyfikacji regionalnych na świecie – Rysunek 6.6. Tym samym



Rysunek 6.5: Wykresy prezentujące: zajętość bufora, napływ pakietów w czasie, tryb pracy serwera (0 - okres przestoju; 1 - obsługa zgłoszeń), sumaryczny okres obsługi pakietów; dla scenariusza walidacyjnego.

urządzenie przekaźnikowe może przetwarzać pakiety od kilkudziesięciu do 256 B, co w połączeniu z uproszczeniem przyjętym w podpunkcie (4.) oznacza, iż zgłoszenie napływające do systemu będzie utożsamiane z jednym, dwoma bądź trzema zgłoszeniami obsługiwalnymi ( $k \in \{1, 2, 3\}$ ). Zaproponowano następujący ciąg prawdopodobieństw ( $p_k$ ) = {0.75, 0.22, 0.03}, dla którego średni rozmiar grupy  $\varepsilon = 1.28$ , co przy uwzględnieniu założonego obciążenia systemu  $\rho = 0.4$  (według Definicji 1.12) ustala wartość średniego zapełnienia systemu na poziomie  $\kappa_b = 0.512$  (zgodnie z Definicją 1.13).

4. Charakterystyka zdefiniowanego w specyfikacji [39] przekaźnika limituje liczbę możliwych do przyłączenia urządzeń końcowych do szesnastu sztuk. Wziąwszy pod uwagę, iż większość pakietów transmitowanych w sieci LoRaWAN<sup>®</sup> nie przekroczy pojemności 100 B, przyjęto,

Norma Europejska		Norma Północno-Amerykańska	
DataRate	packet size	DataRate	packet size
0,1,2	51	0	11
3	115	1	53
4..7	222	2	125
8..15	Not defined	3..4	242
		5..7	Not Defined
		8	33
		9	109
		10..13	222
		14..15	Not defined

**Maksymalna preambuła +34 B**

Rysunek 6.6: Maksymalny rozmiar pakietu danych (w bajtach), bez wliczonego zmiennego rozmiaru preambuły, w zależności od prędkości transmisji danych (ang. *Data Rate*) oraz przyjętej normy regionalnej. (źródło: [39])

iz rozmiar bufora w symulacji będzie wynosił 15, gdyż pakiet pochodzący od szesnastego urządzenia końcowego może być zgłoszeniem w trakcie obsługi przy jednoczesnym wypełnieniu bufora. Takie założenie sprowadza rozmiar kolejki do rozsądnego minimum umożliwiającego zarówno obsługę wszystkich podpiętych urządzeń końcowych, jak i pozostawia możliwość utraty pakietów spowodowaną zapełnieniem bufora w przypadku transmisji pakietów o większych rozmiarach – tym samym istnieje pole do optymalizacji funkcjonowania kolejki w celu wyeliminowania bądź zminimalizowania utraty.

5. Maksymalny dopuszczalny czas oczekiwania na obsługę wynosi  $N = 1.6$  s, co jest związane z rozmiarem bufora, gdyż naturalnym wydaje się być założenie, iż ostatni pakiet w kolejce powinien zostać obsłużony oraz że ostatni pakiet w kolejce nie będzie czekał dłużej niż okres potrzebny na obsłużenie poprzedzających go pakietów. Parametr  $N$  jest tutaj w pewnym sensie nadmiarowy i pozostawia miejsce do dalszych badań, które nie będą przedmiotem niniejszej rozprawy.
6. Długość pojedynczego okresu przestoju jest parametrem optymalizowanym w trakcie badań, a jego wartość domyślna wynosi 300 ms.
7. Pojedyncza symulacja pokrywa okres 1000 sekund z krokiem 100 ms.

Naszym kolejnym krokiem będzie zdefiniowanie funkcji celu (ang. *payoff function*) używanej jako miara jakości rozwiązania we wbudowanym w oprogramowanie optymalizatorze, bazującym na metodzie Powella [131]. Vensim wyróżnia dwa podtypy składowych funkcji celu (ang. *payoff elements*):

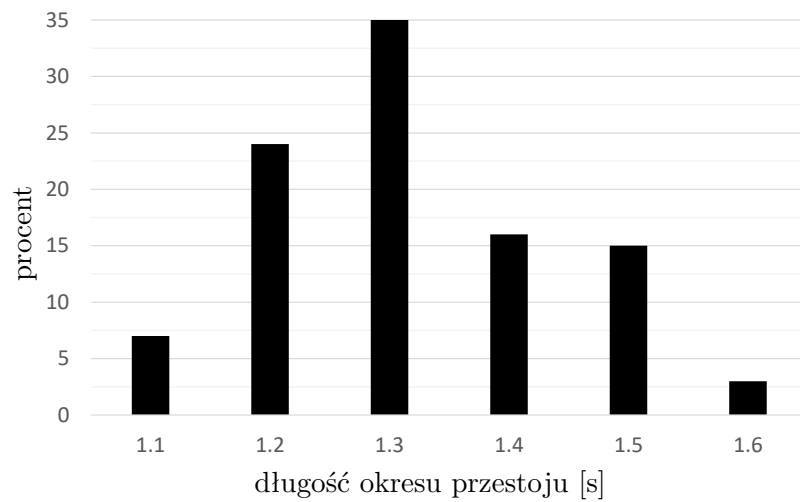
- składnik kalibracyjny (ang. *calibration*) – premiuje dopasowanie wartości wybranego poziomu  $P_{level}[\cdot]$  bądź formuły w stanowisku decyzyjnym do zadanego w skali czasu rozkładu pożądaných wartości.
- składnik proceduralny (ang. *policy*) – premiuje maksymalizację bądź minimalizację wartości wybranego poziomu  $P_{level}[\cdot]$  bądź formuły w stanowisku decyzyjnym.

W przeprowadzanej optymalizacji funkcja celu złożona jest z jednego składnika proceduralnego, którym jest maksymalizacja sumarycznego czasu bezczynności  $P_{level}[Idle\ Time]$ , i trzech składników kalibracyjnych: dopasowywanie wartości wyznaczanych w stanowisku decyzyjnym *Serwer processing* oraz poziomach  $P_{level}[Sum\ of\ dropped\ packets]$  i  $P_{level}[Sum\ of\ lost\ packets]$  do wartości 0 w całym symulowanym okresie. Dzięki tak skonstruowanej funkcji celu poszukiwane rozwiązanie charakteryzuje się jednoczesną dbałością o minimalizację straty pakietów jak i maksymalizacją rozpiętości czasowej okresów zawieszenia obsługi.

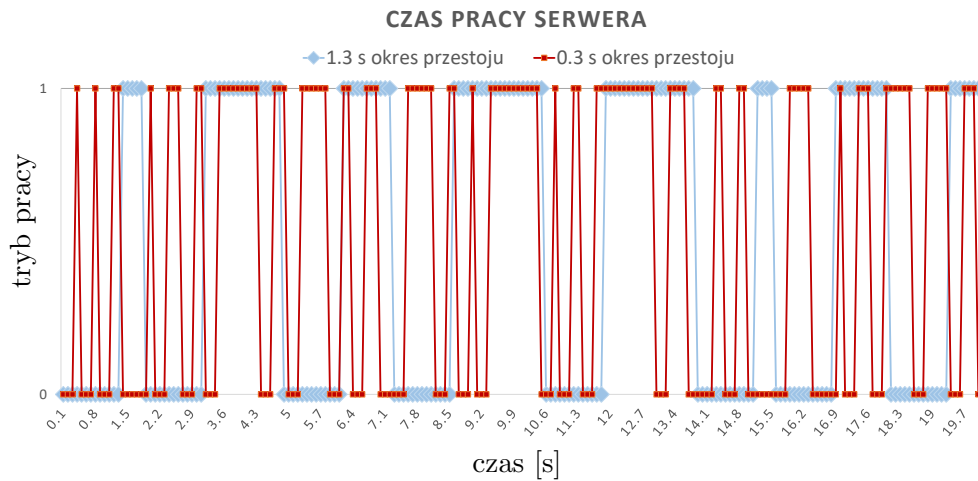
Mając na względzie, wynikającą z używanego w symulatorze rozkładu Poissona, losowość, z jaką do systemu napływają grupy  $k$  zgłoszeń obsługiwalnych ( $k \in \{1, 2, 3\}$ ), dokonywana optymalizacja została wykonana stu-krotnie dla stu odmiennych wartości ziarna, używanego do inicjalizacji generatora liczb pseudolosowych. Wyniki szeregu przeprowadzonych optymalizacji zostały zaprezentowane na Rysunku 6.7. Z zebranej statystyki wynika, iż wartości optymalnej długości pojedynczego okresu przestoju zawierają się w zdyskretyzowanym przedziale  $\{1.1, 1.2, \dots, 1.6\}$  s, a średnia i mediana długości wynoszą odpowiednio 1.317 s oraz 1.3 s.

Ze względu na otrzymane w trakcie wykonanych optymalizacji wyniki, w dalszych badaniach ograniczymy się do wartości 1.3 s, uznając ją za optymalną długość okresu przestoju w symulowanym modelu kolejkowym  $M^X/D/1/N$  o zdefiniowanych w liście (1) wartościach parametrów początkowych. Wykonując pojedyncze 1000-sekundowe symulacje z ustalonym ziarnem generatora liczb pseudolosowych, dla wyznaczonego optimum oraz dla założonej w pkt. 6. wartości domyślnej długości okresu przestoju, możemy dokonać następującego porównania, stanowiącego swoistą weryfikację rezultatu przeprowadzonej optymalizacji:

- Rysunek 6.8 prezentuje porównanie charakterystyk pracy serwera w okresie 20 s, a także w swoisty sposób obrazuje zdefiniowany we wstępie Rozdziału 6 problem badawczy i otrzymane rozwiązanie. Okres przestoju o długości 300 ms implikuje wysoką częstotliwość przełączeń pomiędzy trybami pracy, co, jak już zostało opisane, przekłada się na zwiększone zużycie energii w urządzeniu przekaźnikowym w sieciach LoRaWAN<sup>®</sup>. Z kolei optymalna długość okresu przestoju charakteryzuje się płynnością obsługi zgromadzonych w buforze pakietów

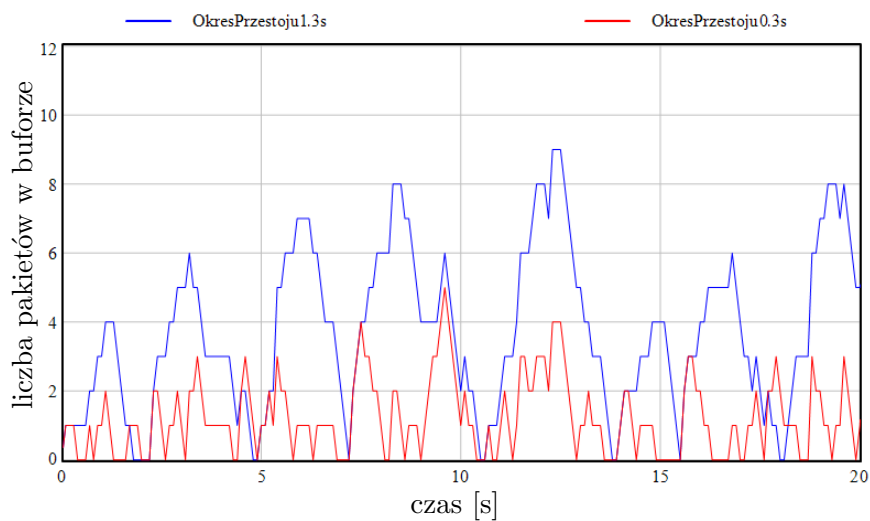


Rysunek 6.7: Procentowe zestawienie osiągniętych dla 100 różnych wartości ziarna, używanego do inicjalizacji generatora liczb pseudolosowych odpowiadających za losowość momentów napływu i rozmiaru grupy pakietów obsługiwalnych, optymalnych długości okresu przestoju. Średnia długość: 1.317 s, mediana: 1.3 s.

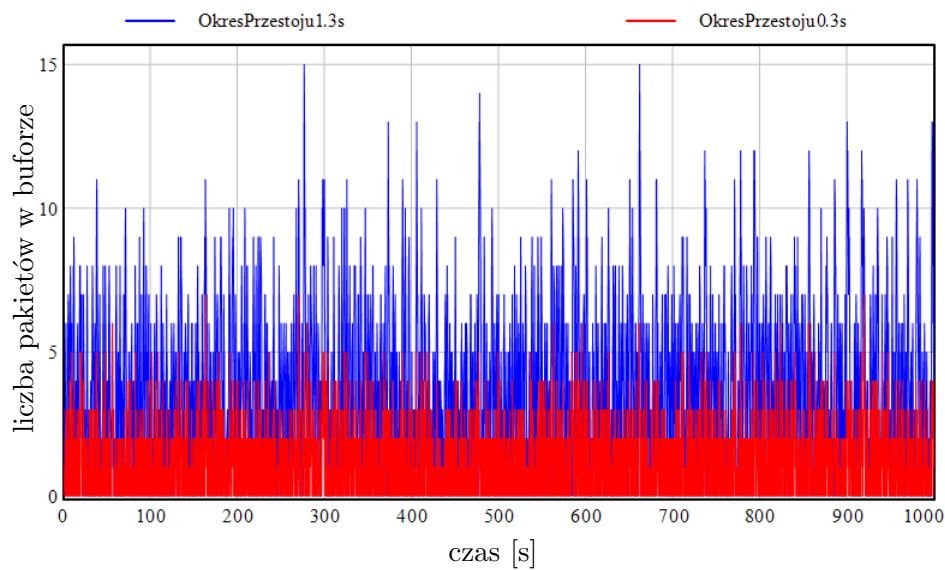


Rysunek 6.8: Porównanie charakterystyk pracy serwera ze względu na długość okresu przestoju. Tryby pracy serwera: 0 - okres przestoju; 1 - obsługa zgłoszeń.

i umiarkowaną częstotliwością przełączeń pomiędzy okresami obsługi



Rysunek 6.9: Porównanie zajętości bufora kolejującego napływające zgłoszenia ze względu na długość okresu przestoju, dokonane w przedziale 20 s od startu systemu.



Rysunek 6.10: Porównanie zajętości bufora kolejującego napływające zgłoszenia ze względu na długość okresu przestoju, dokonane w przedziale 1000 s od startu systemu.

zgłoszeń oraz przestoju.

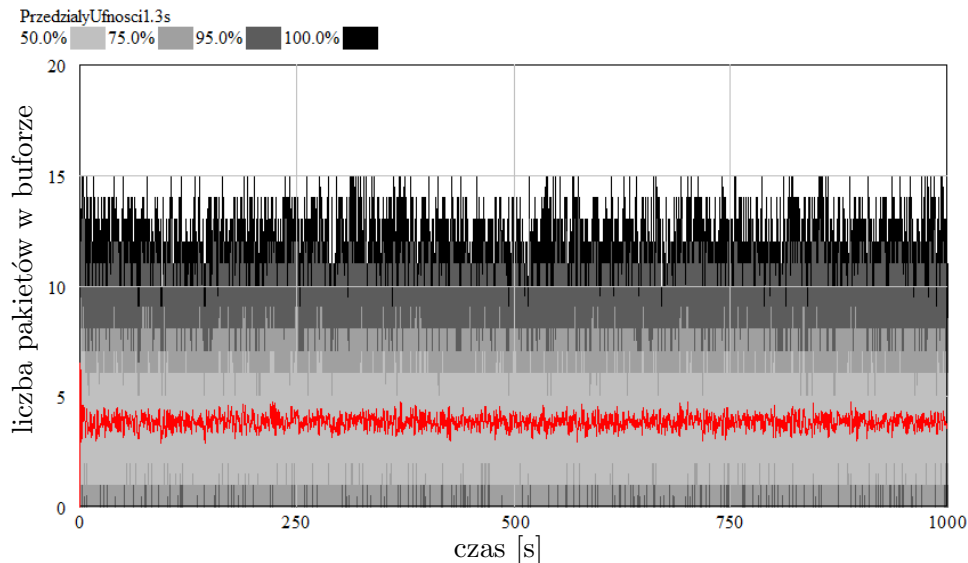
- Rysunki 6.9 i 6.10, prezentujące porównanie zajętości bufora kolejującego w dwóch przyjętych przedziałach czasu, obrazują stopień wykorzystania bufora oraz bezstratność obsługi pakietów w wykonanej symulacji.

Otrzymane rezultaty są wynikiem jednostkowym. Chcąc uzyskać szerszą statystykę, obrazującą jakość znalezionej optimum, posłużono się wbudowaną w symulator metodą Monte Carlo umożliwiającą wyznaczenie przedziałów ufności na poziomach 50%, 75%, 95% oraz 100%. Wykonując tysiąc jednostkowych symulacji, różniących się zadaniem parametrem (w naszym przypadku jest to zmienna wartość ziarna), dla zestawu poziomów  $\{P_{level}[Packets\ in\ queue], P_{level}[Idle\ Time], P_{level}[Sum\ of\ dropped\ packets]\}$ , uzyskano wykresy zaprezentowane na Rysunkach 6.11, 6.12 i 6.13. Analiza zobrazowanych przedziałów ufności pozwala nam stwierdzić, iż dla symulowanego modelu kolejkowego  $M^X/D/1/N$  o ustalonych listą (1) wartościach parametrów początkowych, znalezione, wynoszące 1.3 s, optimum długości okresu przestoju realizuje wszystkie postawione w problemie badawczym cele. Na tysiąc wykonanych 1000-sekundowych symulacji, jednokrotnie wystąpiła utrata 9 pakietów, natomiast średnia utrata to w przybliżeniu 2 pakiety na 5120 możliwych do obsłużenia (gdyż statystyczne średnie wypełnienie systemu wynosi  $\kappa_b = 0.512$  w okresie 1000 s).

## 6.5 Podsumowanie rozdziału

W niniejszym rozdziale zaproponowana została metodyka uzyskiwania optymalnej długości okresu przestoju w modelu  $M^X/D/1/N$  z dyscypliną zawieszenia obsługi. Zgodnie z najlepszą wiedzą autora rozprawy, przeniesienie i rozwiązywanie postawionego problemu badawczego na gruncie Dynamiki Systemowej stanowi novum w dziedzinie teorii kolejek. Uzyskane w podrozdziale 6.4 dla założonych wartości parametrów początkowych wyniki spełniają założenia zdefiniowanego problemu, potwierdzając słuszność stosowania nowatorskiego podejścia. W niniejszym podsumowaniu dokonamy pewnego uogólnienia poczynionych rozważań.

Poszukiwanie optymalnej długości okresu przestoju ma uzasadnienie w przypadku systemów, dla których wartość średniego wypełnienia jest na poziomie  $\kappa_b < 1$ , przy czym dla wartości bliskich jedności należy spodziewać się, iż system będzie stale zajęty obsługą kolejnych pakietów z minimalną szansą na przejście w tryb zawieszenia obsługi. Odnieśmy się do badań wykonanych w poprzednich rozdziałach – przyjęte parametry skutkowały ciekawymi z punktu widzenia generowanych wykresów statystykami osiąganymi dla przekraczających liczbę 1.0 wartości  $\kappa_b$ .



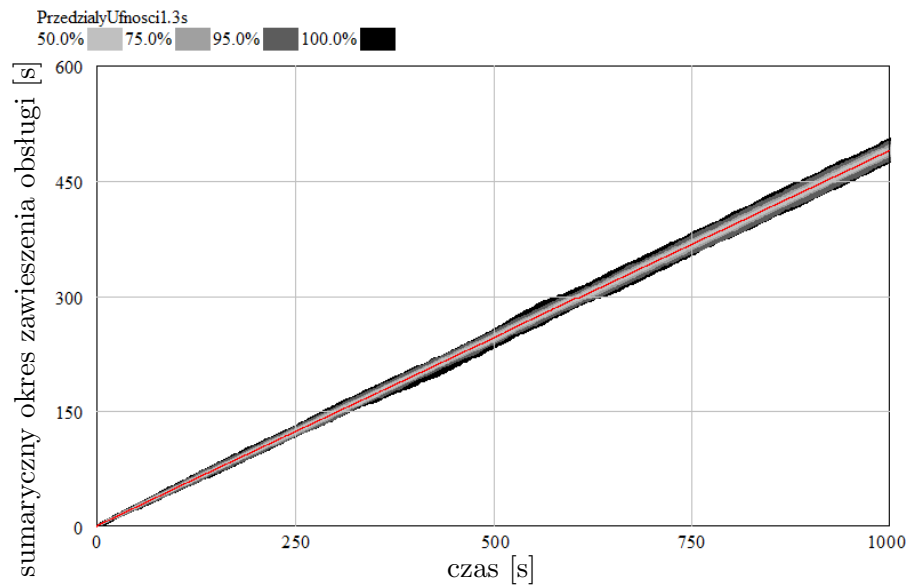
Rysunek 6.11: Przedziały ufności dla zajętości bufora kolejującego zgłoszenia w przedziale 1000 s od startu systemu. Czerwonym kolorem oznaczono średnią ilość zgłoszeń w buforze.

Wykonajmy jeszcze jedną optymalizację, wybierając jedną z występujących w podrozdziałach 3.3.1, 3.3.4, 3.3.5, 4.3.2, 4.3.4, 5.3.3, 5.3.5 kombinacji parametrów intensywności napływu pakietów  $\lambda = 375$  pakietów/s i prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25\}$  (dla występującej w tamtych rozdziałach intensywności obsługi pakietów  $\mu = 500$  pakietów/s otrzymywaliśmy średnie zapelnienie systemu  $\kappa_b = 1.3125$ ). Zakładając krok symulacji  $k_s = 1$  ms, a intensywność obsługi na poziomie 1000 pakietów/s, uzyskamy nowe średnie zapelnienie systemu na poziomie  $\kappa_b = 0.65625$ , będące w istocie połową poprzedniego. Wartość ta uzasadnia sens dokonania optymalizacji w stworzonym modelu, czego efektem są zaprezentowane na Rysunkach 6.14 i 6.15 wykresy.

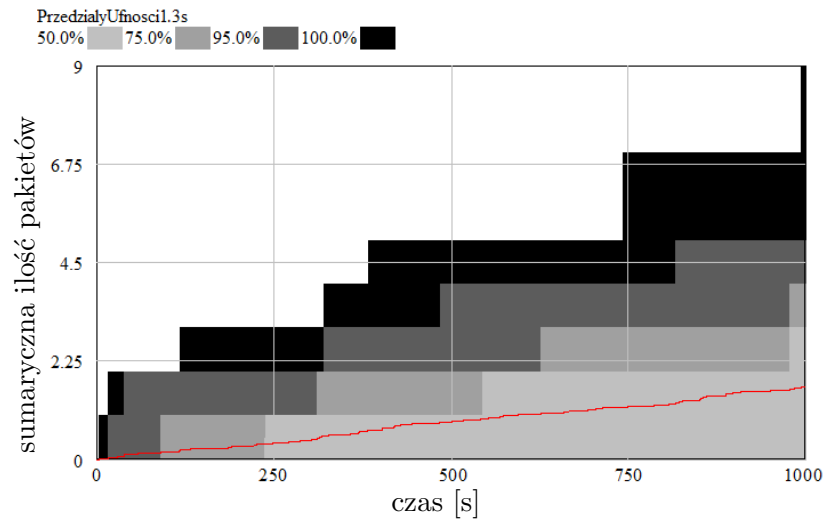
Jak możemy zaobserwować, dla skutkujących mocniejszym zapelnianiem systemu większych wartości prawdopodobieństw jednoczesnego napływania grup dwu lub trzech pakietów obsługiwalnych, otrzymujemy wynoszącą 5 ms niską optymalną długość okresu przestoju. Zauważmy, że jest to pięciokrotność kroku symulacji  $k_s$ , co jest wartością znacząco niższą względem otrzymanej w podrozdziale 6.4 trzynastokrotności kroku symulacji. Prowadzi to do spodziewanego wniosku, iż sensowność dokonywania optymalizacji w badanym modelu kolejkowym jest w znaczącym stopniu powiązana z wartością średniego zapelnienia systemu  $\kappa_b$ . Kwestią otwartą, niepodjętą w niniejszej dysertacji, pozostaje wyznaczenie wartości progowej dla  $\kappa_b$ , powyżej której



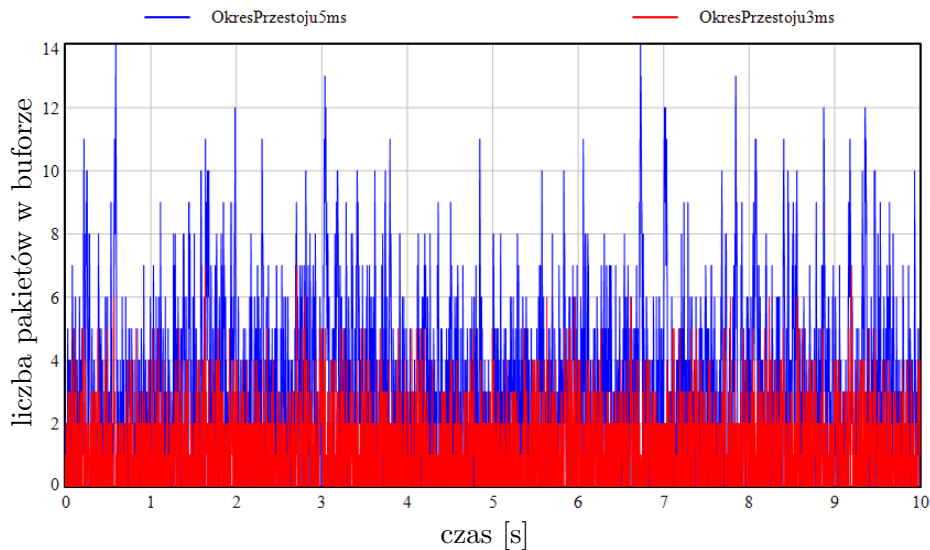
## 6. Modele kolejkowe w ujęciu Dynamiki Systemowej



Rysunek 6.12: Przedziały ufności dla sumarycznego okresu zawieszenia obsługi w przedziale 1000 s od startu systemu. Czerwonym kolorem oznaczono średni okres.



Rysunek 6.13: Przedziały ufności dla sumarycznej ilości utraconych z powodu zapełnienia bufora pakietów w przedziale 1000 s od startu systemu. Czerwonym kolorem oznaczono średnią ilość.



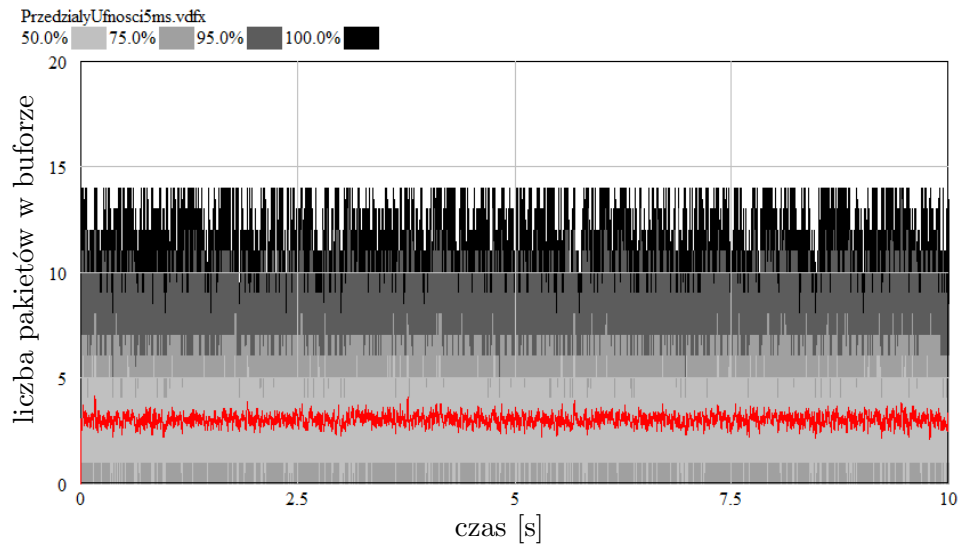
Rysunek 6.14: Porównanie zajętości bufora kolejującego napływające zgłoszenia dla systemu z nowymi wartościami parametru  $LAMBDA=375$  pakietów/s i prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25\}$ .

szukanie optimum długości okresu przestoju traci sens.

Omówmy w sposób bardziej wyczerpujący kwestię badań optymalizacyjnych przedstawionych na Rysunku 6.7. Przyjęta w badaniach strategia stukrotnego dokonywania optymalizacji, dla stu symulacji pokrywających okres 1000 sekund i różniących się odmienną wartością ziarna, została poddyktowana dwoma czynnikami:

1. zamiarem zbadania wpływu odmienności zadanego ziarna na wynik optymalizacji w symulowanym okresie o umiarkowanej długości;
2. możliwą do rozpatrzenia skalą czasu, w której następuje optymalizacja. Przypomnijmy sobie fakt, iż przeprowadzana optymalizacja bazuje na funkcji celu składającej się m. in. z trzech składników kalibracyjnych. W związku z tym wbudowany optymalizator poszukuje rozwiązania, mając na wejściu trzy zadane dziesięciotysięczne ciągi liczb ( $1000 \text{ s} = 10000 \cdot 100 \text{ ms}$ ), dla których kalibrator poszukuje najlepszego dopasowania, przeliczając funkcję celu w rozpatrywanym okresie. Czynnikiem limitującym jest tutaj rozmiar danych. Stukrotna optymalizacja dokonywana na 1000-sekundowym okresie jest wydajniejsza czasowo niż jednokrotna wykonywana na długim 100 000-sekundowym okresie.

Uzyskany w postaci zaprezentowanego na Rysunku 6.7 rozkładu rezultat uwidacznia wpływ losowości na wynik optymalizacji. Uzyskana zgodność



Rysunek 6.15: Przedziały ufności dla zajętości bufora kolejkującego zgłoszenia w przedziale 10 s od startu systemu – eksperyment z nowymi wartościami parametru  $LAMBDA=375$  pakietów/s i prawdopodobieństw  $(p_k) = \{0.5, 0.25, 0.25\}$ . Czerwonym kolorem oznaczono średnią ilość zgłoszeń w buforze.

średniej oraz mediany nakreśla charakterystykę procesu kolejkowania, która może zostać sparafrazowana w następujący sposób: w rozważanym modelu kolejkowym optymalna długość okresu przestoju wynosi średnio 1.3 s. Wartość ta ma swoje przełożenie na rzadko występujące utraty pakietów, na tyle rzadkie iż możemy je przyjąć za całkowicie akceptowalne (Rysunek 6.13).

# Podsumowanie

Niniejsza rozprawa w sposób kompleksowy omawia charakterystyki długości kolejki, czasu do wystąpienia pierwszego przepełnienia bufora, opóźnienia kolejkowania oraz procesu liczącego obsłużone zgłoszenia dla modeli kolejkowych z jedną stacją obsługi zgłoszeń, skończonym buforem, poissonowskim strumieniem wejściowym i dyscypliną zawieszenia obsługi składającą się z wielokrotnych okresów przestoju, których długości w ogólnym przypadku są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa. Uzyskane wyniki dotyczą kolejkowania zarówno prostych jak i złożonych procesów Poissona i zostały podane w postaci transformat Laplace'a oraz funkcji tworzących transformat Laplace'a. Otrzymane zostały za pomocą metod analitycznych, które z powodzeniem można wykorzystać do wyznaczenia wielu innych charakterystyk systemów kolejkowych, m. in. współczynnika strat pakietów, okresu przepełnienia bufora, liczby utraconych w okresie przepełnienia zgłoszeń. Stosowana metodologia umożliwia otrzymanie zwięzłego opisu najważniejszych charakterystyk w zwartej postaci, która przekłada się na redukcję czasu niezbędnego na ich implementację w kodzie. Ponadto wykazano, iż mimo skomplikowanej struktury statystycznego opisu ruchu sieciowego zamodelowanego z wykorzystaniem użytej metodologii, możliwe jest uzyskanie wyników numerycznych na przeciętnej klasie komputerze osobistym. W sposób oczywisty, dla przypadku systemów kolejkowych o dużych buforach kolejek oraz skomplikowanych rozkładach prawdopodobieństwa opisujących okresy zawieszenia obsługi lub czasy obsługi zgłoszeń, obliczenia numeryczne wymagać będą odpowiednio większych zasobów obliczeniowych.

Zawarte w dysertacji rezultaty dowodzą możliwości uzyskania matematycznego, zwartego opisu zachowania systemów kolejkowych z dyscypliną zawieszenia obsługi, co daje możliwość efektywnego modelowania tego typu systemów w stanie nieustalonym. Rezultaty rozważań teoretycznych uzupełniono o liczne przykłady numeryczne, prezentujące zachowanie poszczególnych charakterystyk systemów kolejkowych w kontekście ruchu sieciowego. Z praktycznego punktu widzenia, osiągnięte w rozprawie wyniki badań umożliwiają ocenę wydajności oraz zapewnienie jakości w różnego rodzaju usługach telekomunikacyjnych, których funkcjonowanie oparte jest na teorii kolejek. W szczególności, dzięki zastosowaniu metodologii Dynamiki Systemowej z

jednoczesnym zastosowaniem metody Powella, możliwy jest dobór optymalnej długości okresów przestoju mechanizmu zawieszenia obsługi. Poza tym, w pracy przytoczono dwa algorytmy obliczeniowe numerycznego odwracania transformaty Laplace'a i funkcji tworzących transformat, umożliwiając wgląd w praktyczność ich stosowania oraz osiągnięte rezultaty.

## Bibliografia

- [1] J. Abate, G. L. Choudhury, and W. Whitt. *An Introduction to Numerical Transform Inversion and Its Application to Probability Models*, pages 257–323. Springer US, Boston, MA, 2000.
- [2] J. Abate and W. Whitt. Transient behavior of the M/M/1 queue: Starting at the origin. *Queueing systems*, 2:41–65, 1987.
- [3] J. Abate and W. Whitt. Transient behavior of the M/M/1 queue via laplace transforms. *Advances in Applied Probability*, 20(1):145–178, 1988.
- [4] J. Abate and W. Whitt. The fourier-series method for inverting transforms of probability distributions. *Queueing Systems*, 10:5–87, 08 1992.
- [5] J. Abate and W. Whitt. A unified framework for numerically inverting laplace transforms. *INFORMS Journal on Computing*, 18:408–421, 11 2006.
- [6] R. E. Ahmed. Recursive computation of steady state probabilities in M/M/1/B queues. In *2017 International Conference on Electrical and Computing Technologies and Applications (ICECTA)*, pages 1–4, Nov 2017.
- [7] LoRa Alliance. LoRa Alliance<sup>®</sup> announces new relay feature. Available at <https://lora-alliance.org/lora-alliance-press-release/lora-alliance-announces-new-relay-feature-that-extends-lorawan-coverage-for-metering-utilities-smart-cities-and-industrial-applications/>, data dostępu: 29.12.2022.
- [8] LoRa Alliance. LoRaWAN<sup>®</sup> relay specification TS011-1.0.0. Available at <https://resources.lora-alliance.org/technical-specifications/ts011-1-0-0-relay>, data dostępu: 29.12.2022.
- [9] LoRa Alliance. The LoRaWAN<sup>®</sup> specification. Available at <https://lora-alliance.org/about-lorawan/>, data dostępu: 29.12.2022.
- [10] K. A. Alnowibet and H. Perros. *The Nonstationary Loss Queue: A Survey*, pages 105–125. 2006.

- [11] S. Asmussen, M. Jobmann, and H. P. Schwefel. Exact buffer overflow calculations for queues via martingales. *Queueing Syst.*, 42:63–90, 09 2002.
- [12] N. T.J. Bailey. A continuous time treatment of a simple queue using generating functions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 16(2):288–291, 1954.
- [13] N. T.J. Bailey. Some further results in the non-equilibrium theory of a simple queue. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 19(2):326–333, 1957.
- [14] W. F. Bauer. The monte carlo method. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 6(4):438–451, 1958.
- [15] V. E. Benes. On queues with poisson arrivals. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(3):670–677, 1957.
- [16] B. A. Berg. *Markov Chain Monte Carlo Simulations and Their Statistical Analysis*. WORLD SCIENTIFIC, 2004.
- [17] P. Boer, D. Kroese, and R.Y. Rubinstein. A fast cross-entropy method for estimating buffer overflows in queueing networks. *Management Science*, 50, 07 2004.
- [18] O. J. Boxma, S. Schlegel, and U. Yechiali. A note on an M/G/1 queue with a waiting server, timer and vacations. In *Analytic Methods in Applied Probability: In Memory of Fridrikh Karpelevich*, pages 25–36. American Mathematical Society, 2002.
- [19] A. Brandt. On stationary queue length distributions for G/M/s/r queues. *Queueing Systems*, 2:321–332, 1987.
- [20] E. Brockmeyer, H.L. Halstrøm, and A. Jensen. *The Life and Works of A.K. Erlang*. Academy of Technical Sciences. Danish Academy of Technical Sciences, 1948.
- [21] D. Cabrera, L. Colosi, and C. Lobdell. Systems thinking. *Evaluation and Program Planning*, 31(3):299–310, 2008.
- [22] J. Cao, Z. Ma, S. Guo, and X. Yu. Performance analysis of non-exhaustive wireless sensor networks based on queueing theory. *International Journal of Communication Networks and Distributed Systems*, 24:186, 01 2020.
- [23] B. D. Choi, Y. C. Kim, Y. W. Shin, and C. E. Pearce. The  $M^X/G/1$  queue with queue length dependent service times. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 14(4):399–419, 2001.

- [24] G. L. Choudhury and D. M. Lucantoni. Numerical Computation of the Moments of a Probability Distribution from its Transform. *Operations Research*, 44(2):368–381, April 1996.
- [25] G. L. Choudhury, D. M. Lucantoni, and W. Whitt. Multidimensional transform inversion with applications to the transient M/G/1 queue. *The Annals of Applied Probability*, 4(3):719–740, 1994.
- [26] A. Chydzinski. Buffer overflow calculations in a batch arrival queue. *SIGMETRICS Perform. Eval. Rev.*, 34(2):19–21, sep 2006.
- [27] A. Chydzinski. Time to buffer overflow in an MMPP queue. In Ian F. Akyildiz, Raghupathy Sivakumar, Eylem Ekici, Jaudelice Cavalcante de Oliveira, and Janise McNair, editors, *NETWORKING 2007. Ad Hoc and Sensor Networks, Wireless Networks, Next Generation Internet*, pages 879–889, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer Berlin Heidelberg.
- [28] A. Chydzinski. Time to reach buffer capacity in a BMAP queue. *Stochastic Models*, 23(2):195–209, 2007.
- [29] A. Chydzinski and R. Winiarczyk. Distribution of the first buffer overflow time in a deterministic service time queue. In *10th IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC'05)*, pages 637–641, 2005.
- [30] A. Chydzinski. *Charakterystyki kolejowania markowskich modeli ruchu w sieciach pakietowych*. Studia Informatica - Politechnika Śląska. Wydawn. Politechn. Śląskiej, 2007.
- [31] J. W. Cohen. *The single server queue*. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [32] J. L. Cordeau and M. L. Chaudhry. A simple and complete solution to the stationary queue-length probabilities of a bulk-arrival bulk-service queue. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 47(4):283–288, 2009.
- [33] D. R. Cox and V. Isham. The virtual waiting-time and related processes. *Advances in Applied Probability*, 18(2):558–573, 1986.
- [34] R. G. Coyle. *Management System Dynamics*. Horizon Pubs & Distributors Inc, 1977.
- [35] M.E. Crovella and A. Bestavros. Self-similarity in World Wide Web traffic: evidence and possible causes. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 5(6):835–846, 1997.



- [36] T. Czachórski. *Modele kolejkowe w ocenie efektywności pracy sieci i systemów komputerowych*. Wydaw. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, 1999.
- [37] T. Czachórski. Queueing models for performance evaluation of computer networks—transient state analysis. In Vladimir V. Mityushev and Michael Ruzhansky, editors, *Analytic Methods in Interdisciplinary Applications*, pages 51–80, Cham, 2015. Springer International Publishing.
- [38] D.J. Daley and R Vesilo. Long range dependence of point processes, with queueing examples. *Stochastic Processes and their Applications*, 70(2):265–282, 1997.
- [39] LoRa developer portal. LoRa packet size documentation. Available at <https://lora-developers.semtech.com/documentation/tech-papers-and-guides/the-book/packet-size-considerations/>, data dostępu: 29.12.2022.
- [40] A. Erramilli, O. Narayan, and W. Willinger. Experimental queueing analysis with long-range dependent packet traffic. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 4(2):209–223, 1996.
- [41] R. Espejo. What is systemic thinking? *System Dynamics Review*, 10(2-3):199–212, 1994.
- [42] H.W. Ferng. Departure processes of BMAP/G/1 queues. *Queueing Systems*, 39:109–135, 10 2001.
- [43] J. Forrester. *Principles of Systems*. System Dynamics. Pegasus Communications, 1968.
- [44] M. R. Frater and B. Anderson. Fast simulation of buffer overflows in tandem networks of GI/GI/1 queues. *Annals of Operations Research*, 49, 1994.
- [45] A.V. Gafarian, C.J. Ancker Jr, and T. Morisaku. The problem of the initial transient in digital computer simulation. Technical report, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 1976.
- [46] J.M. García. *System Dynamics Modelling with Vensim*. 2020 Edition Series. Amazon Digital Services LLC - Kdp, 2018.
- [47] D. P. Gaver. Observing stochastic processes, and approximate transform inversion. *Operations Research*, 13(3):444–459, 1966.
- [48] L. Green and P. Kolesar. The pointwise stationary approximation for queues with nonstationary arrivals. *Management Science*, 37(1):84–97, 1991.

- [49] U.C. Gupta and K. Sikdar. Computing queue length distributions in MAP/G/1/N queue under single and multiple vacation. *Applied mathematics and computation*, 174(2):1498–1525, 2006.
- [50] M. Głabowski, S. Hanczewski, M. Stasiak, and J. Weissenberg. Modeling Erlang’s ideal grading with multirate BPP traffic. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 2012.
- [51] S. Hanczewski, M. Stasiak, and P. Zwierzykowski. Queuing model of wireless access system. In Leszek Borzowski, Adam Grzech, Jerzy Świątek, and Zofia Wilimowska, editors, *Information Systems Architecture and Technology: Proceedings of 37th International Conference on Information Systems Architecture and Technology – ISAT 2016 – Part I*, pages 175–185, Cham, 2017. Springer International Publishing.
- [52] T. Hofkens, K. Spaey, and C. Blondia. Transient analysis of the D-BMAP/G/1 queue with an application to the dimensioning of a play-out buffer for VBR video. In *Proceedings of Networking 2004, Athens, Greece, May 2004*, pages 1338–1343, 2004.
- [53] J.Q. Hu. The departure process of the GI/G/1 queue and its maclaurin series. *Operations Research*, 44(5):810–815, 1996.
- [54] J. R. Hubbard, C. D. Pegden, and M. Rosenshine. The departure process for the M/M/1 queue. *Journal of Applied Probability*, 23(1):249–255, 1986.
- [55] G. U. Hwang, B. D. Choi, and J. K. Kim. The waiting time analysis of a discrete-time queue with arrivals as a discrete autoregressive process of order 1. *Journal of Applied Probability*, 39(3):619–629, 2002.
- [56] Corporation IBM. Performance metrics for resources that run IBM spectrum virtualize. Available at <https://www.ibm.com/docs/en/storage-insights?topic=metrics-performance-resources-that-run-spectrum-virtualize>, data dostępu: 23.11.2022.
- [57] Corporation IBM. Wielkości mierzone dotyczące wydajności dla zasobów używających produktu IBM spectrum virtualize. Available at <https://www.ibm.com/docs/pl/spectrum-control/5.4.8?topic=metrics-performance-resources-that-run-spectrum-virtualize>, data dostępu: 23.11.2022.
- [58] O. A. Isijola-Adakeja and O. C. Ibe. M/M/1 multiple vacation queuing systems with differentiated vacations and vacation interruptions. *IEEE Access*, 2:1384–1395, 2014.

- [59] D. Jagerman and B. Melamed. Burstiness descriptors of traffic streams: Indices of dispersion and peakedness. In *Proceedings of the Conference on Information Sciences and Systems*, pages 24–28, 03 1994.
- [60] J. L. Jain and W. K. Grassmann. Numerical solution for the departure process from the GI/G/1 queue. *Computers and Operations Research*, 15(3):293–296, 1988.
- [61] J. Jakubowski and R. Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. SCRIPT, 2000.
- [62] K. Jayesh, M. Kenneth, and A. Liefvoort. Characterization of the departure process from an ME/ME/1 queue. *RAIRO - Operations Research*, 38(2):173–191, 2004.
- [63] S. Jeyakumar and R. Arumuganathan. Steady state analysis of a Mx/G/1 queue with two service modes and multiple vacations. *International Journal of Industrial and Systems Engineering*, 3(6):692–710, 2008.
- [64] F.C. Jiang, D.C. Huang, and K.H. Wang. Design approaches for optimizing power consumption of sensor node with N-policy M/G/1 queuing model. In *Proceedings of the 4th International Conference on Queueing Theory and Network Applications*, QTNA '09, New York, NY, USA, 2009. Association for Computing Machinery.
- [65] W. H. Kaczynski, L. M. Leemis, and J. H. Drew. Transient queueing analysis. *INFORMS journal on computing*, 24(1):10–28, 2012.
- [66] V. Kadankov and T. Kadankova. Busy period, virtual waiting time and number of customers in  $G^\delta/M^x/1/B$  system. *Queueing Systems*, 65:175–209, 2010.
- [67] E. Kasperska. *Dynamika systemowa - symulacja i optymalizacja*. Skrypty Uczelniane. Wydawn. Politechn. Śląskiej, 2005.
- [68] W. M. Kempa. The virtual waiting time for the batch arrival queueing systems. *Stochastic Analysis and Applications*, 22(5):1235–1255, 2004.
- [69] W. M. Kempa. Some new results for departure process in the  $M^X/G/1$  queueing system with a single vacation and exhaustive service. *Stochastic Analysis and Applications*, 28(1):26–43, 2009.
- [70] W. M. Kempa. Analysis of departure process in batch arrival queue with multiple vacations and exhaustive service. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40(16):2856–2865, 2011.

- [71] W. M. Kempa. Departure process in finite-buffer queue with batch arrivals. In Khalid Al-Begain, Simonetta Balsamo, Dieter Fiems, and Andrea Marin, editors, *Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*, pages 1–13, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.
- [72] W. M. Kempa. The virtual waiting time in a finite-buffer queue with a single vacation policy. In Khalid Al-Begain, Dieter Fiems, and Jean-Marc Vincent, editors, *Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*, pages 47–60, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.
- [73] W. M. Kempa. Queue-size distribution in energy-saving model based on multiple vacation policy. In Vladimir V. Mityushev and Michael V. Ruzhansky, editors, *Current Trends in Analysis and Its Applications*, pages 733–740, Cham, 2015. Springer International Publishing.
- [74] W. M. Kempa. Study on time-dependent departure process in a finite-buffer queueing model with BMAP-type input stream. In *2015 IEEE 2nd International Conference on Cybernetics (CYBCONF)*, pages 245–250, 2015.
- [75] W. M. Kempa. Transient workload distribution in the M/G/1 finite-buffer queue with single and multiple vacations. *Annals of Operations Research*, 239(2):381–400, 2016.
- [76] W. M. Kempa. Queueing delay in a finite-buffer model with failures and bernoulli feedback. In Jerzy Świątek, Leszek Borzemski, and Zofia Wilimowska, editors, *Information Systems Architecture and Technology: Proceedings of 38th International Conference on Information Systems Architecture and Technology – ISAT 2017*, pages 229–238, Cham, 2018. Springer International Publishing.
- [77] W. M. Kempa. Analytical model of a wireless sensor network (WSN) node operation with a modified threshold-type energy saving mechanism. *Sensors*, 19(14), 2019.
- [78] W. M. Kempa and M. Kobielnik. Time to buffer overflow in a queueing model with working vacation policy. In Piotr Gaj, Michał Sawicki, Grażyna Suchacka, and Andrzej Kwiecień, editors, *Computer Networks*, pages 219–231, Cham, 2018. Springer International Publishing.
- [79] W. M. Kempa, K. Książek, and R. Marjasz. On time-dependent queue-size distribution in a model with finite buffer capacity and deterministic multiple vacations with applications to LTE DRX mechanism modeling. *IEEE Access*, 9:148374–148383, 2021.

- [80] W. M. Kempa and Dariusz Kurzyk. Analysis of transient virtual delay in a finite-buffer queueing model with generally distributed setup times. In Tadeusz Czachórski, Erol Gelenbe, Krzysztof Grochla, and Ricardo Lent, editors, *Computer and Information Sciences*, pages 175–184, Cham, 2016. Springer International Publishing.
- [81] W. M. Kempa and R. Marjasz. Departure counting process in a wireless network node with sleep mode modelled via repeated vacations. In Robertas Damaševičius and Vilma Mikašytė, editors, *Information and Software Technologies*, pages 395–407, Cham, 2017. Springer International Publishing.
- [82] W. M. Kempa and R. Marjasz. Distribution of the time to buffer overflow in the single-server queueing model with multiple vacation policy. *Selected Problems on Experimental Mathematics*, pages 113–127, 2017.
- [83] W. M. Kempa and R. Marjasz. Transient queueing delay in a finite-buffer batch-arrival model with constant repeated vacations. In *Computer Networks: 25th International Conference, CN 2018, Gliwice, Poland, June 19-22, 2018, Proceedings 25*, pages 311–320. Springer, 2018.
- [84] W. M. Kempa and R. Marjasz. Distribution of the time to buffer overflow in the M/G/1/N-type queueing model with batch arrivals and multiple vacation policy. *Journal of the Operational Research Society*, 71(3):447–455, 2020.
- [85] W. M. Kempa and R. Marjasz. Study on transient queue-size distribution in the finite-buffer model with batch arrivals and multiple vacation policy. *Entropy*, 23(11), 2021.
- [86] W. M. Kempa and I. Paprocka. Time to buffer overflow in a finite-capacity queueing model with setup and closedown times. In Jerzy Świątek, Zofia Wilimowska, Leszek Borzemski, and Adam Grzech, editors, *Information Systems Architecture and Technology: Proceedings of 37th International Conference on Information Systems Architecture and Technology – ISAT 2016 – Part III*, Cham, 2017. Springer International Publishing.
- [87] W.M. Kempa. The transient analysis of the queue-length distribution in the batch arrival system with N-policy, multiple vacations and setup times. volume 1293, pages 235–242, 2010.
- [88] W.M. Kempa. Analytical model of a wireless sensor network (WSN) node operation with a modified threshold-type energy saving mechanism. *Sensors (Switzerland)*, 19(14), 2019.

- [89] W.M. Kempa. On time-to-buffer overflow distribution in a single-machine discrete-time system with finite capacity. *Mathematical Modelling and Analysis*, 25:289–302, 03 2020.
- [90] D. G. Kendall. Some problems in the theory of queues. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 13(2):151–173, 1951.
- [91] D. G. Kendall. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(3):338–354, 1953.
- [92] R. Kerobyan and K. Kerobyan. Virtual waiting time in single-server queueing model  $m-g-1$  with unreliable server and catastrophes. In Alexander Dudin, Anatoly Nazarov, and Alexander Moiseev, editors, *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*, pages 319–336, Cham, 2021. Springer International Publishing.
- [93] T. Kimura, K. Ohno, and H. Hisashi Mine. Diffusion approximation for GI/G/1 queueing systems with finite capacity : I-the first overflow time. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 22(1):41–68, 1979.
- [94] J. FC. Kingman. The first Erlang century—and the next. *Queueing systems*, 63(1-4):3, 2009.
- [95] L. Kleinrock. *Queueing systems, volume I: Theory*. Wiley-Interscience, 1975.
- [96] L. Kleinrock. *Queueing systems, volume II: Computer Applications*. Wiley-Interscience, 1976.
- [97] A. N. Kolmogorov. On analytic methods in probability theory. *Uspekhi Mat. Nauk*, 5:5–41, 1938.
- [98] J. Korevaar. *Tauberian theory: a century of developments*. Springer, 2004.
- [99] V. S. Korolyuk. Boundary problems for a compound poisson process. *Theory of Probability and its Applications*, 19(1):1–13, 1974.
- [100] K. Krupa. *Modelowanie, symulacja i prognozowanie: systemy ciagle*. Wydawnictwo Naukowo Techniczne, 2008.
- [101] A. R. Lakshminarayanan, D. Kumar, H. Iswarya, S. Aparna, and A. Srinivasan. Adaptive video streaming over HTTP through 4G wireless networks based on buffer analysis. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, 2017, 06 2017.

- [102] S. Lall, A. S. Alfa, and B. T. Maharaj. The role of queueing theory in the design and analysis of wireless sensor networks: An insight. In *2016 IEEE 14th International Conference on Industrial Informatics (INDIN)*, pages 1191–1194, 2016.
- [103] S. Lan and Y. Tang. The structure of departure process and optimal control strategy  $N^*$  for Geo/G/1 discrete-time queue with multiple server vacations and min  $(N, V)$ -policy. *Journal of Systems Science and Complexity*, 30(6):1382–1402, 2017.
- [104] A.M. Lee. *Applied Queueing Theory*. Red Globe Press London, 1966.
- [105] T. T. Lee. M/G/1/N queue with vacation time and exhaustive service discipline. *Operations Research*, 32(4):774–784, 1984.
- [106] T. T. Lee. M/G/1/N queue with vacation time and limited service discipline. *Performance Evaluation*, 9(3):181–190, 1989.
- [107] J. Li, H. Y. Zhou, D. C. Zuo, K. M. Hou, H. P. Xie, and P. Zhou. Energy consumption evaluation for wireless sensor network nodes based on queueing petri net. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 10(4):262848, 2014.
- [108] Q. Liang. Ad hoc wireless network traffic-self-similarity and forecasting. *IEEE Communications Letters*, 6(7):297–299, 2002.
- [109] A. Liefvoort. The waiting-time distribution and its moments of the PH/PH/1 queue. *Operations Research Letters*, 9(4):261–269, 1990.
- [110] D. V. Lindley. The theory of queues with a single server. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 48(2):277–289, 1952.
- [111] J. R. Litko. GI/G/1 interdeparture time and queue-length distributions via the laguerre transform. *Queueing Systems*, 4:367–381, 1989.
- [112] I. Lokshina, S. Oneonta, and E. Schiele. Buffer overflow simulation in self-similar queueing networks with finite buffer capacity accelerated using RESTART/LRE. In *2015 Wireless Telecommunications Symposium (WTS)*, pages 1–7, 2015.
- [113] D. M. Lucantoni, K. S. Meier-Hellstern, and M. F. Neuts. A single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes. *Advances in Applied Probability*, 22(3):676–705, 1990.
- [114] R. Łukaszewicz. *Dynamika systemów zarządzania*. Informacja i sterowanie. Wydawn. Naukowe PWN, 1975.

- [115] C. Luo, Y. Tang, and R. Liu. Transient solution for queue-length distribution of Geometry/G/1 queueing model. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 22:95–100, 2007.
- [116] J.J. Machuveettil and T.P. Madhusoodanan. Transient solution for a finite capacity M/G<sup>a,b</sup>/1 queueing system with vacations to the server. *Queueing systems*, 2:381–386, 1987.
- [117] K. C. Madan and M. Al-Rawwash. On the M<sup>x</sup>/G/1 queue with feedback and optional server vacations based on a single vacation policy. *Applied Mathematics and Computation*, 160(3):909 – 919, 2005.
- [118] A. Mandelbaum and P. Momčilović. Queues with many servers and impatient customers. *Mathematics of Operations Research*, 37(1):41–65, 2012.
- [119] W. A. Massey and W. Whitt. An analysis of the modified offered-load approximation for the nonstationary erlang loss model. *The Annals of applied probability*, pages 1145–1160, 1994.
- [120] H. Masuyama and T. Takine. Stationary queue length in a fifo single server queue with service interruptions and multiple batch markovian arrival streams. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 46(3):319–341, 2003.
- [121] V. Maurya. Investigation of probability generating function in an interdependent M/M/1:(∞; GD) queueing model with controllable arrival rates using rouche’s theorem. *Open Journal of Optimization*, 01:34–38, 01 2012.
- [122] S. Munir, S.and Lin, E. Hoque, S. M. Nirjon, J. A. Stankovic, and K. Whitehouse. Addressing burstiness for reliable communication and latency bound generation in wireless sensor networks. In *Proceedings of the 9th ACM/IEEE International Conference on Information Processing in Sensor Networks, IPSN ’10*, page 303–314, New York, NY, USA, 2010. Association for Computing Machinery.
- [123] B. Musznicki, M. Piechowiak, and P. Zwierzykowski. Modeling real-life urban sensor networks based on open data. *Sensors*, 22(23), 2022.
- [124] G.C. Mytalas and M.A. Zazanis. An M<sup>X</sup>/G/1 queueing system with disasters and repairs under a multiple adapted vacation policy. *Naval Research Logistics*, 62(3):171–189, 2015.
- [125] K. Nakagawa. Application of tauberian theorem to the exponential decay of the tail probability of a random variable. *IEEE Transactions on Information Theory*, 53(9):3239–3249, 2007.



- [126] Z. Niu and Y. Takahashi. A finite-capacity queue with exhaustive vacation/close-down/setup times and Markovian arrival processes. *Queueing Systems*, 31(1):1–23, 1999.
- [127] S. Nowak, J. Domańska, and K. Grochla. *Symulator zdarzeń dyskretnych OMNeT++v.3.3*. WSB, 2009.
- [128] C. Palm. Intensitätsschwankungen im fernsprechverker. *Ericsson technics*, 1943.
- [129] C. D. Pegden and M. Rosenshine. Some new results for the M/M/1 queue. *Management Science*, 28(7):821–828, 1982.
- [130] Congduc Pham, Ahcène Bounceur, Laurent Clavier, Umber Noreen, and Muhammad Ehsan. Radio channel access challenges in LoRa low-power wide-area networks. In B. S. Chaudhari and M. Zennaro, editors, *LPWAN Technologies for IoT and M2M Applications*, pages 65–102. Academic Press, 2020.
- [131] M. J. D. Powell. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *The Computer Journal*, 7(2):155–162, 01 1964.
- [132] S. Pradhan, U.C. Gupta, and S.K. Samanta. Queue-length distribution of a batch service queue with random capacity and batch size dependent service:  $M/G_r^Y/1$ . *Opsearch*, 53:329–343, 2016.
- [133] X. Qingzhen, B. Susu, M. Zhanyou, and T. Naishuo.  $M^x/G/1$  queue with multiple vacations. *Stochastic Analysis and Applications*, 25(1):127–140, 2007.
- [134] S. K. Reza. *Server and Network Assisted Dash (Sand) Architecture Utilizing Sdn Technology*. PhD thesis, T.R. EGE UNIVERSITY Graduate School of Applied and Natural Science, 2020. Available at <https://acikbilim.yok.gov.tr/bitstream/handle/20.500.12812/363450/yokAcikBilim.10325437.pdf?sequence=-1>, data dostępu: 28.12.2022.
- [135] M. Rezaei, M. Gabbouj, and I. Bouazizi. Delay constrained fuzzy rate control for video streaming over DVB-H. In *2006 International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia*, pages 223–227, 2006.
- [136] A. Riska and E. Smirni. Exact aggregate solutions for M/G/1-type markov processes. *SIGMETRICS Perform. Eval. Rev.*, 30(1):86–96, jun 2002.

- [137] J.S. Sadowsky. Large deviations theory and efficient simulation of excessive backlogs in a GI/GI/m queue. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(12):1383–1394, 1991.
- [138] H. Saito. The departure process of an N/G/1 queue. *Performance Evaluation*, 11(4):241–251, 1990.
- [139] S. K. Samanta and B. Bank. Analysis of stationary queue-length distributions of the  $BMAP/R^{(a,b)}/1$  queue. *International Journal of Computer Mathematics: Computer Systems Theory*, 5(3):198–223, 2020.
- [140] H. Sapiri, J. Zulkepli, N. Ahmad, N. Z.l Abidin, and N. N. Hawari. *Introduction to system dynamic modelling and Vensim software*. UUM Press, 2017.
- [141] N. I. Sarkar and R. Membarth. *Modeling and Simulation of IEEE 802.11g using OMNeT++*, pages 590–607. Idea Group Inc (IGI), London, UK, 2010.
- [142] K. Sen and M. Agarwal. Lattice paths combinatorics applied to transient queue length distribution of  $C_2/M/1$  queues and busy period analysis of bulk queues  $C_2^b/M/1$ . *Journal of Statistical Planning and Inference*, 100(2):365–397, 2002.
- [143] S. Shioda. Departure process of the MAP/SM/1 queue. *Queueing Syst.*, 44:31–50, 05 2003.
- [144] M. Shomrony and U. Yechiali. Burst arrival queues with server vacations and random timers. *Mathematical Methods of Operations Research*, 53(1):117–146, 2001.
- [145] K. Sikdar and U.C. Gupta. The queue length distributions in the finite buffer bulk-service MAP/G/1 queue with multiple vacations. *Top*, 13:75–103, 2005.
- [146] I. Simaiakis and H. Balakrishnan. A queuing model of the airport departure process. *Transportation Science*, 50(1):94–109, 2016.
- [147] W. L. Smith. On the distribution of queueing times. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 49(3):449–461, 1953.
- [148] D. Starobinski and M. Sidi. Stochastically bounded burstiness for communication networks. In *IEEE INFOCOM '99. Conference on Computer Communications. Proceedings. Eighteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. The Future is Now (Cat. No.99CH36320)*, volume 1, pages 36–42 vol.1, 1999.

- [149] M. Stasiak, M. Głabowski, A. Wiśniewski, and P. Zwierzykowski. *Modeling and Dimensioning of Mobile Networks*. John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- [150] H. Stehfest. Algorithm 368: Numerical inversion of laplace transforms. *Communications of the ACM*, 13(1):47–49, 1970.
- [151] C. Swathi, V. Kumar, and S. Rao. M/M/1 queueing system with customer balking and reneging. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 8(9):2636–2646, 2019.
- [152] H. Takagi. Analysis of an M/G/1//N queue with multiple server vacations, and its application to a polling model. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 35(3):300–315, 1992.
- [153] H. Takagi. M/G/1/N queues with server vacations and exhaustive service. *Operations Research*, 42(5):926–939, 1994.
- [154] T. Takine. A new recursion for the queue length distribution in the stationary BMAP/G/1 queue. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, 16(2):335–341, 2000.
- [155] Y. Tang and X. Tang. The queue-length distribution for  $M^x/G/1$  queue with single server vacation. *Acta Mathematica Scientia*, 20(3):397–408, 2000.
- [156] P. Tarjan and G. Nemeth. Buffer overflow probability of tcp flows during mobile handovers. *IEEE Communications Letters*, 12(7):481–483, 2008.
- [157] L. Thomo. A multiple vacation model  $M^x/G/1$  with balking. *Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 30(4):2025–2030, 1997.
- [158] N. Tian and Z. G. Zhang. Stationary distributions of GI/M/c queue with PH type vacations. *Queueing systems*, 44:183–202, 2003.
- [159] Q. Tie, Lin F., X. Feng, W. Guowei, and Z. Yu. A packet buffer evaluation method exploiting queueing theory for wireless sensor networks. *Comput. Sci. Inf. Syst.*, 8:1028–1049, 10 2011.
- [160] Q. Tie, X. Feng, F. Lin, W. Guowei, and J. Bo. Queueing theory-based path delay analysis of wireless sensor networks. *Advances in Electrical and Computer Engineering*, 11:3–8, 05 2011.
- [161] O.M. Tikhonenko. Queueing models in computer systems. *Universitetskoe, Minsk*, 1990.

- [162] B. Van Houdt and C. Blondia. Approximated transient queue length and waiting time distributions via steady state analysis. *Stochastic Models*, 21(2-3):725–744, 2005.
- [163] A. Varga. OMNeT++ discrete event simulator. Available at <https://omnetpp.org/>, version 6.0.1, data dostępu: 15.12.2022.
- [164] Systems Ventana. The vensim documentation. Available at <http://www.vensim.com/documentation/index.html>, data dostępu: 05.01.2023.
- [165] Systems Ventana. Vensim simulation software. Available at <https://vensim.com/>, data dostępu: 05.01.2023.
- [166] D. Vere-Jones. Some applications of probability generating functionals to the study of input-output streams. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 30(2):321–333, 1968.
- [167] A.D. Wall and D.J. Worthington. Time-dependent analysis of virtual waiting time behaviour in discrete time queues. *European Journal of Operational Research*, 178(2):482–499, 2007.
- [168] Y. Wang, W. Wang, S. Cao, S. Li, L. Xie, and B. Ding. Self-similarity superresolution for resource-constrained image sensor node in wireless sensor networks. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014:1–10, 01 2014.
- [169] W. Whitt. A poisson limit for the departure process from a queue with many busy servers. *Operations Research Letters*, 44(5):602–606, 2016.
- [170] S. Wolfram and The Wolfram Centre. Mathematica. Available at <https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-12/>, version 12.1, data dostępu: 30.11.2022.
- [171] S.F. Yashkov. A note on application of the method of supplementary variables to the analysis of a processor sharing system. *Automation and Remote Control*, 69:1622–1629, 2008.
- [172] P.C. Yeh and J.F. Chang. Characterizing the departure process of a single server queue from the embedded markov renewal process at departures. *Queueing Syst.*, 35:381–395, 08 2000.
- [173] Q. Zhang, A. Heindl, and E. Smirni. Characterizing the BMAP/MAP/1 departure process via the ETAQA truncation. *Stochastic Models*, 21(2-3):821–846, 2005.

- [174] Y. Zhao, B. Du, and N. Ge. An empty-queue aware cooperative relay mac protocol with vacation queue analysis. In *MILCOM 2013 - 2013 IEEE Military Communications Conference*, pages 194–199, Nov 2013.
- [175] Z. Zhao, A. Elanchezian, and J. C. Oliveira. Sleeping policy cost analysis for sensor nodes collecting heterogeneous data. In *2009 43rd Annual Conference on Information Sciences and Systems*, pages 635–640, March 2009.
- [176] S. Zheng and John S. Baras. Multi-scale analysis of long range dependent traffic for anomaly detection in wireless sensor networks. In *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 4060–4065, 2011.

# Załączniki

# Dodatek A

## Narzędzia symulacyjne i numeryczne

### A.1 Kod symulatora zdarzeń dyskretnych OMNeT++

W tym podrozdziale zamieszczono napisane w języku C++ kluczowe funkcje, występujące w kodzie źródłowym programu napisanego w środowisku OMNeT++, umożliwiające symulowanie zachowania systemów kolejkowych  $M^X/G/1/N$  z dyscypliną zawieszenia obsługi typu „multiple vacation”.

```
void QueueFifo::initialize()
{
    //funkcja inicjalizująca początkowe wartości
    ↪ parametrów,
    //przesyłane typy wiadomości, otwierająca
    ↪ pliki zapisu danych

    //aktualizacja numeru bieżącej z 10 tysięcy
    ↪ symulacji
    fileSaveClass.updateCounter();

    fileSaveClass.openQueueLengthFile();
    fileSaveClass.openDepartureCountFile();
    fileSaveClass.openBufferOverflowFile();
    timeStep = getTimeInterval();//krok czasowy
    ↪ z jakim zapisywane są statystyki
    ↪ symulacji
    cConfigOption simTimeConfig("sim-time-limit"
    ↪ , true, cConfigOption::Type::CFG_DOUBLE
    ↪ , "s", "300", "");
    double maxSimTime = cSimulation::
    ↪ getActiveSimulation()->getEnvir()->
    ↪ getConfig()->getAsDouble(&
    ↪ simTimeConfig);
}
```

```

int numberOfMessages = maxSimTime/timeStep;
    ↪ //całkowita liczba wiadomości wyzwalaj
    ↪ ących zapis do plików

//definiowanie przesyłanych wiadomości
endServiceMsg = new cMessage("end-service");
    ↪ //wiadomość wyzwalająca koniec obsługi
    ↪  pakietu
vacation = new cMessage("vacation");//
    ↪ wiadomość wyzwalająca koniec
    ↪ pojedynczego okresu przestoju obsługi
pauseAndWrite = new cMessage("pauseAndWrite"
    ↪ );//wiadomość wyzwalająca zapis do
    ↪ plików
queue.setName("queue");

notInBuffer = 0;//sumaryczna liczba pakietów
    ↪ , które nie zmieściły się w buforze
inBuffer = 0;//sumaryczna liczba pakietów,
    ↪ które zmieściły się w buforze
numberOfProcessedMessagesSendToSink = 0;//
    ↪ liczba obsłużonych pakietów, przesł
    ↪ anych do modułu końcowego
firtBufferOverflowOccured = false;//
    ↪ ustawienie flagi wystąpienia
    ↪ pierwszego przepełnienia bufora

simtime_t vacationTime = 0.0000001;//mała
    ↪ wartość, aby tuż po starcie symulacji
    ↪ zaplanować moment sprawdzenia czy w
    ↪ buforze są jakieś pakiety
scheduleAt(simTime()+vacationTime, vacation)
    ↪ ;//planowanie pierwszego momentu
    ↪ sprawdzenia w buforze są jakieś
    ↪ pakiety
vacationActive = true;//ustawiam flagę, iż
    ↪ okres zawieszenia obsługi jest aktywny

for(int i=0; i<numberOfMessages; i++)
{
    ↪ //planowanie wszystkich momentów zapisu
    ↪ statystyk symulacji do pliku
    ↪     scheduleAt(timeStep*i, new cMessage(
    ↪         ↪ "pauseAndWrite"));
}

```



```

}

void QueueFifo::handleMessage(cMessage *msg)
{
    //funkcja zapewniająca obsługę przesyłanych
    ↪ w symulacji wiadomości

    if(strcmp( msg->getName(), "pauseAndWrite")
        ↪ == 0)
    {
        std::string simulTime = simTime().
            ↪ str(); //pobieram czas
            ↪ symulatora z obecnego momentu

        //zapis do pliku informacji o
        ↪ liczbie obsłużonych pakietów
        fileSaveClass.
            ↪ writeDepartureCountingProcess(
            ↪ simulTime,
            ↪ numberOfProcessedMessagesSendToSink
            ↪ );

        //zapis do pliku informacji o stanie
        ↪ wystąpienia pierwszego przepe
        ↪ łnienia bufora
        if(firtBufferOverflowOccured)
        {
            fileSaveClass.
                ↪ writeBufferOverflowLine
                ↪ (simulTime, 0);
        }
        else
        {
            fileSaveClass.
                ↪ writeBufferOverflowLine
                ↪ (simulTime, 1);
        }

        //zapis do pliku informacji o
        ↪ liczbie pakietów w kolejce
        if (!msgServiced)
        fileSaveClass.writeQueueLengthFile(
            ↪ simulTime, queue.getLength());
        else
    }

```

```

fileSaveClass.writeQueueLengthFile(
    ↪ simulTime, queue.getLength()
    ↪ +1);
//plus jedna wiadomość aktualnie obs
    ↪ ługiwana

delete msg;
}
else if (msg == vacation)
{
    if (queue.isEmpty()) { //gdy kolejka
        ↪ pusta
        simtime_t vacationTime =
            ↪ startVacation(); //
            ↪ pobieram losowaną dł
            ↪ ugość okresu przestoju
        scheduleAt(simTime()+
            ↪ vacationTime, vacation
            ↪ ); //planuję wiadomość
            ↪ wyzwalająca koniec
            ↪ pojedynczego okresu
            ↪ przestoju obsługi
        vacationActive = true; //
            ↪ ustawiam flagę, iż
            ↪ okres zawieszenia obsł
            ↪ ugi jest aktywny
    }
    else
    {
        vacationActive = false; //
            ↪ ustawiam flagę, iż
            ↪ okres zawieszenia obsł
            ↪ ugi jest nieaktywny
        msgServiced = (cMessage *)
            ↪ queue.pop(); //ściągam
            ↪ z kolejki pakiet

        inBuffer++; //inkrementuję
            ↪ liczbę pakietów, które
            ↪ zmieściły się w
            ↪ buforze

        simtime_t serviceTime =
            ↪ startService(

```

```

        ↪ msgServiced);//
        ↪ pobieram czas obsługi
        ↪ dla tego pakietu
    scheduleAt(simTime()+
        ↪ serviceTime,
        ↪ endServiceMsg);//
        ↪ planuję wiadomość koń
        ↪ czącą obsługę pakietu
    }
}
else if (msg == endServiceMsg)
{
    endService(msgServiced);//wywołuję
        ↪ funkcję, która prześle obsłuż
        ↪ oną wiadomość do modułu koń
        ↪ cowego
    numberOfProcessedMessagesSendToSink
        ↪ ++;//inkrementuję liczbę obsłu
        ↪ żonych wiadomości

    if (queue.isEmpty()) {
        msgServiced = nullptr;//
            ↪ ustawiam jako obsł
            ↪ ugiwaną obecnie
            ↪ wiadomość nulla
        simtime_t vacationTime =
            ↪ startVacation();//
            ↪ pobieram długość
            ↪ okresu przestoju
        scheduleAt(simTime()+
            ↪ vacationTime, vacation
            ↪ );//planuję wiadomość
            ↪ wyzwalając koniec
            ↪ pojedynczego okresu
            ↪ przestoju obsługi
        vacationActive = true;//
            ↪ ustawiam flagę, iż
            ↪ okres zawieszenia obsł
            ↪ ugi jest aktywny
    }
    else {
        msgServiced = (cMessage *)
            ↪ queue.pop();//ściągam
            ↪ z kolejki pakiet
    }
}

```

```

        inBuffer++; //inkrementuję
            ↪ liczbę pakietów, które
            ↪ zmieściły się w
            ↪ buforze

        simtime_t serviceTime =
            ↪ startService(
            ↪ msgServiced); //
            ↪ pobieram czas obsługi
            ↪ dla tego pakietu
        scheduleAt(simTime()+
            ↪ serviceTime,
            ↪ endServiceMsg); //
            ↪ planuję wiadomość koń
            ↪ czącą obsługę pakietu
    }
}
else {

    int bufferLimit = 9;

    if(queue.getLength() < bufferLimit)
    {
        msg->setTimestamp(); //ustaw
            ↪ metkę czasową na
            ↪ aktualny czas
            ↪ symulacji
        queue.insert(msg); //wrzuć
            ↪ nowy pakiet do kolejki
    }
    else
    {
        notInBuffer++; //inkrementuję
            ↪ liczbę pakietów, któ
            ↪ re nie zmieściły się w
            ↪ buforze

        delete msg;
    }

    if(queue.getLength() == bufferLimit)
    {

```



```

\*SuperscriptBox[\(j\), \((M + 1)\)]/Factorial[M])
  ↪ \)*Binomial[M, j]*
Binomial[2 j, j]*Binomial[j, k - j]\)\);
Estim[M_] := (Log[2]/t)*!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \((k = 1\), \((2
  ↪ M\)\)\(Ck[k]*
LaplaceTrans[\(\(k*Log[2]\)\)/t]\)\);
Return[Simplify[Estim[M]], TimeConstraint ->
  ↪ 1000];
];

```

3. Implementacja algorytmu Abate-Choudhury-Whitt (algorytm zaczerpnięto z pracy [1])

```

AbateChoudhuryWhitt[L_, A_, m_, n_, f_] :=
  ↪ Module[{name = filename},
Clear[b, a, F];
b[k_, s_] := f[A/(2*L*s)] + 2*!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \((j = 1\), \((L
  ↪ \)\)\(Re[
f[A/\(\(2*L*s)\)\) + \(\(I*j*\[Pi]\)\)/\(\(L*s)\)\)]*
E^\(\(\(\(I*j*\[Pi]\)\)/L)\)\)\) /; And[k == 0, Re
  ↪ [s] > 0];
b[k_, s_] := 2*!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \((j = 1\), \((L
  ↪ \)\)\(Re[
f[A/\(\(2*L*s)\)\) + \(\(I*j*\[Pi]\)\)/\(\(L*s)\)\) +
  ↪ \(\(I*k*\[Pi]\)\)/
s]*E^\(\(\(\(I*j*\[Pi]\)\)/L)\)\)\) /; And[k >= 1,
  ↪ Re[s] > 0];
b[k_, s_] := 0;
a[k_, s_] := E^(A/(2*L))/((2*L*s)*b[k, s] /; And[
  ↪ k >= 0, Re[s] > 0];
a[k_, s_] := 0;
F[s_] := N[!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \((k = 0\), \((m
  ↪ \)\)\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \((j = 0\), \((n
  ↪ + k\)] Binomial[m,
k]*\(\(2^\(\(\(-m\)\)\)\)\)*\(\(\(\(-1\)\)\)^j)\)*a[j
  ↪ , s]\)\)\);
Return [F]]

```

4. Implementacja ujętej w Twierdzeniu 2.2 transformaty Laplace'a warunkowego rozkładu liczby zgłoszeń w systemie  $M^X/G/1/N$ .

```

QueueSize[NumberOfPacketsAtTimet_, BuforZero_,
  ↪ BuforSize_,
RateLambda_, RateMuA1_, RateMuB2_, Alpha_,
  ↪ RateVacation_,
pkProbabilities_, infin_] := Module[{
  NN = BuforSize(*Rozmiar bufora*),
  n = BuforZero(*Początkowa liczba pakietów
  ↪ w w kolejce*),
  m = NumberOfPacketsAtTimet, (*Liczba
  ↪ pakietów w kolejce w momencie
  ↪ czasu t*)
  \[Lambda] = RateLambda (*Intensywność wp
  ↪ ływu pakietów*),
  \[Mu]A1 = RateMuA1(*Szybkość obsługi
  ↪ pakietów*),
  \[Mu]B2 = RateMuB2(*Szybkość obsługi
  ↪ pakietów*),
  \[Alpha] =
  Alpha, (*Wartosc używana w rozkładzie obs
  ↪ ługi pakietów*)
  \[Lambda]v =
  RateVacation (*Parametr rozkładu czasu
  ↪ trwania pojedynczego okresu
  ↪ przestoju*)},

pk = Normal[pkProbabilities];
(*Gęstość rozkładu wykładniczego mieszanego obsł
  ↪ ugi pakietów*)
f[t_] := \[Alpha]*\[Mu]A1*Exp[-\[Mu]A1*t] + (1 -
  ↪ \[Alpha])*\[Mu]B2*
Exp[-\[Mu]B2*t];
(*Dystrybuanta rozkładu wykładniczego mieszanego
  ↪ obsługi pakietów*)

F[t_] := \[Alpha]*(1 - Exp[-\[Mu]A1*t]) + (1 -
  ↪ \[Alpha] *(1 -
Exp[-\[Mu]B2*t]);
fLT[s_] := LaplaceTransform[f[t], t, s];
FF[t_] := 1 - F[t];

(*Gęstość rozkładu Erlanga rzędu 2 czasu trwania
  ↪ pojedynczego okresu przestoju*)
g[t_] := \[Lambda]v^2*t*Exp[-\[Lambda]v*t];

```

```

(*Dystrybuanta rozkładu Erlanga rzędu 2 czasu
  ↪ trwania pojedynczego okresu przestoju*)
G[t_] := 1 - E^(-t* \[Lambda]v) *(1 + t *\[
  ↪ Lambda]v);
gLTS[s_] := LaplaceTransform[g[t], t, s];
GG[t_] := 1 - G[t];

a[k_] := Assuming[Re[s] > 0, \!\(
  \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\), \(\(k
  ↪ \)\)\(ProbabilitySplot[
k, r, pk]*Integrate[\ Exp[\(-\(\(\[Lambda] + s\)\)
  ↪ \)*y]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\(\[Lambda]*y\)\), \(\(r\)\), \(\(r!\)
  ↪ )]*f[y], {y,
0, \[Infinity]}\)\)\) ];
b[l_] := 1/(1 - gLT[\[Lambda] + s])*Assuming[Re[
  ↪ s] > 0, \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\), \(\(1
  ↪ \)\)\(ProbabilitySplot[
1, r, pk]*Integrate[\ Exp[\(-\(\(\[Lambda] + s\)\)
  ↪ \)*y]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\(\[Lambda]*y\)\), \(\(r + 1\)\),
  ↪ \(\(\((r + 1)\)\!)\)]*
g[y], {y, 0, \[Infinity]}\)\)\) ];

fiG1[l_] := \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\), \(\(1
  ↪ \)\)\(ProbabilitySplot[
1, r, pk]*
Assuming[Re[s] > 0, Integrate[\ Exp[\(-\(\(\[
  ↪ Lambda] + s\)\)\)*t]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\(\[Lambda]*t\)\), \(\(r + 1\)\),
  ↪ \(\(\((r + 1)\)\!)\)]*
GG[t], {t, 0, \[Infinity]}\)\)\);
fiF1[l_] := \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\), \(\(1
  ↪ \)\)\(ProbabilitySplot[
1, r, pk]*
Assuming[Re[s] > 0, Integrate[\ Exp[\(-\(\(\[
  ↪ Lambda] + s\)\)\)*t]*
\*FractionBox[

```





```

fii[nn_] := \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(k = 0\), \(\(nn
↪ \)\)\(\mathbb{R}[
nn - k]\)\((h[NN]*
\*SuperscriptBox[\(\(fLT[s]\)\), \(-1\)]*\(\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(i = k + 1\),
↪ \(\infin\)\)]a[i]\)\) -
h[NN - k]\)\)\)\);
pvn := fii[NN - n] + theta[NN - n]*(\!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(k = 1\), \(\(NN
↪ -
1\)\)\(\(pk[\(\)\(\(k\)\)\(\)]\)]*\(\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(j = 1\), \(\(NN
↪ - k\)\)]b[NN - k - j]*
fii[j]\)\)\)\) + d + If[m == 0, 1, 0]*(\[Lambda] +
↪ s)^-1 -
fii[NN])/(theta[NN] - \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(k = 1\), \(\(NN
↪ -
1\)\)\(\(pk[\(\)\(\(k\)\)\(\)]\)]*\(\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(j = 1\), \(\(NN
↪ - k\)\)]b[NN - k - j]*
theta[j] +
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(j = NN - k\),
↪ \(\infin\)\)]b[
j]\)\)\)\)\);
Return[pvn];
];

```

5. Implementacja ujętej w Twierdzeniu 3.2 transformaty Laplace'a rozkładu warunkowego czasu do pierwszego przepełnienia bufora w systemie  $M^X/G/1/N$ .

```

LTbufferOverflow[BuforZero_, BuforSize_,
↪ RateLambda_, RateMu_,
RateVacation_, pkProbabilities_, alpha1_] :=
Module[{NN = BuforSize(*Rozmiar bufora*),
n = BuforZero(*Początkowa liczba pakietó
↪ w w kolejce*),
\[\Lambda] = RateLambda (*Intensywność wp
↪ ływu pakietów*)},
\[\Mu]1 =
RateMu[[1]];(*szybkość obsługi pakietów parametr
↪ hiperwykład 1*)

```

```

\[Mu]2 =
RateMu[[2]];(*szybkość obsługi pakietów parametr
↪ hiperwykład 2*)
pk = pkProbabilities;
\[Alpha] = alpha1;
\[Lambda]v =
RateVacation; (*Parametr rozkładu czasu trwania
↪ pojedynczego okresu przestoju*)
(*Gęstość rozkładu Erlanga rzędu 2 czasu trwania
↪ pojedynczego okresu przestoju*)
v[t_] := \[Lambda]v^2*t*Exp[-\[Lambda]v*t];
(*Dystrybuanta rozkładu Erlanga rzędu 2 czasu
↪ trwania pojedynczego okresu przestoju*)
V[t_] := 1 - E^(-t* \[Lambda]v) *(1 + t *\[
↪ Lambda]v);
vv[s_] := LaplaceTransform[v[t], t, s];
VV[t_] := 1 - V[t];

(*Gęstość rozkładu hiperwykładniczego rzędu 2
↪ obsługi pakietów*)
f[t_] := \[Alpha]*\[Mu]1*Exp[-\[Mu]1*t] + (1 -
↪ \[Alpha])*\[Mu]2*
Exp[-\[Mu]2*t];
(*Dystrybuanta rozkładu hiperwykładniczego rzędu
↪ 2 obsługi pakietów*)
F[t_] :=
1 - \[Alpha]*Exp[-\[Mu]1*t] - (1 - \[Alpha])*Exp
↪ [-\[Mu]2*t];
FF[t_] := 1 - F[t];
a[j_] := Assuming[Re[s] > 0, Integrate[Exp[-(\[
↪ Lambda] + s)*t]*\[
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\kappa = 0\), \(\j
↪ \)\]\(ProbabilitySplot[
j, k, pk]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\(\[Lambda]*t\)\), \(\kappa\)], \(\kappa!\)
↪ ]*f[t]\)\)\), {t,
0, \[Infinity]}]]];
b[j_] :=
Assuming[Re[s] > 0, Integrate[Exp[-(\[Lambda] +
↪ s)*t]*Sum[\!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\kappa = 0\), \(\i
↪ \)\]\(ProbabilitySplot[
i, k, pk]*

```

```

\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\([Lambda]*t)\), \(\kappa\)], \(\kappa!\)
  ↪ ]*FF[t]\)\), {i, 0,
      j}], {t, 0, \[Infinity]}}];
RR = Array[R, NN + 1, 0]; R[0] = 0; R[1] = a
  ↪ [0]^-1;
Do[R[k + 1] = R[1]*(R[k] - Sum[a[i + 1]*R[k - i
  ↪ ], {i, 0, k}]), {k,
      1, NN - 1}];
g[r_] := \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\j = 0\)], \(\r
  ↪ \)\)\(ProbabilitySplot[
r, j, pk]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\([Lambda]\), \(\j + 1\)], \(\(\(\j
  ↪ + 1)\)!\)\)]*
Assuming[Re[s] > 0, Integrate[Exp[\(-\(\([Lambda]
  ↪ ) + s)\)\)]*u]*
\*SuperscriptBox[\(\(u)\), \(\j + 1\)]*v[u], {u,
  ↪ 0, \[Infinity]}}]\)\);
gg[r_] := \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\j = 0\)], \(\r
  ↪ \)\)\(ProbabilitySplot[
r, j, pk]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\([Lambda]\), \(\j + 1\)], \(\(\(\j
  ↪ + 1)\)!\)\)]*
Assuming[Re[s] > 0, Integrate[Exp[\(-\(\([Lambda]
  ↪ ) + s)\)\)]*u]*
\*SuperscriptBox[\(\(u)\), \(\j + 1\)]*VV[u], {u,
  ↪ 0, \[Infinity]}}]\)\);
A := 1/(1 - vv[\[Lambda] + s])*!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\k = 1\)], \(\NN
  ↪ -
1\)\)\(pk[\(\([k]\)\)]*\)
Sum[gg[r] -
g[r]*Sum[
R[NN - k - r - i]*b[i - 1], {i, 1, NN - k - r}],
  ↪ {r, 0,
      NN - k - 1}]\)\) + Sum[R[NN - k]*b[k -
  ↪ 1], {k, 1, NN}] +
1/(\[Lambda] + s);
B := (R[NN] + R[1]*Sum[R[NN - k]*a[k], {k, 1, NN
  ↪ }]) -

```

```

1/(1 - vv[\[Lambda] + s])*!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \((k = 1)\), \((NN
\(\) -
1\)]\(\(pk[\(\[Sum]\), \((k = 1)\), \((NN
Sum[g[r]*\((R[NN - k - r] +
R[1]*Sum[
R[NN - k - r - i]*a[i], {i, 1, NN - k - r}]\)\),
\(\{r, 0,
NN - k - 1}\)\)\)\)^-1;
\[Delta]n :=
A*B*(R[NN - n] + R[1]*Sum[R[NN - n - k]*a[k], {k
, 1, NN - n}]) -
Sum[R[NN - n - k]*b[k - 1], {k, 1, NN - n}];
Return[\[Delta]n];
];

```

6. Implementacja ujętej w (4.3.1) transformaty Laplace'a wartości oczekiwanej opóźnienia kolejkowania w systemie  $M^X/G/1/N$ .

```

QueueDelay[BuforZero_, BuforSize_, RateLambda_,
\(\) RateMuA1_, RateMuB2_,
Alpha_, RateVacation_, pkProbabilities_, infin_]
:= Module[{
NN = BuforSize(*Rozmiar bufora*),
n = BuforZero(*Początkowa liczba pakietó
w w kolejce*),
\[Lambda] = RateLambda (*Intensywność wp
ływu pakietów*),
\[Mu]A1 = RateMuA1(*szybkość obsługi
pakietów*),
\[Mu]B2 = RateMuB2(*szybkość obsługi
pakietów*),
\[Alpha] =
Alpha, (*wartosc uzywana w rozkladzie
obsługi pakietow*)
\[Lambda]v =
RateVacation (*Parametr rozkładu czasu
trwania pojedynczego okresu
przestoju*)},
pk = Normal[pkProbabilities];
(*Gęstość rozkładu wykładniczego mieszanego obsł
ugi pakietów*)
f[t_] := \[Alpha]*\[Mu]A1*Exp[-\[Mu]A1*t];

```

```

(*Dystrybuanta rozkładu wykładniczego mieszanego
  ↪ obsługi pakietów*)

F[t_] := \[Alpha]*(1 - Exp[-\[Mu]A1*t]);
fLT[s_] := LaplaceTransform[f[t], t, s];
FF[t_] := 1 - F[t];

(*Gęstość rozkładu Erlanga rzędu 2 czasu trwania
  ↪ pojedynczego okresu przestoju*)
g[t_] := \[Lambda]v^2*t*Exp[-\[Lambda]v*t];
(*Dystrybuanta rozkładu Erlanga rzędu 2 czasu
  ↪ trwania pojedynczego okresu przestoju*)
G[t_] := 1 - E^(-t* \[Lambda]v) *(1 + t *\[
  ↪ Lambda]v);
gLt[s_] := LaplaceTransform[g[t], t, s];
GG[t_] := 1 - G[t];
a[k_] := Assuming[Re[s] > 0, \!\[
  ↪ \]*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\)\), \(\(k
  ↪ \)\)\(ProbabilityPlot[
k, r, pk]*Integrate[\ Exp[\(-\(\([Lambda] + s)\)\)
  ↪ \)*y]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\([Lambda]*y)\), \(\(r\)\), \(\(r!\)\)
  ↪ ]*f[y], {y,
0, \[Infinity]}\)\)\ ]];
r[l_] := Assuming[Re[s] > 0, \!\[
  ↪ \]*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\)\), \(\(1
  ↪ \)\)\(ProbabilityPlot[
1, r, pk]*Integrate[\ Exp[\(-\(\([Lambda] + s)\)\)
  ↪ \)*y]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\([Lambda]*y)\), \(\(r + 1\)\),
  ↪ \(\(\(r + 1\)\)!\)\)]*
g[y], {y, 0, \[Infinity]}\)\)\ ]];
\[Alpha]Wzor = 1/z*\!\[
  ↪ \]*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(k = 1\)\), \(\(NN
  ↪ -
1\)\)\(pk[\(\([k]\)\)\)]*\(\
  ↪ \)*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(j = 0\)\), \(\(NN
  ↪ - k - 1\)\)]
\*SuperscriptBox[\(\(fLT[z]\)\), \(\(k + j\)\)]*\(\
  ↪ \)*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\)\), \(\(j
  ↪ \)\)ProbabilityPlot[j,

```

```

r, pk]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\([Lambda]\), \((r + 1)\), \(\((r
↪ + 1)\)!)\)]*
Assuming[Re[z] > 0 && Re[s] > 0,
Integrate[\
Exp[\(-\((z)\)\)*v]*g[v]*
Integrate[\ Exp[\(-\((\([Lambda] + s - z)\)\)*y]*
\*SuperscriptBox[\(y\), \((r + 1)\), {y, 0, v}],
↪ {v,
0, \[Infinity]}]]\)\)\)\);
\[\Beta] = 1/z*\!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\([Sum]\), \((k = 1)\), \((NN
↪ -
1)\)\((pk[\(\([k]\)\)]*\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\([Sum]\), \((j = NN - k)\),
↪ \(\infin\)]\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\([Sum]\), \((r = 0)\), \((j
↪ \)]ProbabilityPlot[j,
r, pk]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\([Lambda]\), \((r + 1)\), \(\((r
↪ + 1)\)!)\)]*
Assuming[Re[s] > 0,
Integrate[\ Exp[\(-\((\([Lambda] + s)\)\)*y]*
\*SuperscriptBox[\(\(y\), \((r + 1)\)*GG[y], {y,
0, \[Infinity]}]]\)\)\)\);
\[\Gamma] = 1/z*(gLT[z] - gLT[\([Lambda] + s])/\(\([
↪ Lambda] + s - z);
qi[i_] := 1/z*\!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\([Sum]\), \((k = 0)\), \((NN
↪ - i - 1)\)]\(\
\*SuperscriptBox[\(\(fLT[z]\), \((i + k - 1)\)]*
Assuming[Re[z] > 0 && Re[s] > 0,
\*UnderoverscriptBox[\(\([Sum]\), \((r = 0)\), \((k
↪ \)]ProbabilityPlot[k,
r, pk]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\([\Lambda]\), \((r)\), \((r!\)]*
Integrate[\
Exp[\(-\((z)\)\)*y]*f[y]*
Integrate[\ Exp[\(-\((\([Lambda] + s - z)\)\)*t]*
\*SuperscriptBox[\(\(t\), \((r)\), {t, 0, y}], {y,
0, \[Infinity]}]\ \ ]\)\)\);

```

```

\[\Eta][i_] := 1/z*\!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\k = NN - i\),
  \(\infin\)]\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\r = 0\), \(\k
  \(\infin\)]ProbabilitySplot[k,
r, pk]*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[\(\[Lambda]\), \(\r\)], \(\((r)\)
  \(\infin\)]*
Assuming[Re[s] > 0 && Re[s] > 0,
Integrate[\ f[y]*Integrate[\ Exp[\(-\(\([Lambda]
  \(\infin\))\)]*t]*
  \(\infin\)]*
\*SuperscriptBox[\(\t\), \(\r\)], {t, 0, y}], {y,
  \(\infin\)}]]\)\);
Clear[k];
RR = Array[R, NN + 1, 0]; R[0] = 0; R[1] = a
  \(\infin\)^-1;
Do[R[k + 1] = R[1]*(R[k] - Sum[a[i + 1]*R[k - i
  \(\infin\)], {i, 0, k}]), {k,
  1, NN}];
theta[nn_] := a[0]*R[nn + 1] + \!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\k = 0\), \(\nn
  \(\infin\)]\(\R[
nn - k]*\(\(a[k + 1] -
\*SuperscriptBox[\(\(fLT[s]\)\), \(-1\)]*\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\i = k + 1\),
  \(\infin\)]a[
i]\)\)\)\)\);
fii[nn_] := \!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\k = 0\), \(\nn
  \(\infin\)]\(\R[
nn - k]*\(\(\(qi[NN] + \[\Eta][NN]\)\)*
\*SuperscriptBox[\(\(fLT[s]\)\), \(-1\)]*\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\i = k + 1\),
  \(\infin\)]a[i]\)\) -
qi[NN - k] - \[\Eta][NN - k]\)\)\)\);
pvN = fii[NN - n] + theta[NN - n]*\!\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\k = 1\), \(\NN
  \(\infin\)] -
1\)]\(\(pk[\(\)\(k\)\(]\)\)]*\(\
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\j = 0\), \(\NN
  \(\infin\)] - k - 1\)]fii[
NN - k - j]*
r[j]\)\)\)\) + \[\Alpha]Wzor + \[\Beta] + \[\Gamma] -

```



```

fii[NN]*(1 - gLT[\[Lambda] + s]))/(
theta[NN]*(1 - gLT[\[Lambda] + s]) - \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\kappa = 1\), \(\text{NN}
\(\rightarrow -
1\)]\(\text{pk}[\(\(\)\(\kappa\)\(\)]\)]*\(\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\jmath = 0\), \(\text{NN}
\(\rightarrow - \kappa - 1\)]\text{theta}[\
\text{NN} - \kappa - \jmath]*r[\jmath] +
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\jmath = \text{NN} - \kappa\),
\(\rightarrow \(\infty\)]r[\
\jmath]\)\)\)\));
Ev = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\text{z}\)]\(\(\text{z*pv}\))
\(\rightarrow \)\);
Return[Ev];
];

```

7. Implementacja ujętej w Twierdzeniu 5.3.2 transformaty Laplace'a wartości średniej liczby obsłużonych zgłoszeń w systemie  $M^X/G/1/N$ .

```

DepartureProcess[BuforZero_, BuforSize_,
\(\rightarrow RateLambda_, RateMuA1_,
RateMuB2_, Alpha_, RateVacation_,
\(\rightarrow pkProbabilities_, infin_] :=
Module[{
  NN = BuforSize(*Rozmiar bufora*),
  n = BuforZero(*Początkowa liczba pakietó
\(\rightarrow w w kolejce*),
  \[Lambda] = RateLambda (*Intensywność wp
\(\rightarrow ływu pakietów*),
  \[Mu]A1 = RateMuA1(*szybkość obsługi
\(\rightarrow pakietów*),
  \[Mu]B2 = RateMuB2(*szybkość obsługi
\(\rightarrow pakietów*),
  \[Alpha] =
  Alpha,(*wartosc uzywana w rozkladzie
\(\rightarrow obsługi pakietow*)
  \[Lambda]v =
  RateVacation (*Parametr rozkładu czasu
\(\rightarrow trwania pojedynczego okresu
\(\rightarrow przestoju*)},
pk = Normal[pkProbabilities];
(*Gęstość rozkładu wykładniczego obsługi pakietó

```

```

    ↪ w*)
f[t_] := \[Alpha]*\[Mu]A1*Exp[-\[Mu]A1*t];
(*Dystrybuanta rozkładu wykładniczego obsługi
  ↪ pakietów*)
F[t_] := \[Alpha]*(1 - Exp[-\[Mu]A1*t]);
fLT[s_] := LaplaceTransform[f[t], t, s];

g[t_] := \[Lambda]v*
Exp[-\[Lambda]v*
t];(*Gęstość rozkładu czasu trwania pojedynczego
  ↪ okresu przestoju*)
G[t_] :=
1 - Exp[-\[Lambda]v*
t];(*Dystrybuanta rozkładu czasu trwania
  ↪ pojedynczego okresu przestoju*)

gLT[s_] := LaplaceTransform[g[t], t, s];
a[k_] := Assuming[Re[s] > 0, \!\(
  \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\)\), \(\(k
    ↪ \)\)\(ProbabilityPlot[
k, r, pk]*Integrate[\ Exp[\(-\((\[Lambda] + s)\)
  ↪ \)*y]*\((
  \*SuperscriptBox[\(\([Lambda]*y)\), \(\(r)\)]/\(\(r
    ↪ !\)\)\)*f[y], {y,
      0, \[Infinity]}\)\)\) ];
b[l_] := (1/(1 - gLT[\[Lambda] + s]))*Assuming[
  ↪ Re[s] > 0, \!\(
  \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(r = 0\)\), \(\(1
    ↪ \)\)\(ProbabilityPlot[
1, r, pk]*Integrate[\ Exp[\(-\((\[Lambda] + s)\)
  ↪ \)*y]*\((
  \*SuperscriptBox[\(\([Lambda]*y)\), \(\(r + 1\)\)
    ↪ ]/\(\((r + 1)\)\!\)\)\)*
g[y], {y, 0, \[Infinity]}\)\)\) ];
aa[j_] := z*a[j];
\[Gamma] = (1 - gLT[s])/(s*(1 - gLT[\[Lambda] +
  ↪ s]));

Clear[k];
RR = Array[R, NN + 1, 0]; R[0] = 0; R[1] = aa
  ↪ [0]^-1;
Do[R[k + 1] = R[1]*(R[k] - Sum[aa[i + 1]*R[k - i
  ↪ ], {i, 0, k}]), {k,

```



## Skorowidz

- i*-krotny spłot
  - Laplace'a-Stieltjesa, 25
- j*-ty element *i*-krotnego spłotu, 25
- delta Kroneckera, 25
- dynamika systemowa (SD), 209
- funkcja celu, 219
- indykator, 25
- modelowanie średniego rozmiaru pakietu, 59
- obciążenie systemu, 27
- ogon dystrybuanty, 25
- pakiet napływający, 26
- pakiet obsługiwalny, 26
- podstawowa jednostka objętości, 26
- poziom, 210
- prawdopodobieństwo całkowite, 30
- przełącznik, 208
- pętla sprzężenia zwrotnego, 210
- rozkład czasu do pierwszego przepelnienia bufora, 95
- rozkład ilości obsłużonych zgłoszeń, 187
- rozkład liczby zgłoszeń, 57
- rozkład opóźnienia kolejkowania, 147
- sieci LoRaWAN®, 208
- składnik kalibracyjny, 220
- składnik proceduralny, 220
- stanowisko decyzyjne, 210
- strumień, 210
- Tauberera twierdzenie, 30
- transformata Laplace'a-Stieltjesa, 26
- średni rozmiar grupy, 26
- średni rozmiar pakietu, 27
- średnia ilość obsłużonych zgłoszeń, 188
- średnie opóźnienie kolejkowania, 148
- średnie zapelnienie systemu, 28